

# 布洛赫电子的拓扑与几何

牛谦<sup>1,†</sup> 张明哲<sup>2,††</sup> 肖笛<sup>3,†††</sup>

(1 中国科学技术大学物理学院 合肥 230026)

(2 台湾师范大学物理系 台北 11677)

(3 华盛顿大学物理系和材料系 西雅图 98195)

2024-03-17 收到

† email: niuqian@ustc.edu.cn

†† email: changmc@phy.ntnu.edu.tw

††† email: dixiao@uw.edu

DOI: 10.7693/wl20240401

## The topology and geometry of Bloch electrons

NIU Qian<sup>1,†</sup> CHANG Ming-Che<sup>2,††</sup> XIAO Di<sup>3,†††</sup>

(1 School of Physical Sciences, University of Science and Technology of China,

Hefei 230026, China)

(2 Department of Physics, Taiwan Normal University, Taipei 11677, China)

(3 Department of Physics, Department of Materials Science and Engineering, University of Washington, Seattle 98915, USA)

**摘要** 文章回顾了电子的拓扑几何理论发展的初期, 大约二十多年的历史。首先介绍拓扑陈数在凝聚态物理中的两个重要应用。其一关于量子霍尔效应, 绝缘条件下霍尔电导可以写成一个陈数拓扑不变量, 从而解释实验结果的精确量子化。其二关于绝热泵浦, 它描述布洛赫能带的绝热电流响应, 与电子极化有密切联系。拓扑陈数是布里渊区上贝里曲率的积分, 后者本身也有独立的物理意义。接着介绍贝里曲率对电子动力学的影 响, 包括反常速度和轨道磁化等概念。作者还将这个理论推广到多带情况, 使其可以应用到自旋输运等现象。最后, 文中展示了再量子化方法, 从半经典模型来获得布洛赫电子的有效量子理论。在非相对论极限下, 泡利-薛定谔方程可以看作是狄拉克电子在正能谱上的等效量子理论, 其中的自旋轨道耦合即是一种几何物理效应。

**关键词** 贝里相位, 贝里曲率, 拓扑陈数, 量子霍尔效应, 绝热泵浦, 半经典动力学, 反常速度, 相空间态密度, 泡利-薛定谔方程, 广义派尔斯替换

**Abstract** We review the early development of electronic topological and geometric theory over a period of twenty some years, and explore two important applications of topological Chern numbers in condensed matter physics. The first is the quantum Hall effect, where the Hall conductivity can be written as a Chern number topological invariant under insulating conditions; its exact quantization found in experiment will be explained. The second is adiabatic pumping, which describes the adiabatic current response of Bloch bands and is closely related to electronic polarization. The topological Chern number is the integral of the Berry curvature over the Brillouin zone, wherein the latter has its own physical significance. We then describe the effect of Berry curvature on electron dynamics, including the anomalous velocity and orbital magnetization. We also generalize this theory to multi-band situations, which enables us to study spin transport phenomena. Finally, we demonstrate how to obtain an effective quantum theory by re-quantizing the semiclassical model. In the non-relativistic limit, the Pauli-Schrödinger equation can be seen as an equivalent quantum theory of Dirac electrons in the positive energy spectrum, where spin-orbit coupling is found to be a geometric effect.

**Keywords** Berry phase, Berry curvature, topological Chern number, quantum Hall effect, adiabatic pump, semiclassical dynamics, anomalous velocity, phase-space density of states, Pauli-Schrödinger equation, generalized Peierls substitution

前文《电子粒子观的蜕变》(详见《物理》2024年第1期)回顾了百多年来人们对固体中电子的认识历程。从经典的自由粒子假设开始,经过量子力学的初步改造,人们有了布洛赫粒子的概念,获得了金属、半导体、绝缘体的基本图像。二战后,经过对多体相互作用的细致梳理,并发展对布洛赫能带有效的计算方法,人们开始了基于第一性原理的对固体物理的定量研究。上世纪八十年代初,索利斯等人发现分布在布里渊区上的布洛赫态可拥有整体的、非平庸的拓扑结构。支撑这个拓扑结构的几何量被称为贝里曲率,它刻画了布洛赫态在动量空间里的微分结构。本文将展开讨论这些拓扑几何概念如何进一步刷新人们对固体中电子的认识。

我们熟悉的拓扑几何概念源于对曲面的理解。在观察曲面时,最容易捕获的几何特征就是曲面

在每个点处是如何弯曲的。这在数学上可用一个内禀的曲率,即高斯曲率来表征。它实际上刻画了曲面上一个点的小邻域与它的切平面偏差的程度。如果在这个小邻域里用三条短程线做一个曲面三角形,它的内角和会偏离 $\pi$ 。偏离的程度就等于高斯曲率乘以三角形的面积。高斯曲率通过著名的高斯-博内特定理也支撑了曲面的拓扑结构:一个封闭曲面上高斯曲率的积分是个整数,可以用来刻画曲面的拓扑,区分它是否可以连续地(不剪断不粘连)拉扯成为一个球面还是一个环面,或者是有多孔的曲面。

上面说到的贝里曲率源于1984年贝里(Michael Berry)对于量子力学里绝热演化问题的思考<sup>[1]</sup>。根据量子力学中的绝热定理,如果哈密顿量依赖一些参数,一个非简并的能量本征态在参数缓慢变化时不会发生跃迁,只是会随时间积累相位。积

### Box 1 贝里相位

考虑一个由哈密顿量 $\hat{H}(\mathbf{R})$ 描述的系统,其中 $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots)$ 是一组随着时间缓慢变化的外界参数。量子绝热定理说,如果体系初始处在一个非简并的瞬时本征态 $|n(\mathbf{R}(t=0))\rangle$ ,以后它就会待在 $|n(\mathbf{R}(t))\rangle$ 上,其中瞬时本征态满足 $\hat{H}(\mathbf{R})|n(\mathbf{R})\rangle = \epsilon_n(\mathbf{R})|n(\mathbf{R})\rangle$ 。这个状态的相位由含时薛定谔方程确定。除了由能量的时间积分给出的动力学相位,还有一部分可以写为参数空间一个线积分的几何相位。贝里注意到,如果系统在参数空间的演化是一个回路,这个几何相位

$$\gamma_n = \oint_C \mathbf{A}_n(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R}, \quad \mathbf{A}_n(\mathbf{R}) = \langle n(\mathbf{R}) | i\nabla_{\mathbf{R}} | n(\mathbf{R}) \rangle \quad (1)$$

还具有规范不变性,也就是不依赖于瞬时本征态的相位如何选取,只要在参数空间里保持单值即可。由于他的深刻见解,我们经常把几何相位称为贝里相位,把 $\mathbf{A}_n(\mathbf{R})$ 称为贝里联络。根据斯托克斯定理,贝里相位也可以写为

$$\gamma_n = \int_S d\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Omega}_n(\mathbf{R}), \quad \boldsymbol{\Omega}_n(\mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} \times \mathbf{A}_n(\mathbf{R}), \quad (2)$$

其中被积函数称为贝里曲率。

我们考虑一个具体的例子:一个用哈密顿量 $\hat{H} = \mathbf{h}(\mathbf{R}) \cdot \boldsymbol{\sigma}$ 描述的两能级系统,其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 是泡利矩阵。它的两个本征态的能量分别是 $\pm h$ 。对于低能级,它的贝里曲率是 $\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{h}}{h^3}$ 。我们看到贝里曲率描述了一个位于 $\mathbf{h} = 0$ 的磁单极子的磁场,在 $\mathbf{h} = 0$ 处两个能级变为简并能级:简并点因此表现为贝里曲率通量的源或漏。沿闭合路径的贝里相位由 $\mathbf{h}$ 在单位球上路径的立体角的一半给出(图1)。如果对整个球体上的贝里曲率进行积分,我们会发现 $\oint_S d\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 2\pi$ 。一般来说,贝里曲率在闭合流形上的积分是以 $2\pi$ 为单位量子化,等于内部单极子的数量,这个数被称为陈数,因陈省身先生在微分几何方面的工作而得名。

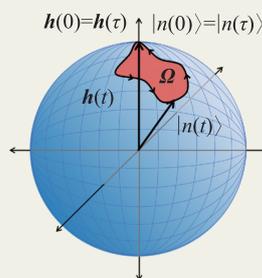


图1 量子态的绝热演化产生贝里相位的示意图

累的速率等于本征能量除以普朗克常数(也即动力学相位),再加上一个正比于参数变化率的修正。后者在参数空间里一个闭合路径上的积分就是贝里相位(Box 1)。这个贝里相位是几何的,因为它的表达式不依赖于参数空间内的坐标变换,就像一条曲线的长度并不依赖于曲线方程用什么参数来表达。它还是物理的,因为它不依赖于本征波函数的相位如何选取,具有所谓规范不变性。

我们所说的贝里曲率就是一个无穷小闭合路径上的贝里相位除以路径所围绕的面积,而布洛赫态所在的布里渊区就对应于贝里所说的参数空间。这个定义与高斯曲率有些类似,但它度量的不是参数空间本身,而是附在其上的(布洛赫)量子态随参数变化的某种弯曲。在三维情况下,一个无穷小面积可以有不同的朝向,因此贝里曲率就成为布里渊区这个动量空间上的(赝)矢量场。贝里相位的规范不变性也传递到贝里曲率上,后者在数学结构上类似于一个磁场,可以写成动量空间上一个规范矢势的旋度。

因此,当加州理工学院的数学物理学家Simon看到贝里的工作时,立即联想到索利斯等人的量子霍尔电导的表达式,评论说它其实代表了纤维丛微分几何中的一个陈省身拓扑整数<sup>[2]</sup>。贝里曲率在布里渊区上的积分给出这个陈数,就如同高斯曲率的积分给出一个封闭曲面的欧拉示性数一般。早年狄拉克讨论的磁单极也代表了一种拓扑陈数<sup>[3]</sup>,但对其多年的物理探测一无所获。量子霍尔效应呈现给人们的是二维布里渊区这个环面包含的一个虚拟空间里面的磁单极。多年以后,人们也终于在三维动量空间上找到了磁单极,就是现在固体物理学家们常说的外尔点,那里有许多奇特的物理现象<sup>[4]</sup>。

除了拓扑陈数可以带来令人震撼的宏观量子化现象,贝里曲率所代表的布洛赫态的几何特征也不可忽视地反映在电子系统对外场的响应中,有时甚至起主导作用。前文我们曾指出,贝里曲率出现在布洛赫电子的运动方程中。一般说来,只要体系不同时具有时间反演和空间反演对称,或者体系的自旋轨道耦合不可忽略,贝里曲率就非零,因而可以在更广泛(即使陈数为零)的条件

下影响到电子的行为。在磁单极出现的附近,贝里曲率甚至可以发散,它引起的物理效应就尤其显著,为人们调制材料的性能提供了一种特殊的手段。

下面将回顾电子的拓扑几何理论发展初期大约二十多年的历史。主要内容将分五个小节,拓扑陈数、绝热泵浦、运动方程、简并情形、再量子化,对这一理论做出比前文更为细致但仍然相对简单的描绘<sup>[5]</sup>。其中,拓扑陈数与运动方程前文已有所提及;绝热泵浦描述布洛赫能带的绝热电流响应,和电子极化密切相关。简并情形与再量子化这两小节将把相关几何物理概念作适当扩展,并应用在能带子空间内的量子化问题上。非相对论极限下的泡利-薛定谔方程就是狄拉克电子在正能谱上的等效量子理论,其中的自旋轨道耦合即是一种几何物理效应。

## 1 拓扑陈数

1980年,冯·克利青对半导体界面上一层二维电子气做了低温强磁场条件下的霍尔效应测量<sup>[6]</sup>。电子气在厚度方向处在量子基态,因而只有平面上两个自由度。磁场加在垂直方向,平面上一个方向通电流,另一方向测得电压,电压与电流的比值就是霍尔电阻(Box 2)。霍尔电阻随磁场的变化在低场段就是一条过零点的直线,这也是前文讲到的德鲁德经典理论所预言,而且还可以从直线的斜率读出电子的密度来。

但是,随着磁场增强,直线渐渐变成从小到大的一个个台阶。台阶的高度可以用一个普适量子除以一个整数来表达,这个普适量子等于普朗克常数除以电子电荷的平方,大约 $25813\ \Omega$ 。冯·克利青的实验精度达到百万分之一的量级,短短几年后实验学家们把这个精度又提高了三个数量级,超出国际上已有的实体电阻基准提供的可能衡量标准。因此,从1990年开始,国际上就改用冯·克利青发现的量子霍尔效应的平台作为新的电阻测量基准<sup>[7]</sup>。

发生平台的地方,也伴随着沿电流的纵向电阻的消失。前文提到,电子在强磁场下其能带会

以一条条高度简并的朗道能级的形式呈现。而纵向电阻的消失让人们联想到完整的朗道能级的填充，平台所对应的那个整数就应该是有多少个朗道能级被填满。这些填满了的朗道能级不会在体系内部导电，但Laughlin<sup>[8]</sup>和Halperin<sup>[9]</sup>认为电子气的边缘应该仍然有边界态可以携带电流，但它们的流向是相反的。同向状态的碰撞不改变电流，而反向的边界态像高速公路那样被隔离在两侧而互不干扰。因此，体系不能在纵向积累电压，但如果两侧电流有个净差值，横向就会有压降，而比例系数正是冯·克利青发现的电阻量子除以边界态的数目。

索利斯等人按照输运系数传统的久保公式，考察了霍尔电导率在电子气的内部的行为<sup>[10]</sup>。在他们的模型里，二维电子同时受磁场和一个周期势的影响；之前很多人研究过，Hofstadter用数值方法还得到了能谱的细致图像。当周期元胞里磁通是 $h/e$ 的分数时，电子本征态呈现为类似布洛赫状态的样子。久保公式其实就是一个微扰论的公式，通常以速度算符在填充态和空态之间的矩阵

元来表达，但索利斯等人却把最后结果简化成填充的布洛赫态在布里渊区上的一个整体行为，让人一目了然地看到电导率必须为 $e^2/h$ 的整数倍。

这一工作没有用到朗道能级的概念，故可推广应用到通常意义下的布洛赫能带，比如Haldane于1988年提出的一个模型<sup>[11]</sup>。人们还发现，如果能带的陈数非零，体系就自然会在边界处产生单向流动的边界态，从而携带量子霍尔电流<sup>[12]</sup>。2013年，薛其坤团队首次验证了量子化的霍尔效应可以在无磁场但有剩余磁化的条件下实现<sup>[13]</sup>。另一方面，Haldane模型被Kane和Mele应用到石墨烯<sup>[14]</sup>，引发了对时间反演对称的拓扑绝缘体的研究热潮。

从一开始人们就在问，为什么实验观察到的量子平台可以有那么高的精度？原子物理中的精密测量除了实验手段的精妙，也依赖于原子系统的完全确定。固体材料和器件不可能做到完美无缺，其内部的杂质类型和分布也不完全清楚。另外，电子间也有相互作用，布洛赫态只是平均场意义下的一个单粒子近似。作者之一有幸于

### Box 2 量子霍尔效应

1980年冯·克利青发现，在强磁场下，二维电子气的霍尔电阻以 $\frac{h}{e^2}$ 为单位精确量子化，同时纵向电阻消失(图2)。严格的量子化是一个意外惊喜，索利斯与合作者把这个现象解释为电子状态的一个拓扑特性。他们考虑了周期势场和磁场作用下的所谓磁布洛赫能带，发现在满带情况下，电场会引起一个垂直方向的电流，对应电导可以写成

$$\sigma_{xy} = \frac{ie^2}{2\pi h} \iint d^2k \left[ \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial k_x} \middle| \frac{\partial u_n}{\partial k_y} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial k_y} \middle| \frac{\partial u_n}{\partial k_x} \right\rangle \right], \quad (3)$$

其中 $u_{nk}(\mathbf{x})$ 是磁布洛赫函数的系数部分。从贝里相位的角度来看，这里的参数空间就是动量的布里渊区，具有环面的拓扑结构(图3)。因而，这个式子代表了一个以 $\frac{e^2}{h}$ 为单位的拓扑陈数，必须是量子化的。

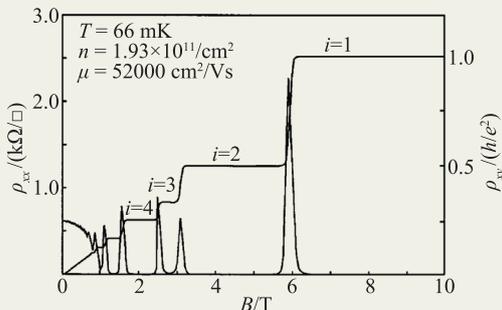


图2 整数量子霍尔效应(摘自 Tsui D. *Reviews of Modern Physics*, 1999, 71: 891)

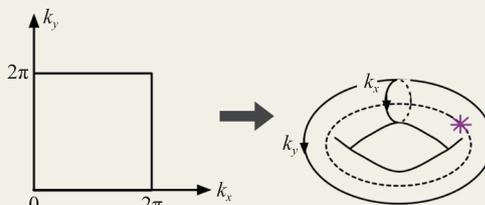


图3 二维布里渊区等价于环面

### Box 3 电荷泵浦

索利斯考虑了一维绝缘体经历循环绝热演化的电荷泵浦问题。在这种情况下，参数空间是二维的，由晶体动量 $k$ 和时间 $t$ 张成，构成一个环面。索利斯发现，泵浦电荷等于 $Q = \frac{e}{2\pi} \int dk \int dt \Omega_{kt}$ ，因此也是量子化的一个拓扑陈数。绝热电荷泵浦可以作为一个电流量子基准，它与量子霍尔效应和超导约瑟夫森效应一起，把电流 $I$ 、电压 $V$ 和频率 $f$ 用两个自然常数联系起来(图4)。

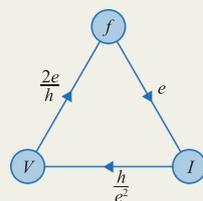


图4 电流—电压—频率的量子基准关系

1982—1985年间跟随导师索利斯，接受并解决了这一难题<sup>[15]</sup>。我们的做法是考虑多体基态波函数对周期边界条件中相位参数的依赖，证明霍尔电导在绝缘条件下仍然可以写成一个陈数拓扑不变量。后来，利用同样的绝缘条件，我们又把证明中用到的周期边条件放宽到实验中的情形，从而彻底解决了那个精度难题<sup>[16]</sup>。

1982年，崔琦等人在高质量的二维电子器件中又发现了分数量子霍尔效应<sup>[17]</sup>。Laughlin认为这是电子相互作用造成的特殊关联效应，并写出多体波函数来描述这一现象。那么，我们的多体拓扑理论如何才能给出分数来呢？答案只能从多体基态的简并得到，苏武沛在周期边界条件下的数值计算确实表明了这一点<sup>[18, 19]</sup>。对此，Haldane在Aspen物理中心的一个讨论会上提出了严重质疑，因为他在球面上做的计算根本看不到简并<sup>[20]</sup>。后来，在与文小刚的一篇文章里，我们证明简并度确实依赖于二维曲面的拓扑，才最终解决了这个争论<sup>[21]</sup>。类似于整数情形，我们的多体拓扑理论并不依赖于强磁场的特殊条件，也可以应用到最近实验上观察到的分数量子反常霍尔效应<sup>[22]</sup>。

## 2 绝热泵浦

Laughlin在1981年论证霍尔电导量子化的时候，提出了下述的理想实验<sup>[23]</sup>。假设可以将二维电子系统弯成一个圆柱面，然后在它的中心穿过一个缓慢增加的磁通，而原本的垂直于二维电子系统的磁场此时变为与柱面相垂直。根据法拉第效应，变化的磁通自然会在圆周方向感应出来一个电动势，这个电动势在垂直柱面的外磁场下通

过霍尔效应又会在柱面的纵向造成一个电流。这个霍尔电流会有多大呢？Laughlin发现，磁通增加一个量子 $h/e$ 的时候，体系内部相当于做了一个规范变换，能谱和本征态都没有发生变化；如果内部有整数个朗道能级被填充，磁通缓慢增加是个绝热过程，不会在内部引起激发。唯一的可能只是有整数个电子在磁通增加的过程中从柱面的一端转移到了另一端，而这个整数就是量子霍尔电导中的整数。

Laughlin关于规范不变和绝热演化的论述可以推广到杂质等引起的无序情形，但整数个电子转移的推论还需要量子力学框架下的严格论证。1983年，索利斯考虑了在周期势场随时间缓慢且周期的变化时，填满的一维布洛赫能带绝热演化的问题，并计算了演化过程中伴生的绝热电流。他发现此电流可以写成布洛赫态在时间和动量这个参数空间上贝里曲率的积分，故一个时间周期内的电荷转移是个陈数，必须是量子化的。这就是文献中常提到的索利斯泵浦(Box 3)<sup>[24]</sup>。最近绝热泵浦也在冷原子系统中被观察到<sup>[25-27]</sup>。

如何把绝热电荷转移量子化的结论进一步推广到一般情形，容许体系有杂质无序和多体相互作用呢？当时，我们还没有想到直接攻克量子霍尔效应的一般证明。上节讲到的利用周期边条件的相位的那个方法还是首次在解决这个问题的时候找到的。我们的结论是绝缘状态下的泵浦必然是量子化的<sup>[28]</sup>。这弥补上了Laughlin规范论说的一个逻辑漏洞，因而也可以认为是对一般情况下量子霍尔效应的间接证明。

绝热泵浦也提供了一个建立电流基准的途径，因为它的高精度由我们关于拓扑量子化的一般理

论来保证，而温度和非绝热效应可以指数性地被抑制<sup>[29]</sup>。后来，剑桥大学的Pepper 研究组利用表面声波通过一个二维电子气的人工结构实现了这一设想<sup>[30]</sup>。他们观察到一系列电流的平台，等于整数个电子电荷与频率的乘积，实验精度达到20个ppm(百万分之一，精密测量领域常用的标示)。这些平台对应于每个势阱有整数个电子占据，其中包括奇数。理论分析表明，电子的库仑相互作用非常重要，确实需要一个多体拓扑理论来保证绝热泵浦的精度。

最新的这类实验已经把精度提高到了0.1 ppm的水平<sup>[31]</sup>，再提高一个数量级就可以实现量子化的电流基准，取代传统上基于导线之间安培力的测量。上节我们讲到，量子霍尔效应已于1990年在国际上被采用为新的电阻基准。同时被采用的还有一个基于超导约瑟夫森效应的电压基准，它把电压降表达为频率乘以超导磁通量子 $(h/2e)$ <sup>[32]</sup>。如果能补充上基于量子电荷泵浦的电流基准，人们就有了完整的基于电子电荷、普朗克常数和频率的三个基本的量子电测量手段。这里，频率的测量最终基于原子钟，其原理也是一个量子现象。

顺着索利斯绝热泵浦的思路，我们也可以得出一个电荷密度量子化响应的结论<sup>[33]</sup>。比如，如果一个周期势场里的电子体系处在绝缘状态，电荷密度就是某个整数除以元胞的大小，其中奇数对应于莫特绝缘体情形。如果有多个非公度周期场，绝缘态中电子的密度就等于这样一些项的加和，其中每项都是某个整数除以一种元胞的大小。在一维情况下，索利斯就得到过这个结论。在二维情况下，如果电子还受到磁场的影响，绝缘状态下的密度还要加上正比于磁场和霍尔电导的一项，正如早先瓦尼尔给出的结论一样<sup>[34]</sup>。

绝热电流的概念也可以用到绝缘体中电极化强度的计算。在布洛赫波的观念下，晶体中的电子不能被认为是束缚在任何一个特定的原子上，因而基于电偶极子概念的计算都不成立。King-Smith 和 Vanderbilt 注意到，如果通过选择相位规范使得布洛赫态在布里渊区上具有周期性，索利斯关于绝热电流的表达式就可以写成

一个 Zak 相位(布洛赫态沿着布里渊区一大圈的贝里相位<sup>[35]</sup>)对时间的导数。这导致了那个著名的用 Zak 相位来表达电极化强度的式子，大大方便了后者的第一性原理计算<sup>[36]</sup>。需要考虑多体效应的时候，也可以利用多体基态波函数对于周期边条件的相位依赖而把这个 Zak 相位的概念加以推广<sup>[37]</sup>。

### 3 运动方程

前面讲到，索利斯等人发现的拓扑陈数是布里渊区上贝里曲率的积分，那么后者是否还有独立的物理意义呢？为了理解 Hofstadter 能谱的分形结构<sup>[38]</sup>，在单元格包含的磁通为有理数倍磁通量子的情况下，我们仔细研究了布洛赫能带中波包的运动规律(Box 4)<sup>[39]</sup>。我们发现，除了通常由能谱给出的群速度之外，电子的速度还有个正比且垂直于外力的反常项，其比例系数就是布洛赫态的贝里曲率。在零磁场情况下，这个反常速度早年曾被 Karplus 和拉廷格发现并用来解释反常霍尔效应，但可惜没有引起持续的重视<sup>[40]</sup>。

我们还发现，一般情况下，波包除了平动以外还会有自转，这会让电子获得一个磁矩，被称为轨道磁矩。这个磁矩在外磁场中让能量发生塞曼移动，其动量依赖也会影响到电子的平动群速度。对于真空中自由电子在狄拉克能带里的波包，也有这种自转引起的磁矩，正好对应自旋的玻尔磁子<sup>[41]</sup>。固体物理中，人们习惯用非相对论极限下的泡利—薛定谔方程来描述电子的量子行为，自旋塞曼项被单独列出。

运动方程的推导利用了变分方法，在计算波包的拉格朗日量的时候使用了局域和绝热近似，因为直接进入薛定谔方程的是规范势，其在弱外场情况下可以写成随时空缓慢变化的函数。1999年 Sundaram 利用了同样的技术，考虑到更一般的缓变微扰，推导出来的运动方程涉及到相空间和时间域里方方面面的贝里曲率分量<sup>[42]</sup>。这个方程后来有更广阔的应用，但本文不打算展开讨论，我们把目光仍然聚焦在电磁场作用的情形。

动量空间贝里曲率在学界受到广泛的重视，

还是得益于在反常霍尔效应中的成功应用。2002年在与Jungwirth和MacDonald合作的一个工作中，我们具体研究了一个铁磁半导体材料中的贝里曲率，计算了反常速度引起的霍尔电导，发现与实验结果相当符合<sup>[43]</sup>。以前近半个世纪，人们习惯了用Smit的偏斜散射<sup>[44]</sup>或者Berger的散射横移<sup>[45]</sup>等外禀机制去理解反常霍尔效应，缺乏定量的理论检验。我们这项工作重新确立了早年由Karplus和拉廷格首次提出的内禀机制，开启了这个领域的定量研究<sup>[46]</sup>。

由于贝里曲率完全由布洛赫态决定，单晶材料的这种内禀反常霍尔效应完全可以纳入第一性原理计算。比如，姚裕贵等人研究了体心立方结构的铁单晶材料<sup>[47]</sup>，方忠等人也考虑了金属铁磁体SrRuO<sub>3</sub><sup>[48]</sup>，获得贝里曲率在布里渊区的详细分布。由此积分获得的反常霍尔电导与实验结果也有很好的对应。由于自旋轨道耦合所造成的能

带精细结构，贝里曲率的分布在好几个数量级上正负波动，曾令人十分担心计算结果的精确程度。但是，后来王新杰等人用另一种方法，利用瓦尼尔函数插值，完全重复了姚裕贵等人的计算结果<sup>[49]</sup>。

除了反常速度，贝里曲率还会引起态密度的改变<sup>[50]</sup>。在经典统计力学中，微观状态的数目是以相空间的体积来度量的，度量的单位在半经典极限下被确定为普朗克常数的 $d$ 次方，其中 $d$ 是体系的空间维度。2005年，肖笛等人发现，受贝里曲率的影响，相空间的体积元会随时间演化而改变。为了维持体积元中的状态数目不变，量子态密度就要有个正比于贝里曲率和磁场的修正。这样，许许多多宏观物理性质就可以通过贝里曲率被磁场所调控。

作为一个典型案例，电子的自由能就有这么一个修正，其对磁场的微商给出电子系统的一个反常的磁化强度。磁化强度的正常项来自于电子

#### Box 4 波包动力学

贝里曲率本身也可以参与布洛赫电子的波包动力学。我们发现，在外部电磁场存在的情况下，波包的运动方程由下式给出：

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \epsilon_{n\mathbf{k}}}{\hbar \partial \mathbf{k}} - \dot{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\Omega}_n(\mathbf{k}), \quad (4)$$

$$\hbar \dot{\mathbf{k}} = -e\mathbf{E} - e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}, \quad (5)$$

其中 $\dot{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\Omega}_n(\mathbf{k})$ 这一项被称为反常速度，它是磁性金属中反常霍尔效应的来源。如果系统具有时间反演对称性，则有 $\boldsymbol{\Omega}_n(\mathbf{k}) = -\boldsymbol{\Omega}_n(-\mathbf{k})$ ；如果系统具有空间反演对称性，则有 $\boldsymbol{\Omega}_n(\mathbf{k}) = \boldsymbol{\Omega}_n(-\mathbf{k})$ 。因此，对于同时具有时间反演对称性和空间反演对称性的材料，贝里曲率消失(如果考虑电子自旋，还要对自旋指标求迹)。下图分别反映了单晶铁(时间反演破缺，图5(a))和单层MoS<sub>2</sub>(空间反演破缺，图5(b))的动量空间中贝里曲率的分布。

除了反常速度，能量也被轨道磁矩 $\mathbf{m}_n(\mathbf{k})$ 所修正， $\epsilon_{n\mathbf{k}} = \epsilon_{n\mathbf{k}}^0 - \mathbf{m}_n(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{B}$ 。轨道磁矩来源于波包的自转，与 $g$ 因子密切相关。

波包动力学的另一个关键因素是相空间的体积测度不再是一个常数。这是因为在贝里曲率和磁场存在的情况下，波包的动量和位置不再是一对正则坐标。通过研究相空间中体积元随时间的演化，我们发现态密度被修正为

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \left( 1 + \frac{e}{\hbar} \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Omega} \right), \quad (6)$$

才能保证相空间量子状态的数目在演化中守恒。

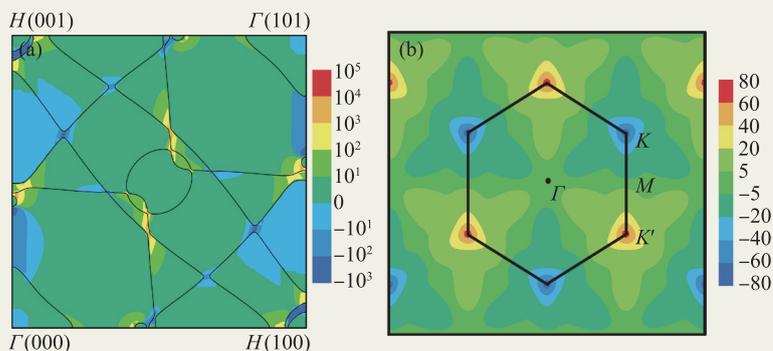


图5 单晶铁(a)和单层MoS<sub>2</sub>(b)的贝里曲率在动量空间中的分布(分别摘自文献<sup>[47]</sup>和Feng W *et al. Physical Review B*, 2012, 86: 165108)

能量对磁场的依赖，等于电子磁矩的加和平均。这个反常磁化强度蕴藏丰富的物理，当化学势或者温度有个空间梯度造成的统计力，它会导致一个反常霍尔和能斯特电流<sup>[51]</sup>。类似地，在体系的边缘处由于约束电子的势场具有非均匀性，它也会导致一个宏观的霍尔环流。

## 4 简并情形

贝里于1984年得出的几何相位与曲率，适用于非简并量子态的绝热演化。同一年，维尔切克(Frank Wilczek)与徐一鸿将几何相位的理论推广至简并量子态<sup>[52]</sup>，几何相位成为简并空间里的一个么正变换，而贝里联络和贝里曲率成为矩阵。一般说来，晶体若同时具有时间和空间反演对称，自旋相关的两条能带在动量空间将处处重合。人们也研究过四重简并能带，探讨其中的高阶拓扑特性<sup>[53]</sup>和自旋霍尔效应<sup>[54]</sup>。

简并能带中波包的运动方程该怎么写呢(Box 5)? 2005年Culcer等人以及Shindou等人分别对此做了推广，发现除了贝里曲率、自转角动量等须改为矩阵之外，波包运动方程的形式与非简并时大致相同。除此之外，还应附加一个旋量方程描述简并能级里的内在自由度的变动<sup>[55, 56]</sup>。当内在

自由度为自旋时，这套方程即可来研究固体中的自旋输运现象。

探讨波包运动轨迹时，需要知道能带的贝里曲率与自转角动量。对于简并能级，自旋方程里除了塞曼能还有一个贝里矢量势，反映了轨道运动对自旋的一种非阿贝尔几何物理效应。除此之外，波包自转所造成的磁矩，正是能带里电子或空穴的反常磁矩，这会让自旋的 $g$ 因子值偏离于2。

以石墨烯模型为例，当空间反演对称被破坏时，狄拉克点处会出现能隙，使得载流子的贝里曲率与自转磁矩皆不为零，在两个狄拉克谷间大小相等符号相反。所以施加电场后，这两类谷载流子会往相反的横向移动，造成谷霍尔效应<sup>[57]</sup>，表现为样品两侧反方向的磁化<sup>[58]</sup>。

在真空中电子的狄拉克相对论性量子理论里，有正、负两个能谱分支以巨大的能隙相隔，各自具有二重简并。非相对论电子的等效理论基于正能量分支底部的性质。有意思的是，即便在真空中存在时间和空间反演对称，电子波包的贝里曲率并非为零，而是正比于自旋<sup>[59]</sup>。在外加电场下，贝里曲率给出垂直于电场和自旋的横向位移，反映了电子的自旋轨道耦合。黄克孙也曾于1952年提过类似的图像，相对论性电子的颤动现象可以

### Box 5 简并能态的半经典动力学

简并能态里的波包，除了位置 $\mathbf{r}$ 与动量 $\hbar\mathbf{k}$ 之外，还带有赝自旋变量 $\eta_a (a = 1, 2, \dots, N)$ ，描述波包在各能带的占比。其运动方程式为

$$i\hbar \frac{D\eta_a}{Dt} = H_{ab}\eta_b, \quad \frac{D\eta_a}{Dt} = \frac{d\eta_a}{dt} + \left\langle u_a \left| \frac{du_b}{dt} \right. \right\rangle \eta_b, \quad (7)$$

其中我们用到了爱因斯坦求和规则。除此之外，贝里联络 $\mathbf{R}$ 和贝里曲率 $\mathbf{\Omega}$ 皆成为 $N$ 阶矩阵， $\mathbf{R}_{ab} = i\langle u_a | \partial/\partial \mathbf{k} | u_b \rangle$ ， $\mathbf{\Omega}_{ab} = \nabla \times \mathbf{R}_{ab} - i\mathbf{R}_{ac} \times \mathbf{R}_{cb}$ 。波包中心的运动方程稍有变化，

$$\hbar \dot{\mathbf{r}} = \left\langle \left[ i \frac{D}{D\mathbf{k}}, H \right] \right\rangle - \hbar \mathbf{k} \times \langle \mathbf{\Omega} \rangle, \quad (8)$$

$$\hbar \dot{\mathbf{k}} = -e\mathbf{E} - e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}, \quad (9)$$

其中 $D/D\mathbf{k}$ 为协变导数，其形式类似 $D/Dt$ ，只是 $t$ 替换为 $\mathbf{k}$ ，而 $\langle \dots \rangle$ 为赝自旋平均。

这套理论不只适用于固体能带，也适用于狄拉克的相对论性电子理论。这时电子的能带有正、负两支，每支均为双重简并。我们发现在正能带低(非相对论电子)， $\mathbf{\Omega} = -\frac{\lambda_c^2}{2} \boldsymbol{\sigma}$ ，其中 $\lambda_c = h/mc$ 为康普顿波长， $\boldsymbol{\sigma}$ 为泡利矩阵。另外，计算表明，波包自转的轨道角动量为 $\mathbf{L} = \hbar\boldsymbol{\sigma}$ ，是自旋角动量的两倍，解释了为何自旋的磁矩会带有一个 $g_e = 2$ 的因子。

想像为是平移与自转叠加后的结果<sup>[60]</sup>。

量子力学发展初期，人们曾试图以自转的电荷球解释电子自旋。如果把电荷球的库仑势能理解为电子质量的相对论来源，人们就会得到一个所谓的电子经典半径，大约等于玻尔半径乘以精细结构常数的平方。但是，为了得出自旋的角动量和玻尔磁子，转动的电荷球在表面的速率须大大超过光速，此图像因而被舍弃。

其实，非相对论电子应该被理解为正能带底部的一个波包。由于量子度规的限制，电子波包的尺度不能小于康普顿波长，这较经典电子半径大了两个数量级，没有上述的问题。的确，波包自转轨道角动量等于自旋角动量的两倍，也给出一个玻尔磁子，解释了自旋的 $g$ 因子为什么是2。因此，用电子波包来理解，早年的自转电荷球图像就对了。

## 5 再量子化

完美晶体的能带结构，会因为受到杂质、外加磁场、边界等影响而变动。探讨其能谱时，通常并非重头求解薛定谔方程。较简单的做法是以能带为基础，将理论再次量子化。例如，为了计算能带因外加磁场所造成的分裂，昂萨格提出类似玻尔—索末菲量子化的量子化条件，由布里渊区里回旋轨道面积的量子化得出朗道能级，并用来解释德哈斯—范阿尔芬效应，推断费米面的形状<sup>[61]</sup>。

Kuratsuji等人发现，当体系存在贝里曲率时，玻尔—索末菲的作用量积分需因闭合的积分轨迹上积累的贝里相而做修正<sup>[62]</sup>。之后在固体的波包理论里也发现了类似的修正项，这个修正会影响朗道能级的位置。例如石墨烯中的狄拉克点是贝里曲率的奇点，故动量空间中电子轨迹环绕狄拉克点一圈后的贝里相位为 $\pi$ 。这会造成所有朗道能级移动半阶，从而可在位于能量零点的狄拉克点处出现。

不可积体系由于经典轨道不封闭，不适用于玻尔—索末菲的量子化方法。更为一般的做法是

正则量子化，也就是将物理量转变为算符。例如半导体里掺入一个受主原子，在计算其能级时并非以“晶体加杂质”的总势能重新求解，而是由已知能带出发，先将布洛赫电子近似为有等效质量的自由电子，这时已不再需要考虑晶格，然后将其动量转化为算符。考虑受主的电势能后得出类氢原子模型，而杂质能级即为类氢原子能级。

计算能带因外加磁场而分裂为朗道能级时，若采用正则量子化，则是以派尔斯替换将能带中的波矢转变为梯度算符加磁矢势。如此一来，布洛赫能带函数即成为再量子化理论中的哈密顿量，求解其薛定谔方程之后即得到Hofstadter量子能谱。这种再量子化方法的严谨性，约于1950年由斯莱特、拉廷格等人加以确认<sup>[63, 64]</sup>，但他们的推导用到了局域的瓦尼尔函数，只适用于陈数为零的能带。

具有贝里曲率的半经典力学，其丰富的规范结构成了再次量子化的障碍。关键还是在于找出正则变量，而达布定理可确保正则变量在相空间局部的存在。微扰计算表明，波包动量与正则动量的主要差异仍然是磁矢势，而波包位置与正则位置的主要差异是贝里联络，另加电磁场的一阶或高阶项。这种广义派尔斯替换体现了相空间中更为丰富的规范结构，是正则量子化方法的关键步骤<sup>[59]</sup>。

以狄拉克的相对论性电子理论为例，其正能谱子空间里的等效理论是二分量的泡利理论。传统上这是以Foldy—Wouthuysen变换得出，也就是经由么正变换将狄拉克哈密顿矩阵块对角化，移除矩阵里因外场导致的电子、空穴耦合项，得出适用于正能谱子空间的等效理论<sup>[65]</sup>。科恩曾于1959年以类似的方法得出单一能带的等效理论<sup>[66]</sup>。由于涉及的能带数目众多，这是项令人生畏的艰巨推导。这个工作后来曾由Roth、Blount等人加以简化<sup>[67, 68]</sup>。

从半经典波包理论出发更容易得出等效量子理论，也有更清晰的物理图像。我们先得到狄拉克正能谱的波包能量，然后以广义派尔斯替换将能量函数再量子化，其结果正是泡利理论的等效

哈密顿量。其中有个自旋轨道耦合项，来源于电势能中正则位置和波包位置的差异，即非阿贝尔贝里矢量势。

## 6 总结和展望

通常我们考察一个量子体系对外界的响应时，微扰论的结果往往以填充态和空态之间的矩阵元来表达外场的作用。索利斯等人在研究量子霍尔效应时发现，霍尔电导可以表达成为填充态在动量空间的一个微分形式的积分，把霍尔电导的精确量子化解释成为了填充态的拓扑不变量陈数。索利斯关于绝热泵浦的量子化结论也是表达成为了填充态在参量空间(动量和时间)的这种几何拓扑特征。

这个后来被称为贝里曲率的微分形式强调的是填充态之间的横向联系，而不是与空态之间的纵向关系。在黎曼几何中，高斯曲率强调的也是曲面的内禀性质，尽管它也可以更直观地从包含曲面的一个高维平直视角来表达。一般情况下，我们用的量子力学模型的态空间在整体上往往是几何平直的，因而也是拓扑平庸的。非平庸的拓扑只是发生在状态的子空间上，比如一个或几个能带。

代表这个子空间横向联系的贝里曲率会影响布洛赫粒子在能带中的运动，应该是一件恰如其分的事情。如果说布洛赫当年发现了电子的动量空间被限制到了一个有限而周期的区域，半个多世纪以后的80年代以来，我们才真正认识到了这个区域上的拓扑与内禀几何。粒子运动不但受到周期能带关系的直接影响，也受到贝里曲率引起的非正则相空间结构的制约。这个非正则结构也改变了能带子空间上的统计测度和有效量子理论。

上世纪50年代，很多物理学前辈曾经努力构造单带、双带等子空间上的有效量子理论。由于量子理论是用正则变量来表达的，而有效哈密顿量往往只适用于能带的某个局部，我们所讲的拓扑和几何是显示不出来的。能够显示的应该是物

理位置和动量与相应正则变量之间的关系，也就是新的派尔斯替换，其中出现了磁矢势和贝里联络。如果能带的拓扑非平庸，贝里联络只能分片定义，正则变量以及相应的量子理论也只能分片成立。

时间反演破缺是反常霍尔效应出现的必要条件。早期研究的实际体系绝大多数是铁磁体，但后来发现反铁磁也可以承载这种效应，只要某些空间对称也被破缺。我们完全有理由期待，将来会有陈数非零甚至分数量子化的非铁磁绝缘材料被发现。在时间反演对称的体系里，贝里曲率仍然可以非零，只要有自旋轨道耦合存在或者空间反演破缺。这可导致自旋/谷霍尔效应。

量子自旋霍尔效应在自旋不守恒的情况下仍然可以保持一种微妙的二重拓扑特征，而且也有边界态的对应，但能带内部似乎找不到支撑这种拓扑的几何特征。这有点像具有空间反演对称的绝缘晶体，其中电极化强度可以为零(整格矢)也可以不为零(半整格矢)，但相应Zak相位的积分表达式的被积函数是个规范依赖的量，因而在局部没有确定的物理意义。

贝里曲率的应用远远不止反常霍尔效应和本文提到的轨道磁化。后续我们将系统介绍这些几何拓扑概念在各种响应问题中的应用。除了电磁场，我们还将涉及其他物理量(比如温度、应变和序参量)的梯度场。除了电流和热流，我们也会考虑非守恒物理量(比如自旋)的产生与输运。在这些线性交叉和非线性响应中，相空间的各种贝里曲率及其高阶形式以及新的几何量(比如量子度规和位移)也会出现。

**致谢** 本文在成文过程中得到周建辉和高阳的大力协助，收到沈顺清等同人的专业点评，作者在此表示深切感谢。

### 参考文献

- [1] Berry M V. Proc. R. Soc. London, Ser. A, 1984, 392:45
- [2] Simon B. Phys. Rev. Lett., 1983, 51:2167
- [3] Dirac P A M. Proc. R. Soc. London, Ser. A, 1931, 133:60
- [4] Armitage N P, Mele E J, Vishwanath A. Rev. Mod. Phys., 2018, 90:015001

- [5] Xiao D, Chang M C, Niu Q. *Rev. Mod. Phys.*, 2010, 82: 1959
- [6] Klitzing K V, Dorda G, Pepper M. *Phys. Rev. Lett.*, 1980, 45: 494
- [7] Taylor B N. *Physics Today*, 1989, 42 (8): 23
- [8] Laughlin R B. *Phys. Rev. B*, 1981, 23: 5632
- [9] Halperin B I. *Phys. Rev. B*, 1982, 25: 2185
- [10] Thouless D J, Kohmoto M, Nightingale M P *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 1982, 49: 405
- [11] Haldane F D M. *Phys. Rev. Lett.*, 1988, 61: 2015
- [12] Hatsugai Y. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, 71: 3697
- [13] Chang C Z, Zhang J S, Feng X *et al.* *Science*, 2013, 340: 167
- [14] Kane C L, Mele E J. *Phys. Rev. Lett.*, 2005, 95: 146802; Kane C L, Mele E J. *Phys. Rev. Lett.*, 2005, 95: 226801
- [15] Niu Q, Thouless D J, Wu Y S. *Phys. Rev. B*, 1985, 31: 3372
- [16] Niu Q, Thouless D J. *Phys. Rev. B*, 1987, 35: 2188
- [17] Tsui D C, Stormer H L, Gossard A C. *Phys. Rev. Lett.*, 1982, 48: 1559
- [18] Tao R, Wu Y S. *Phys. Rev. B*, 1984, 30: 1097
- [19] Su W P. *Phys. Rev. B*, 1984, 30: 1069
- [20] Haldane F D M, Rezayi E H. *Phys. Rev. Lett.*, 1985, 54: 237
- [21] Wen X G, Niu Q. *Phys. Rev. B*, 1990, 41: 9377
- [22] Park H, Cai J Q, Anderson E *et al.* *Nature*, 2023, 622: 74; Xu F, Sun Z, Jia T T *et al.* *Phys. Rev. X*, 2023, 13: 031037; Lu Z G, Han T H, Yao Y X *et al.* *Nature*, 2024, 626: 759
- [23] Laughlin R B. *Phys. Rev. B*, 1981, 23: 5632
- [24] Thouless D J. *Phys. Rev. B*, 1983, 27: 6083
- [25] Nakajima S, Tomita T, Taie S *et al.* *Nature Phys.*, 2016, 12: 296
- [26] Lohse M, Schweizer C, Zilberberg O *et al.* *Nature Phys.*, 2016, 12: 350
- [27] Lu H, Schemmer M, Aycock L *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 2016, 116: 200402
- [28] Niu Q. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, 64: 1812; Niu Q, Thouless D J. *J. Phys. A*, 1984, 17: 2453
- [29] Liu C, Niu Q. *Phys. Rev. B*, 1993, 47: 13031(R)
- [30] Talyanskii V I, Shilton J M, Pepper M *et al.* *Phys. Rev. B*, 1997, 56: 15180
- [31] Giblin S P, Yamahata G, Fujiwara A *et al.* *Metrologia*, 2023, 60: 055001
- [32] Quinn T J. *Metrologia*, 1989, 26: 69
- [33] Niu Q. *Phys. Rev. B*, 1994, 49: 13554
- [34] Wannier G H. *Phys. Status Solid*, 1978, 88: 757
- [35] Zak J. *Phys. Rev. Lett.*, 1989, 62: 2747
- [36] King-Smith R D, Vanderbilt D. *Phys. Rev. B*, 1993, 47: 1651
- [37] Ortiz G, Martin R M. *Phys. Rev. B*, 1994, 49: 14202
- [38] Hofstadter D R. *Phys. Rev. B*, 1976, 14: 2239
- [39] Chang M C, Niu Q. *Phys. Rev. B*, 1996, 53: 7010
- [40] Karplus R, Luttinger J M. *Phys. Rev.*, 1954, 95: 1154
- [41] Chuu C, Chang M C, Niu Q. *Solid State Commun.*, 2010, 150: 533
- [42] Sundaram G, Niu Q. *Phys. Rev. B*, 1999, 59: 14915
- [43] Jungwirth T, Niu Q, MacDonald A H. *Phys. Rev. Lett.*, 2002, 88: 207208
- [44] Smit J. *Physica*, 1955, 21(6-10): 877; Smit J. *Physica*, 1958, 24: 39
- [45] Berger L. *Phys. Rev. B*, 1970, 2: 4559
- [46] Nagaosa N, Sinova J, Onoda S *et al.* *Rev. Mod. Phys.*, 2010, 82: 1539
- [47] Yao Y, Kleinman L, MacDonald A H *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 2004, 92: 037204
- [48] Fang Z, Nagaosa N, Tahakashi K S *et al.* *Science*, 2003, 302: 92
- [49] Wang X J, Yates J R, Souza I *et al.* *Phys. Rev. B*, 2007, 74: 195118
- [50] Xiao D, Shi J, Niu Q. *Phys. Rev. Lett.*, 2005, 95: 137204
- [51] Xiao D, Yao Y G, Fang Z *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 2006, 97: 026603
- [52] Wilczek F, Zee A. *Phys. Rev. Lett.*, 1984, 52: 2111
- [53] Avron J E, Sadun L, Segert J *et al.* *Phys. Rev. Lett.* 1988, 61: 1329
- [54] Murakami S, Nagaosa N, Zhang S C. *Science*, 2003, 301: 1348
- [55] Culcer D, Yao Y, Niu Q. *Phys. Rev. B*, 2005, 72: 085110
- [56] Shindou R, Imura K I. *Nucl. Phys. B*, 2005, 720: 399
- [57] Xiao D, Yao W, Niu Q. *Phys. Rev. Lett.*, 2005, 99: 236809
- [58] Lee J, Mak K F, Shan J. *Nature Nanotechnology*, 2016, 11: 421
- [59] Chang M C, Niu Q. *J. Phys.: Condens. Matter*, 2008, 20: 193202
- [60] Huang K. *Am. J. Phys.*, 1952, 20: 479
- [61] Onsager L. *Philos. Mag.*, 1952, 43: 1006
- [62] Kuratsuji H, Iida S. *Prog. Theor. Phys.*, 1985, 74: 439
- [63] Slater J C. *Phys. Rev.*, 1949, 76: 1592
- [64] Luttinger J M. *Phys. Rev.*, 1951, 84: 814
- [65] Foldy L L, Wouthuysen S A. *Phys. Rev.*, 1950, 78: 29
- [66] Kohn W. *Phys. Rev.*, 1959, 115: 1460
- [67] Roth L M. *J. Phys. Chem. Solids*, 1962, 23: 433
- [68] Blount E I. *Phys. Rev.*, 1962, 126: 1636

读者和编者

## 《物理》有奖征集 封面素材

为充分体现物理科学的独特之美，本刊编辑部欢迎广大读者和作者踊跃投寄与物理学相关的封面素材。要求图片清晰，色泽饱满，富有较强的视觉冲击力和很好的物理科学内涵。

一经选用，均有稿酬并赠阅该年度《物理》杂志。

请将封面素材以附件形式发至：[physics@iphy.ac.cn](mailto:physics@iphy.ac.cn)；联系电话：010-82649029。

《物理》编辑部

# 以经典124 的模拟性能... ... 提供双相锁定

推介SR2124 — 终极模拟锁相放大器

- 具124性能的双相锁定
- 低噪声，全模拟设计
- 带直流偏置的正弦波输出源
- 0.2 Hz 至 200 kHz 范围
- 2.8 nV/√Hz 输入噪声

**我们听到了你的声音。** 多年来研究人员一直恳求我们开发一个类似1960年代PAR124的全模拟仪器。于是我们推出了SR124单相模拟锁定。然后你们又问，“双相版如何？”现在我们很高兴地宣布SR2124双相模拟锁定的到来。

在低温传输测量中，双相至关重要。在这种测量中，相移可能意味着欧姆接触已开始出现问题。而且我们的CPU-停止架构可确保无任何导致样品自热的数字噪声。为便于差分电导测量，我们在正弦输出中添加了直流偏置。我们的低噪声输入确保您快速获得答案。

感谢您的反馈。



请扫描二维码了解更多产品详情

SR2124 双相模拟锁定 ... \$10,010 (全球通价格)



**Stanford Research Systems**

1290-D Reamwood Ave. Sunnyvale, CA 94089 · www.thinkSRS.com

Phone (408) 744-9040 · Fax (408) 744-9049 · info@thinkSRS.com

先锋科技股份有限公司

电话: 86-10-6263-4840

Email: sales@teo.com.cn

欧陆科技有限公司

电话: 86-10-6800-8213/16/17

Email: euro-tech.bj@euro-tech.com

北京东方科泰科技发展有限公司

电话: 86-10-5129-4988

Email: sales@bost-ltd.com