作业二

2024 年 3 月 5 日

1. 给定一个依赖于参数 $\vec{k}$ 的哈密顿量 $\hat{H}(\vec{k}) = k_x\sigma_x + k_y\sigma_y + k_z\sigma_z = \begin{pmatrix} k_z & k_x - ik_y \\ k_x + ik_y & -k_z \end{pmatrix}$, 那么其本征态有一个相位的不确定性. 比如我们可以选取 $\psi_+(\vec{k}) = \frac{1}{\xi}\left(k_x - ik_y, k - k_z\right)^T$ 或者是 $\psi_+(\vec{k}) = \frac{1}{\xi'}\left(k + k_z, k_x + ik_y\right)^T$ 作为其本征值为正的归一化本征态, 它们之间相差一个依赖于 $\vec{k}$ 的规范变换. 其中 $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$, $\xi = \sqrt{2k(k - k_z)}$, $\xi' = \sqrt{2k(k + k_z)}$. 在这两种规范下, 波函数分别在 $k = k_z$ 和 $k = -k_z$ 时具有奇异性.

(a) 给出以上两种规范下的 Berry 联络 $\vec{\mathcal{A}}(\vec{k}) = \langle\psi_+|i\nabla_{\vec{k}}|\psi_+\rangle$ 的表达式;

(b) 根据 (a) 中 Berry 联络的表达式，利用公式 $\vec{\Omega}(\vec{k}) = \nabla_{\vec{k}} \times \vec{\mathcal{A}}$ 计算 Berry 曲率 $\vec{\Omega}(\vec{k})$.

通过以上计算你会发现, Berry 联络 $\vec{\mathcal{A}}$ 依赖于规范的选取, 而 Berry 曲率 $\vec{\Omega}$ 则是规范不变的.

2. 考虑更一般的模型 $\hat{H} = d_x\sigma_x + d_y\sigma_y + d_z\sigma_z$, 其中 $\vec{d} = \vec{d}(k_x, k_y)$. 直接利用公式 $\Omega_z = -2\,\mathrm{Im}\,\frac{\langle +|\hat{v}_x|-\rangle\langle -|\hat{v}_y|+\rangle}{(\varepsilon_+ - \varepsilon_-)^2}$ 计算导带 Berry 曲率在 z 方向上的分量. 其中 $|\pm\rangle$ 是 $\hat{H}$ 的两个本征态，满足 $\hat{H}|\pm\rangle = \varepsilon_\pm|\pm\rangle$, $\hat{v}_i = \frac{\partial \hat{H}}{\partial k_i}$ 是速度算符的 i 分量. 你会发现最后的表达式的形式和第一次课上讲过的二维绕数的被积函数一致.