

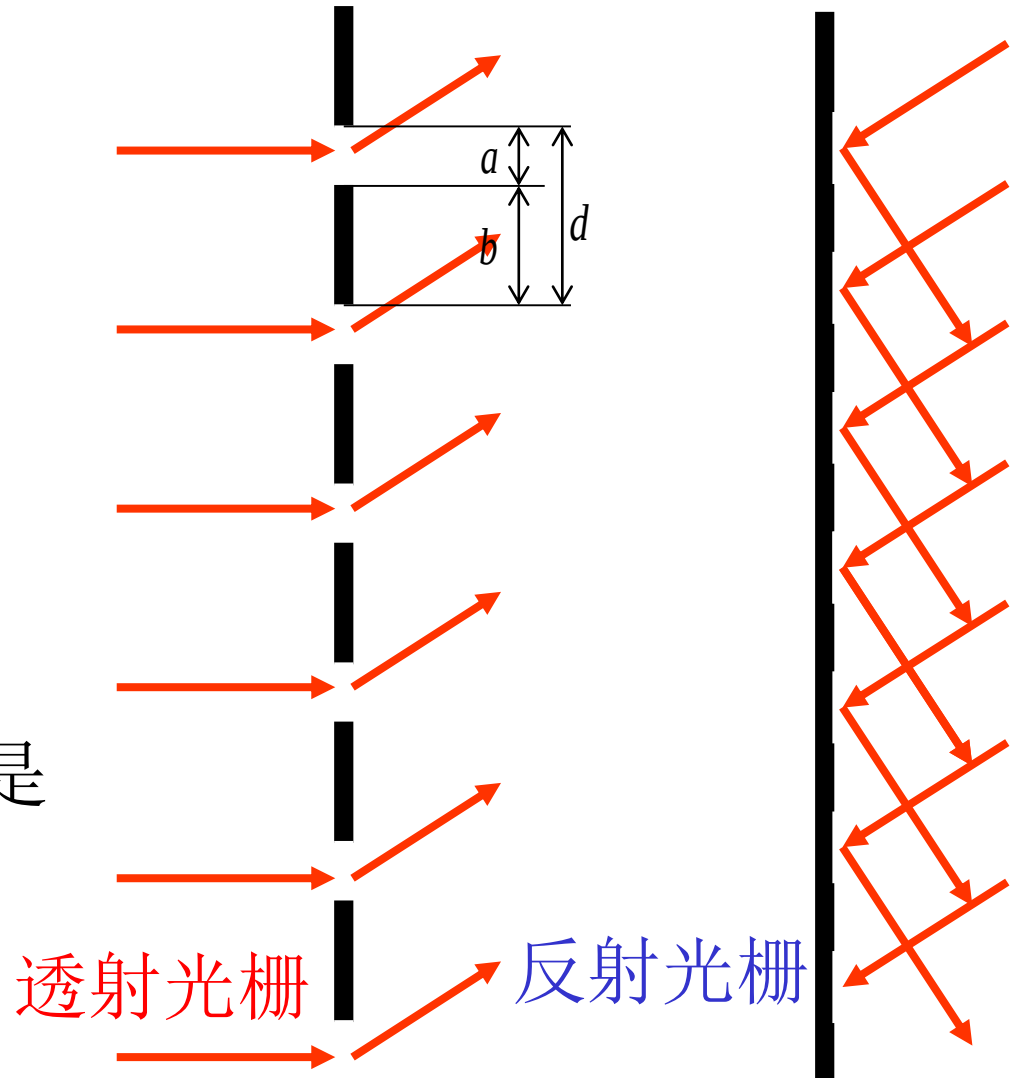
4.4 多缝夫琅和费衍射（光栅衍射）

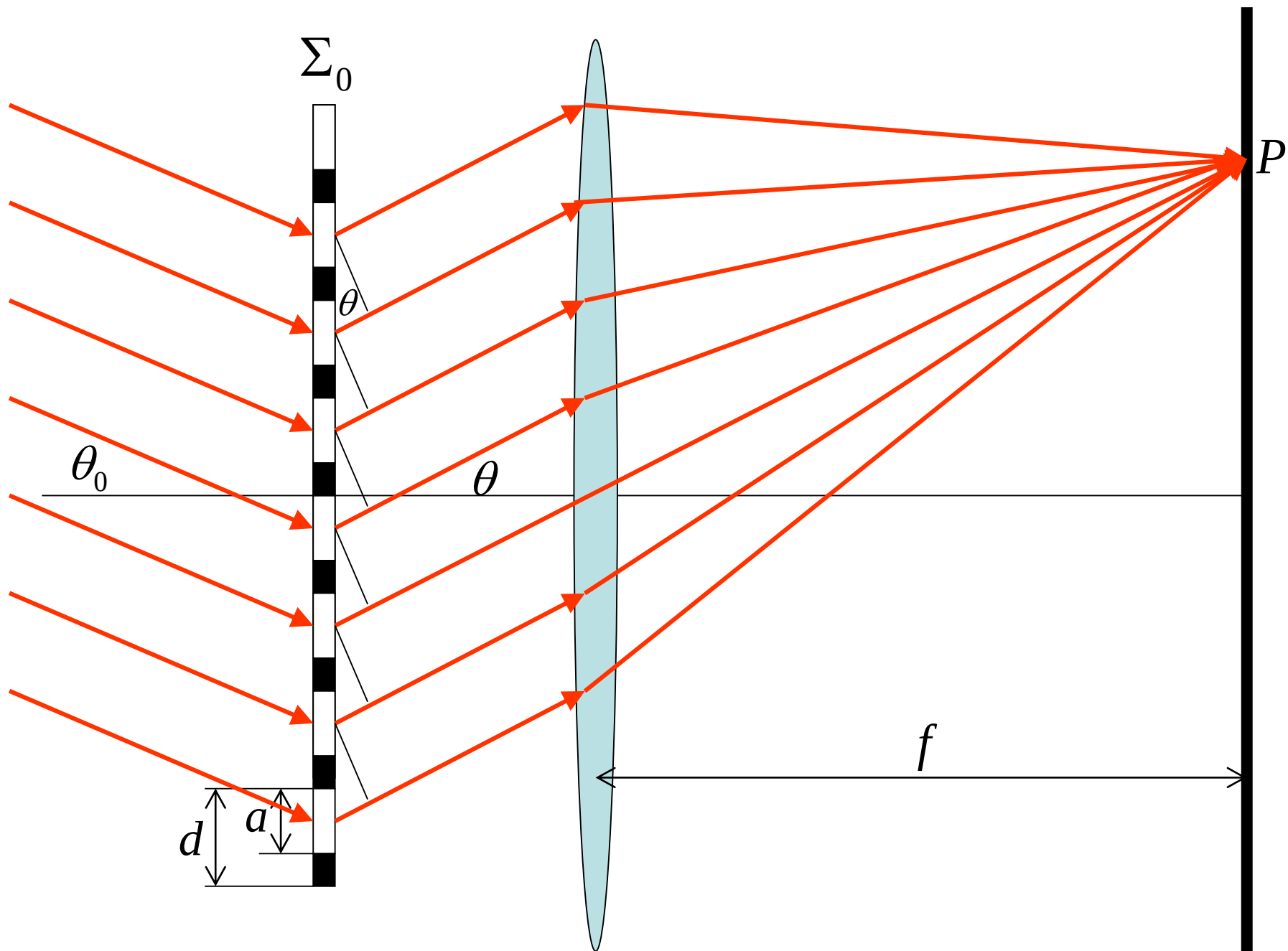
光栅：具有周期性空间结构或光学性能（如透射率和反射率）的衍射屏。

- 可具有反射或透射结构。

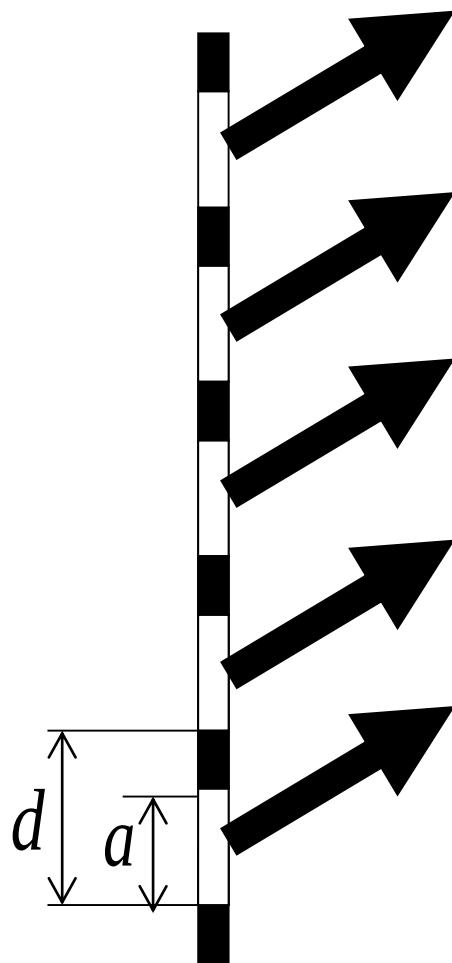
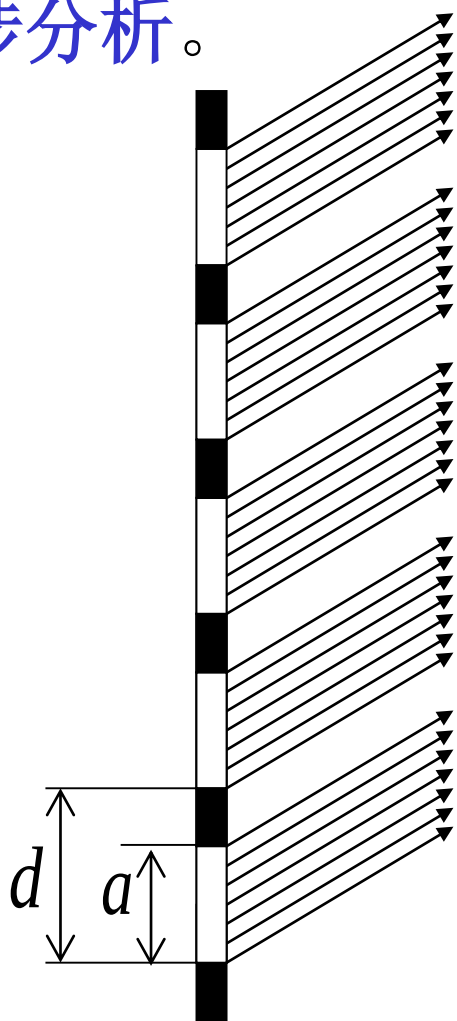
d称为光栅常数

夫琅和费多缝衍射是典型的光栅衍射。





- 经过光栅的所有光波，进行相干叠加。
- 光栅的每一个单元，是次波的叠加，按衍射分析；
- 不同的单元之间，是分立的衍射波之间的叠加，按干涉分析。



光栅衍射的实质：

多束衍射光之间的相干叠加。

4.4.1 衍射强度分布

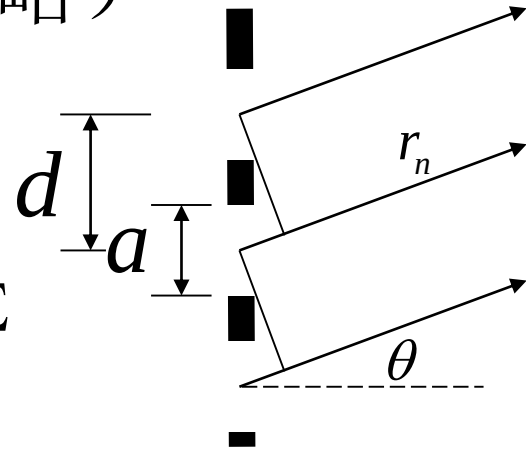
衍射积分求解（振幅矢量法略）

- 满足近轴条件 $F(\theta_0, \theta) = 1$

$$\tilde{E}(P) = K \iint_{\Sigma} \tilde{E}_0(Q) F(\theta_0, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma$$

$$= K \tilde{E}_0(Q) \frac{1}{r_0} \iint_{\Sigma_0} e^{ikr} d\Sigma$$

$$= K \tilde{E}_0(Q) \frac{1}{r_0} \sum_{n=1}^N \left[\int_{\Sigma_n} e^{ikr_n} d\Sigma_n \right]$$

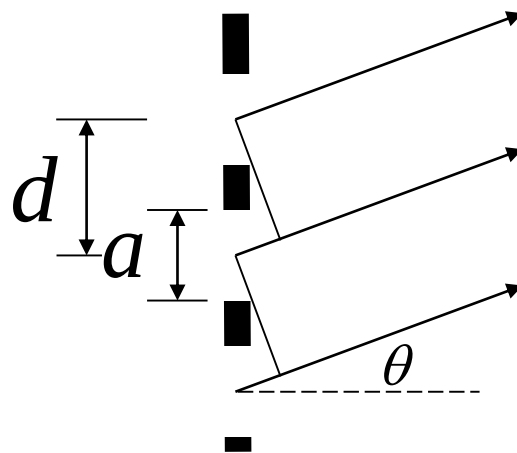


不透光部分 $\tilde{E}_0(Q) = 0$

若各缝彼此不相干，接收屏上花样分布与单缝一样，各缝强度直接相加。

若各缝彼此相干，则空间某点的总振幅为所有缝在该场点处的复振幅的相干叠加。

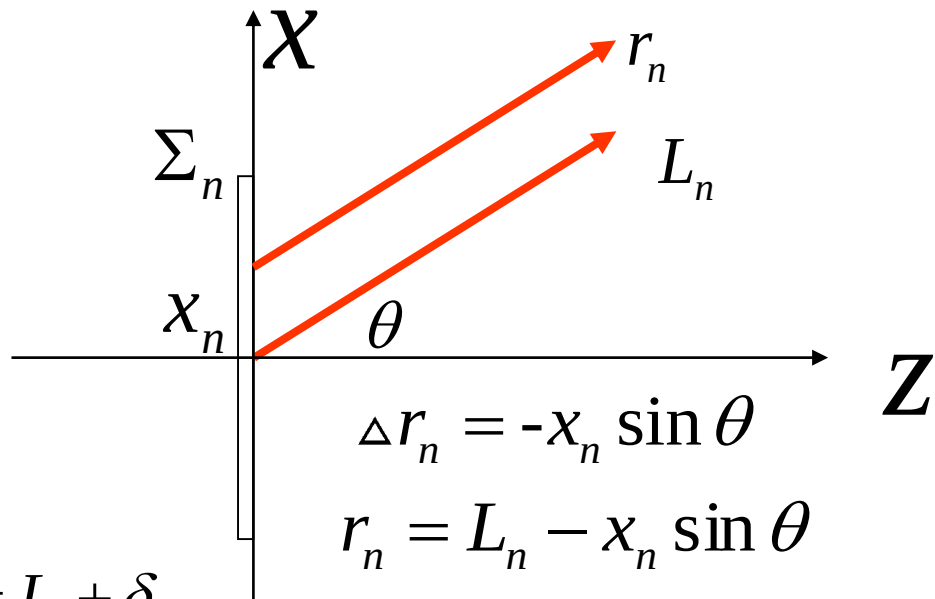
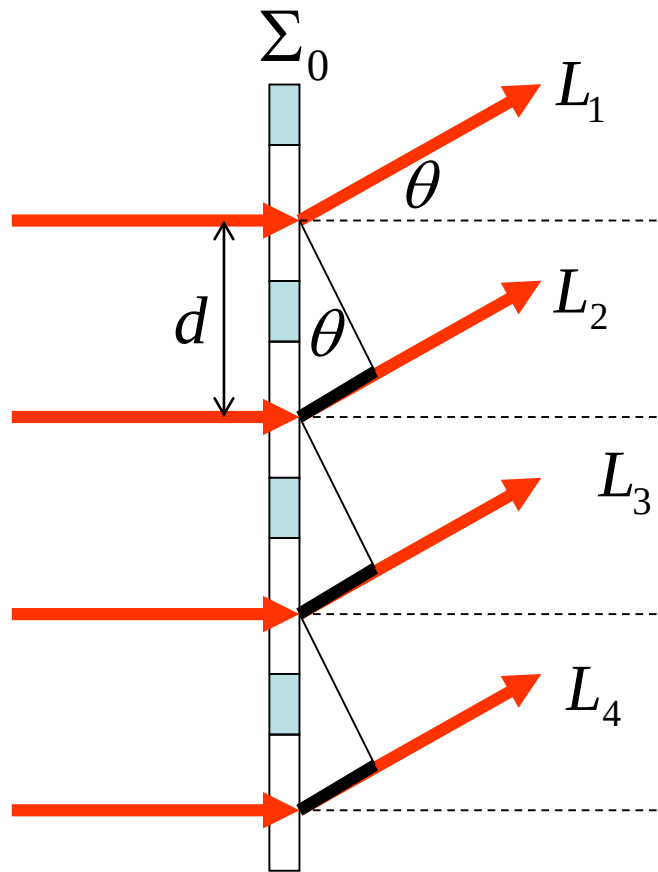
$$\tilde{E}(P) = K\tilde{E}_0(Q) \frac{1}{r_0} \sum_{n=1}^N \left[\int_{\Sigma_n} e^{ikr_n} d\Sigma_n \right]$$



物理过程：

1. 每一个狭缝的光在场点的衍射，
即求单缝衍射复振幅；
2. 各个狭缝的衍射光在场点的复振幅
再进行干涉。

先处理每个单元的衍射，再处理所有单元间的干涉。



$$L_2 = L_1 + \delta$$

$$L_3 = L_2 + \delta \quad \delta = d \sin \theta$$

$$L_n = L_1 + (n-1)\delta$$

$$\tilde{E}(P) = K\tilde{E}_0(Q) \frac{1}{r_0} \sum_{n=1}^N \left[\int_{\Sigma_n} e^{ikr_n} d\Sigma_n \right] = K\tilde{E}_0(Q) \frac{1}{r_0} \sum_{n=1}^N \left[\int_{-a/2}^{a/2} e^{ik(L_n - x_n \sin \theta)} dx_n \right]$$

$$= K\tilde{E}_0(Q) \frac{1}{r_0} \sum_{n=1}^N e^{ikL_n} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-ikx_n \sin \theta} dx_n = \left[K \frac{\tilde{E}_0(Q)}{r_0} a \frac{\sin u}{u} \right] \sum_{n=1}^N e^{ikL_n}$$

$$\tilde{E}(\theta) = K \frac{\tilde{E}_0(Q)}{r_0} a \frac{\sin u}{u}$$

单缝衍射的复振幅
对每个缝都一样

$$\tilde{N}(\theta) = \sum_{n=1}^N e^{ikL_n}$$

多缝间的干涉

$$L_n = L_1 + (n-1)\delta$$

$$\delta = d \sin \theta$$

$$= \sum_{n=1}^N e^{ik[L_1 + (n-1)d \sin \theta]} = e^{ikL_1} \sum_{n=1}^N e^{ik(n-1)d \sin \theta} = e^{ikL_1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i2n\beta}$$

$$(\beta = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta)$$

$$= e^{ikL_1} \frac{1 - e^{2iN\beta}}{1 - e^{2i\beta}} = e^{ikL_1} \frac{e^{iN\beta}}{e^{i\beta}} \frac{e^{-iN\beta} - e^{iN\beta}}{e^{-i\beta} - e^{i\beta}}$$

$$= e^{ikL_1} e^{i(N-1)\beta} \frac{\sin(N\beta)}{\sin \beta} = e^{ikL_1} e^{i(N-1)\beta} N(\theta)$$

$$N(\theta) = \frac{\sin(N\beta)}{\sin \beta}$$

N元干涉因子

光栅衍射的复振幅与强度:

$$\tilde{E}(P) = \tilde{E}(\theta)\tilde{N}(\theta) = K\tilde{E}_0(Q)a \frac{e^{ikL_1}}{r_0} e^{i(N-1)\beta} \frac{\sin u}{u} \frac{\sin N\beta}{\sin \beta}$$

$$I(P) = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2$$

$$I_0 = \left| a \frac{K\tilde{E}_0(Q)}{r_0} \right|^2$$

单个狭缝在像方焦点处的光强
(0级光强, 几何像点)

$$\left(\frac{\sin u}{u} \right)^2$$

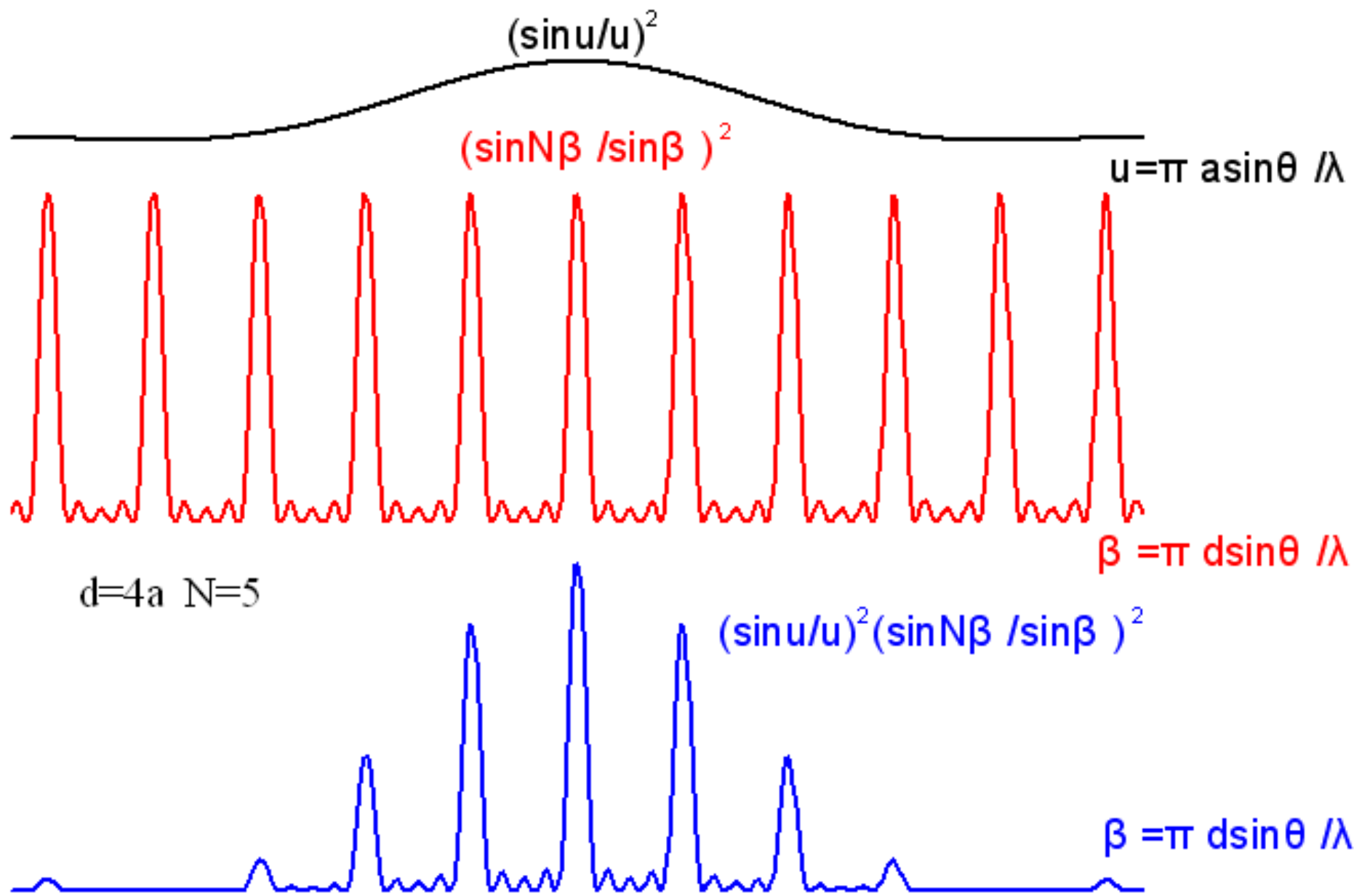
单缝衍射因子

$$u = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta$$

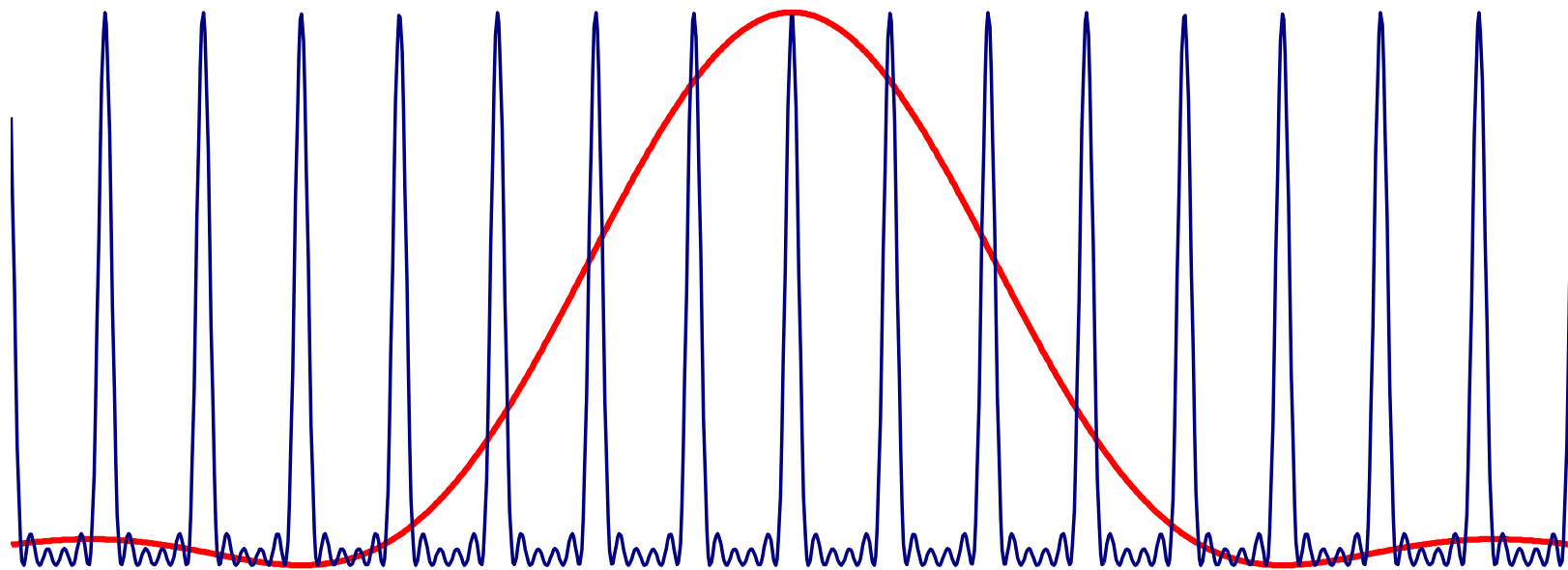
$$\left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2$$

缝间干涉因子

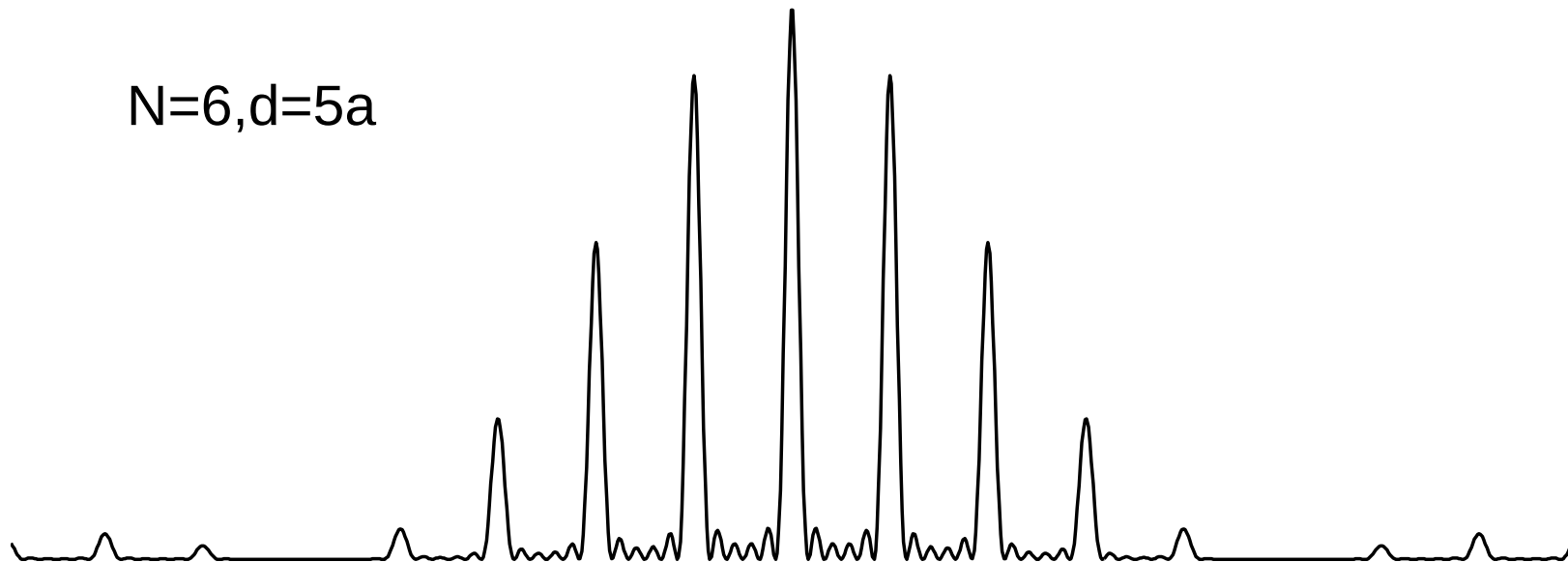
$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta$$



单元衍射与N元干涉曲线周期之比为 d/a

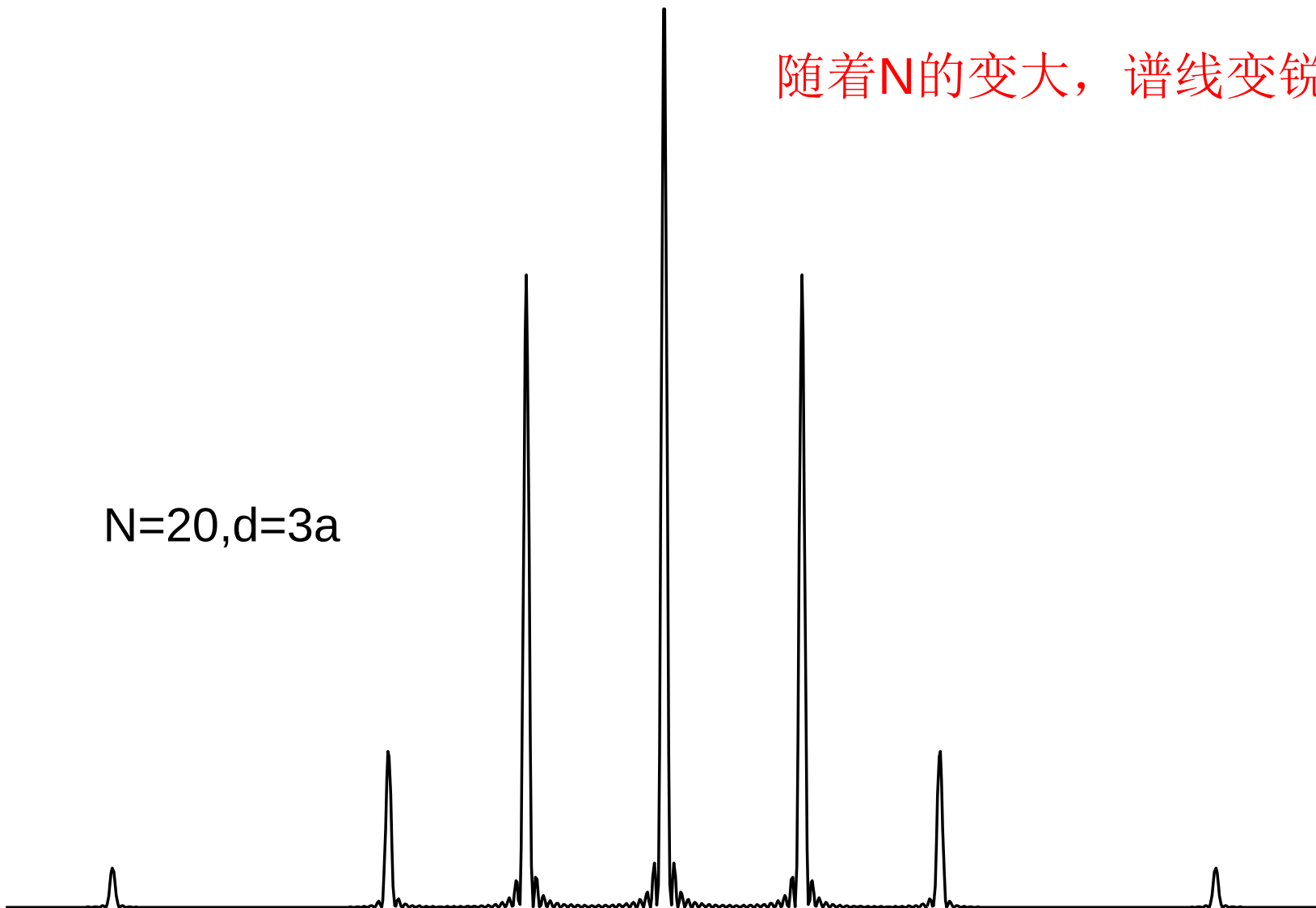


$N=6, d=5a$



随着N的变大，谱线变锐

$N=20, d=3a$



4.4.2 双缝衍射, $N=2$

$$I(P) = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2,$$

$$I(P) = 4I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2} \cos^2 \beta$$
$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta$$

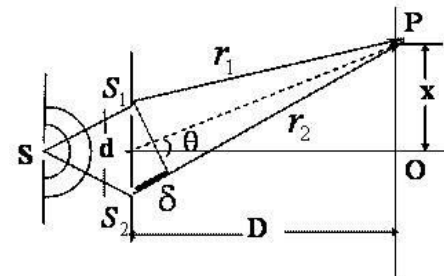
- 而杨氏干涉为

$$I = 2I_0 [1 + \cos(\Delta\varphi)]$$

$$I_1 = I_2 = I_0$$

$$= 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta \right) \right]$$

$$\sin \theta = \frac{x}{D}$$



$$= 2I_0 (1 + \cos 2\beta) = 4I_0 \cos^2 \beta$$

当 $a \ll \lambda$ 时, $u = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta = 0$ $\frac{\sin u}{u} = 1$ 两者相等

杨氏干涉中, 狭缝足够细, 每一缝只有一个次波中心。此时没有单缝衍射。

4.4.3 衍射花样的特点

1. 衍射极大值位置

$$I(P) = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2$$

(1) 主极大由 $N(\theta)$ 决定

$$\text{极大值 } \beta = j\pi, \quad N(\theta) = \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} = N,$$

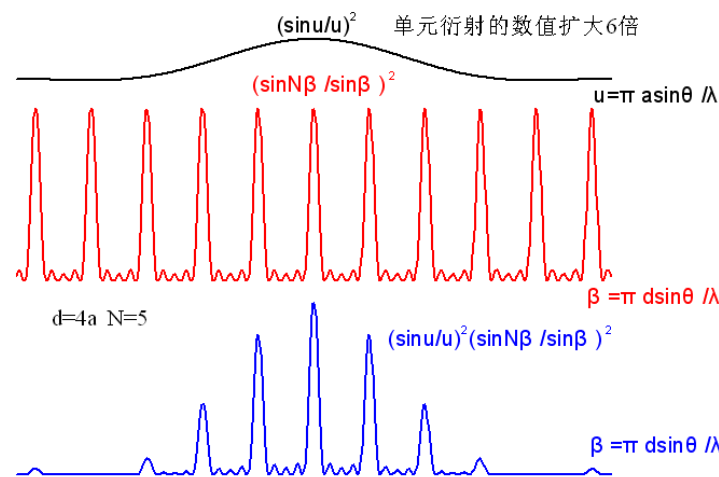
$$I(j\pi) = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 N^2$$

(2) 对应一系列的亮条纹（光谱线） $\beta = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta$

$$d \sin \theta = j\lambda \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad j: \text{谱线级数}$$

光谱线位置与N无关，与衍射因子无关，谱线强度与 N^2 成正比

(3) 谱线强度受衍射因子调制。



单缝衍射光强的 N^2 倍

2. 极小值位置

(1)衍射因子极小值 $\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 = 0 \quad u = n\pi, u \neq 0$

$$u = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} \quad a \sin \theta = n\lambda \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

(2)干涉因子极小值 $\left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta}\right)^2 = 0, \quad N\beta = m\pi, \beta \neq j\pi$

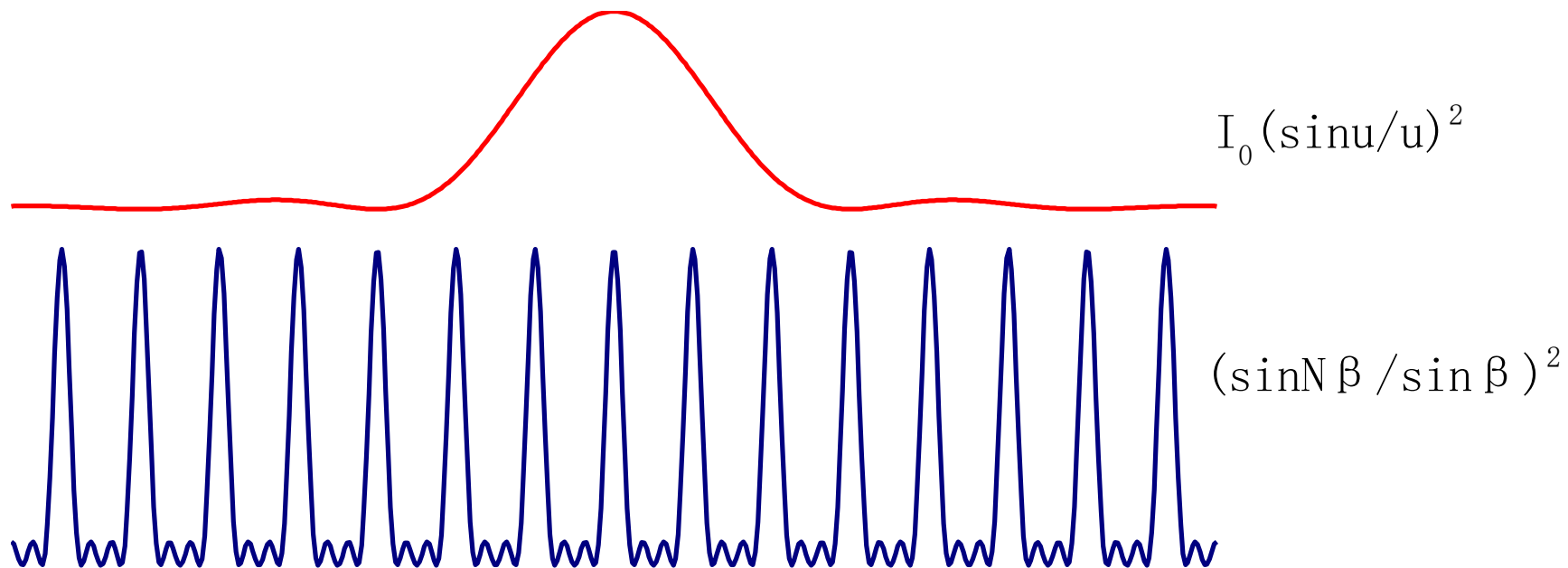
$$d \sin \theta = m\lambda / N, \text{ 且 } d \sin \theta \neq j\lambda$$

极小值出现在以下位置

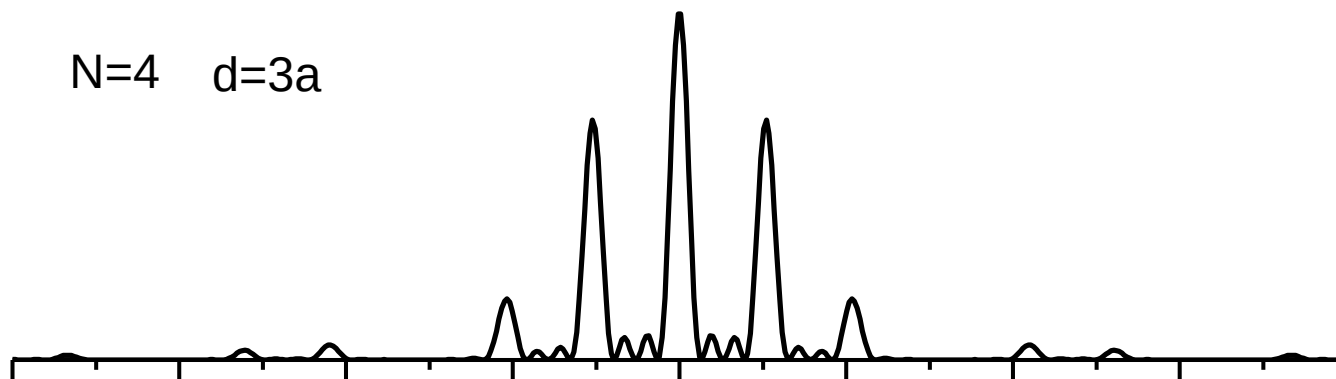
$$\sin \theta = [0], \lambda / Nd, \dots (N-1)\lambda / Nd, [\lambda / d],$$

$$(N+1)\lambda / Nd, (N+2)\lambda / Nd, \dots (2N-1)\lambda / Nd, [2\lambda / d], \dots$$

两主极大值之间有N-1个最小值，N-2个次极大值。



$N=4$ $d=3a$



$$u = \pi a \sin \theta / \lambda$$

3. 谱线的缺级

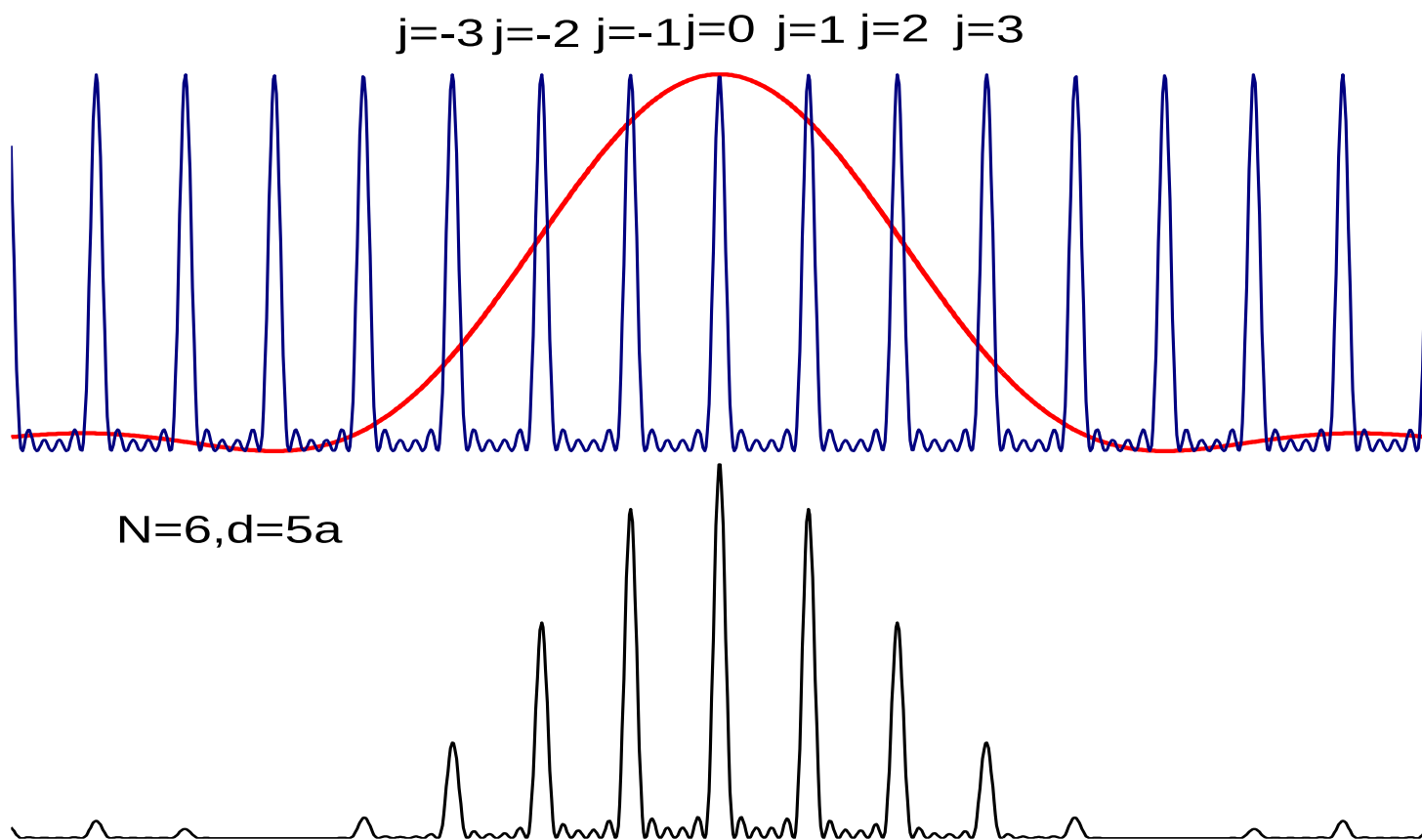
$$I(P) = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2$$

当干涉的极大值与衍射的极小值重合时，出现缺级

干涉极大位置 $\sin\theta = j \lambda/d$

衍射极小位置 $\sin\theta = n \lambda/a$

$j/d = n/a$ ，即 $j = nd/a$ 。谱线级数缺失。



对于实用的衍射光栅，只有主极大的前几个衍射级是可用的；其它级的主极大和次极大完全可以忽略。

4.4.4 光栅方程

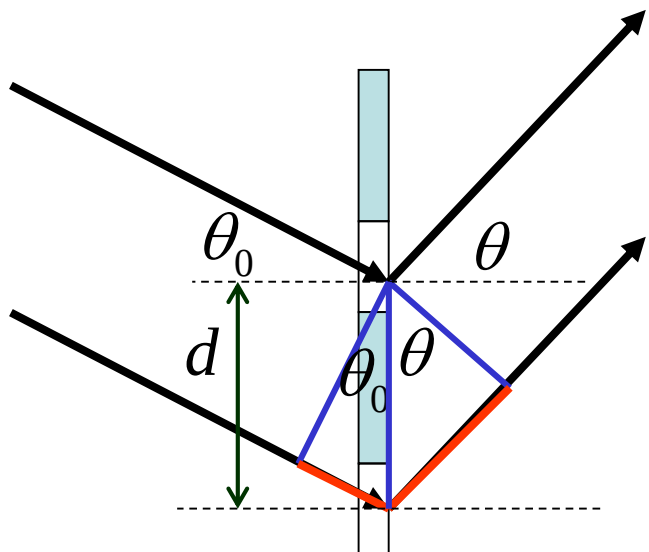
- 光栅光谱由N元干涉因子，即缝间干涉因子决定。
 $\beta = \pi d \sin \theta / \lambda = j\pi$ 对应 j 级光谱。
- 平行光正入射时，衍射光干涉主极大的位置由方程 $\sin \theta = j\lambda / d$ ，即 $d \sin \theta = j\lambda$ 确定。

光栅方程：

$$d \sin \theta = j\lambda, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$|\sin \theta| < 1, j < d / \lambda$$

- 如果入射光与光栅不垂直，则必须计算入射光的光程差。



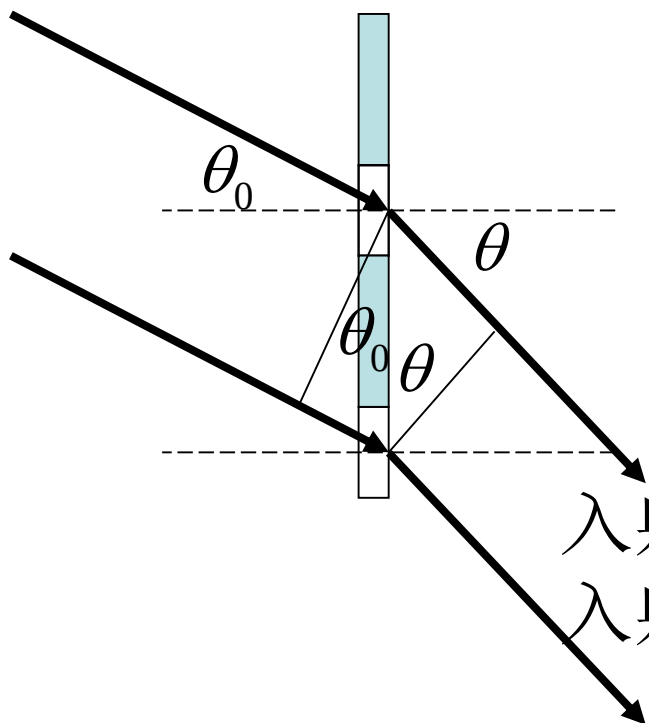
相邻单元间总的光程差

$$\Delta = d(\sin \theta \pm \sin \theta_0)$$

N元干涉因子取得主极大的条件

$$\Delta = d(\sin \theta \pm \sin \theta_0) = j\lambda$$

$$j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



光栅方程为

$$d(\sin \theta \pm \sin \theta_0) = j\lambda$$

入射光与衍射光在光栅法线同侧，取+；
入射光与衍射光在光栅法线异侧，取-。

4.4.5 光栅光谱的角宽度和色分辨本领

1. 谱线的半角宽度（角半宽）

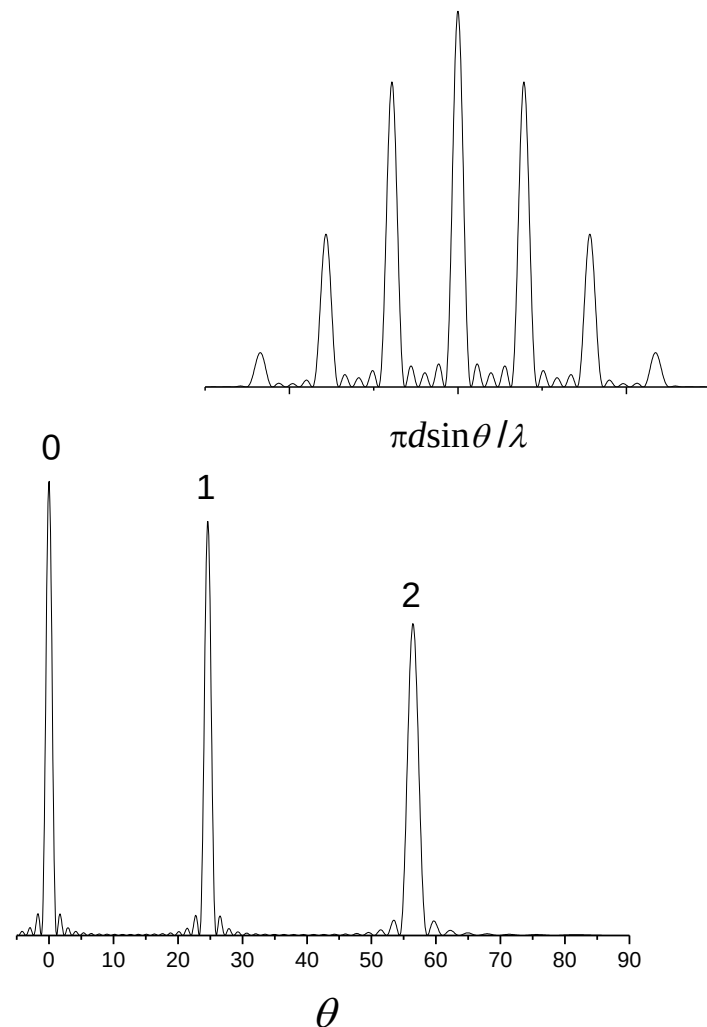
极大值到相邻极小值的角距离

$$\begin{cases} d \sin \theta = j\lambda, \\ d \sin(\theta \pm \Delta\theta) = j\lambda \pm \frac{1}{N} \lambda \end{cases}$$

$$d \cos \theta \Delta\theta = \frac{1}{N} \lambda$$

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta} = \frac{\lambda}{L \cos \theta} \quad \text{与} j \text{ 无关}$$

$$L = Nd \quad \text{光栅的有效宽度}$$



2. 光栅的色分辨本领

非单色光入射时，除零级条纹外，各级主极大的位置不同

波长相差 $\delta\lambda$ 的同一级光谱在空间分开的角距离 $\delta\theta$

$$d \sin \theta = j\lambda \Rightarrow d \cos \theta \delta\theta = j\delta\lambda \quad \delta\theta = j \frac{\delta\lambda}{d \cos \theta}$$

色散本领 $D_\theta = \frac{\delta\theta}{\delta\lambda} = \frac{j}{d \cos \theta}$

由Rayleigh判据， $\delta\theta = \Delta\theta$ 为可以分辨的极限。

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta} = j \frac{\delta\lambda}{d \cos \theta} = \delta\theta$$

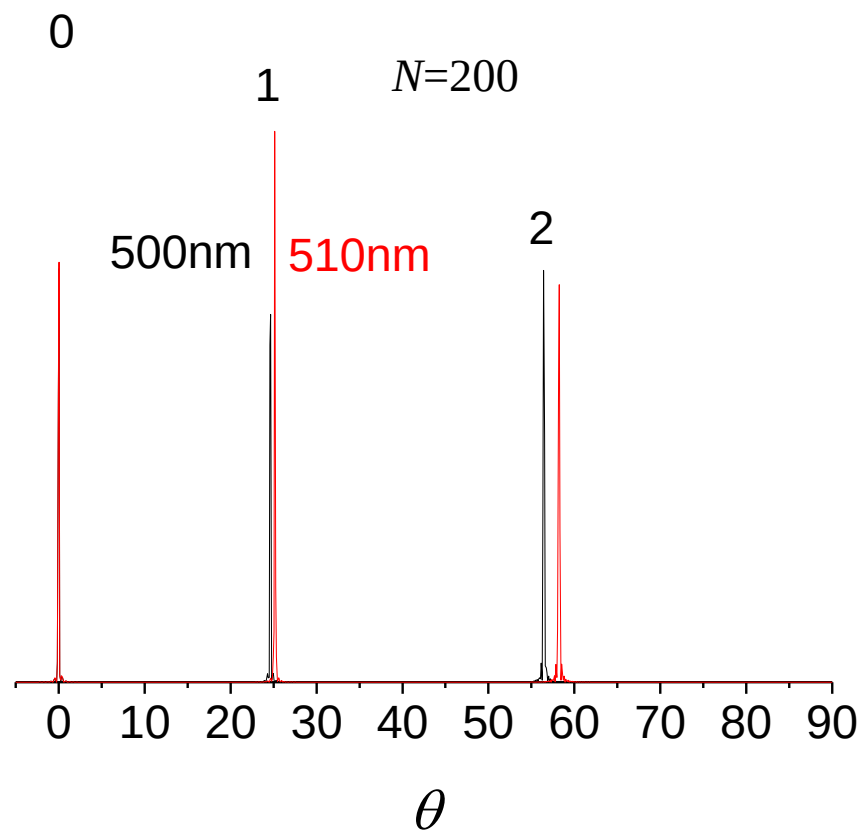
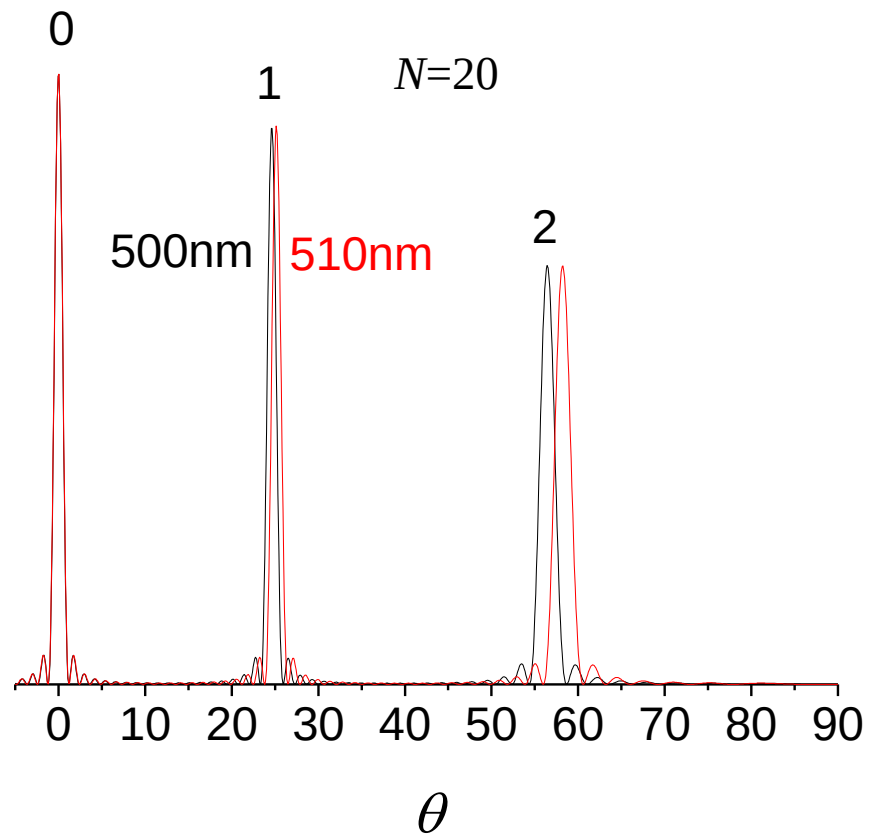
$$\Rightarrow \delta\lambda = \frac{\lambda}{jN}$$

可分辨的最小波长间隔

$$A = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = jN$$

色分辨本领

光栅的分辨本领



光栅光谱和色散问题

- $\theta = \theta(\lambda)$ 不同波长的光在空间分开称为色散，
光栅具有色散能力。

$d\theta / d\lambda$ 角色散率，色散本领,光栅的分光能力。

光栅方程

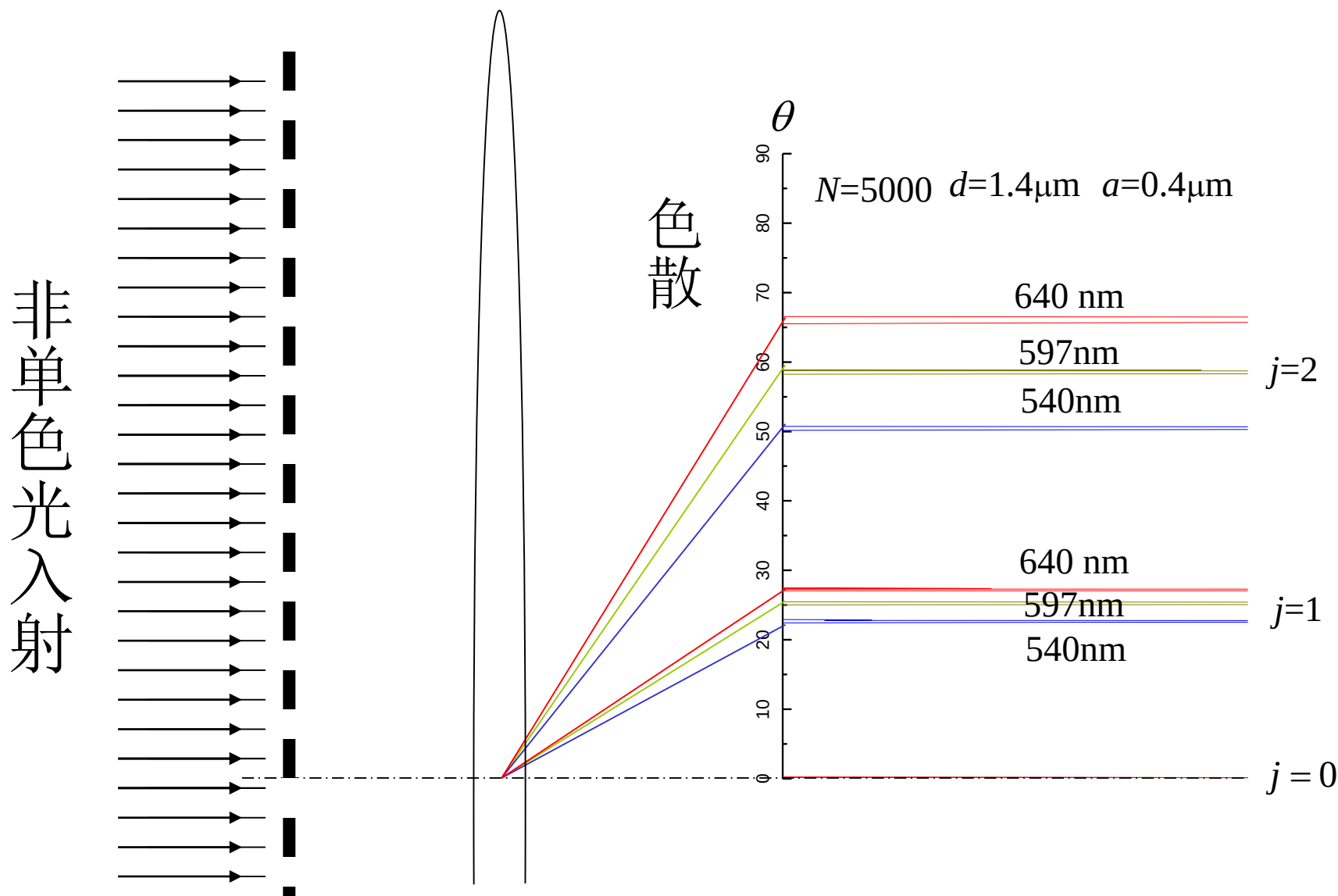
$$d \sin \theta = j\lambda \implies d\theta / d\lambda = j / d \cos \theta$$

$j = 0, d\theta / d\lambda = 0$ 零级光谱无色散。

$fd\theta / d\lambda = dl / d\lambda$ 线色散率，谱线在焦平面上的距离。

θ 很小时 $d\theta / d\lambda = j / d$ 同一级谱线有相同的色散率。
角色散率与N无关。

光谱线在空间的角分布



本章小结

光的衍射的理论基础： 惠更斯—菲涅耳原理

核心内容： 无数次波的相干叠加

菲涅耳衍射公式

$$\tilde{E}(P) = \oiint_{\Sigma} d\tilde{E}(P) = \oiint_{\Sigma} KF(\theta_0, \theta) \tilde{E}_0(Q) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma$$

菲涅耳-基尔霍夫衍射公式

$$\tilde{E}_a(P) = K \iint_{\Sigma_a} \tilde{E}_0(Q) F(\theta_0, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma$$

衍射

菲涅耳衍射
(近场衍射)

半波带法

中心轴上的点:

$$\tilde{E}(P) = \frac{1}{2} [A_1 + (-1)^{n-1} A_n] \quad \begin{array}{l} n \text{ 奇数, 亮纹} \\ n \text{ 偶数, 暗纹} \end{array}$$

半波带方程: $\frac{1}{r_0} + \frac{1}{R} = \frac{1}{\rho^2 / n\lambda}$

波带片

夫琅和费衍射

(远场衍射)

$$I = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \quad u = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$$

衍射花样

中央主极大 $\rightarrow$ 几何像点

极小值点 $a \sin \theta = j\lambda, j = \pm 1, \pm 2, \dots$

中央亮纹半角宽 $\Delta\theta = \frac{\lambda}{a}$

圆孔衍射

瑞利判据

$$\delta\theta_m = \Delta\theta_0$$

光栅衍射

实质：多束衍射光之间的干涉。 $\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ 衍射} \\ 2. \text{ 干涉} \end{array} \right.$

$$I = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2 \quad u = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}, \beta = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}$$

$\swarrow$ $\searrow$
衍射因子 干涉因子

衍射花样 $\left\{ \begin{array}{l} \text{主极大} \quad d \sin \theta = j\lambda, j = 0, \pm 1, \dots \\ \text{极小值} \quad \left\{ \begin{array}{l} a \sin \theta = n\lambda, n = \pm 1, \pm 2, \dots \\ d \sin \theta = \frac{m\lambda}{N}, m = 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots \end{array} \right. \\ \text{谱线缺级} \quad j = \frac{nd}{a} \end{array} \right.$

光栅方程

$$d \sin \theta = j\lambda, \text{ 或 } d(\sin \theta \pm \sin \theta_0) = j\lambda, j = 0, \pm 1 \dots$$

正入射

斜入射

谱线的半角宽度

$$\Delta \theta = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta}$$

非单色光的同级色散角

$$\delta \theta = \frac{j \delta \lambda}{d \cos \theta}$$

光栅色散本领

$$D_\theta = \frac{\delta \theta}{\delta \lambda} = \frac{j}{d \cos \theta}$$

瑞利判据

$$\delta \theta = \Delta \theta$$

最小可分辨波长间隔

$$\delta \lambda = \frac{\lambda}{jN}$$

色分辨本领

$$A = \frac{\lambda}{\delta \lambda} = jN$$