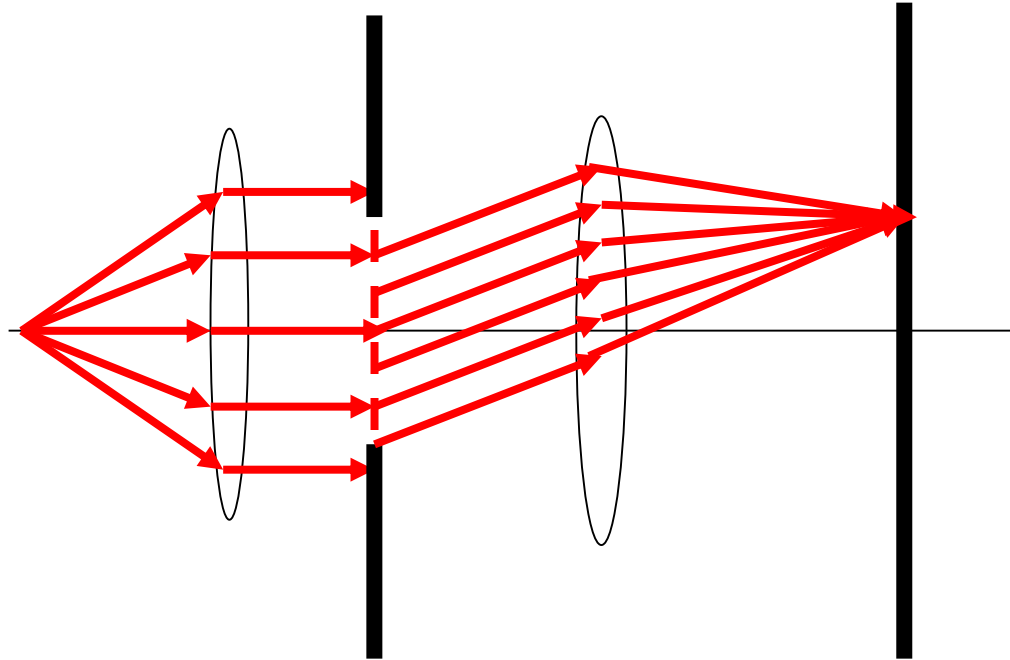


4.3 夫琅和费衍射

4.3.1 夫琅和费衍射装置

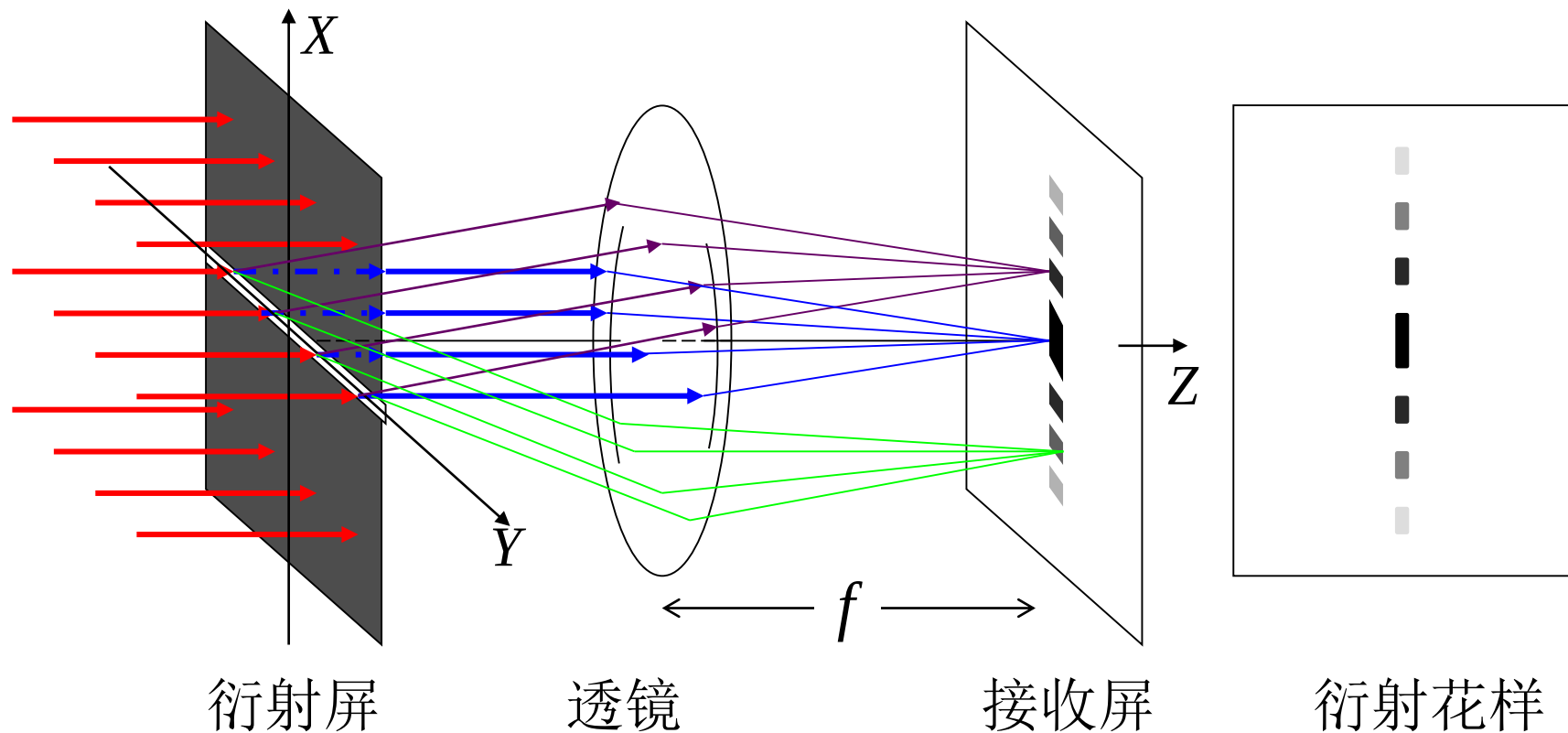


- 平行光出射相当于各点发出的次波汇聚于无穷远处。即是平行光的相干叠加。
- 平行光入射，用凸透镜成象于像方焦平面。

4.3.2 夫琅和费单缝衍射

1. 衍射装置

- 在焦平面上汇聚（相遇）的光，是从狭缝发出的相互平行的次波



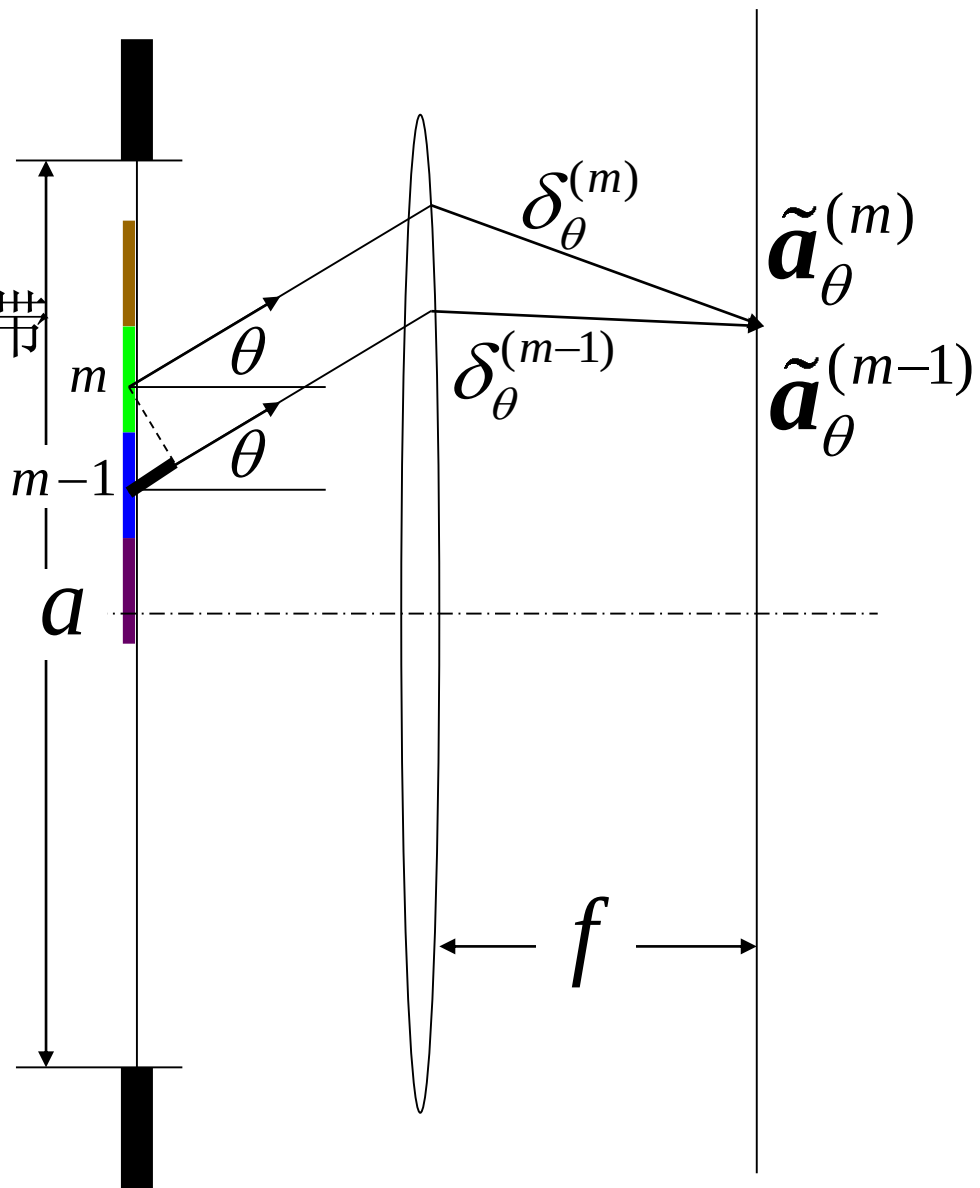
2. 衍射花样

3. 衍射强度的分布

按衍射问题三步骤

1) 振幅矢量法 (略)

- 将缝(波前)等分为 N 个窄带
- 每个面元宽度为 a/N
- $\tilde{\mathbf{a}}_{\theta}^{(m)}$: 第 m 个面元发出的次波的复振幅
- m 个面元发出的次波在场点相干叠加。



2) 积分方法

$$\tilde{E}(P) = K \iint_{\Sigma_0} \tilde{E}_0(Q) F(\theta_0, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma$$

- 瞳函数为常数
- $P(\theta)$ 点的次波来自同一方向，倾斜因子相同。
- 不同方向的光，满足近轴条件，倾斜因子为常数1。

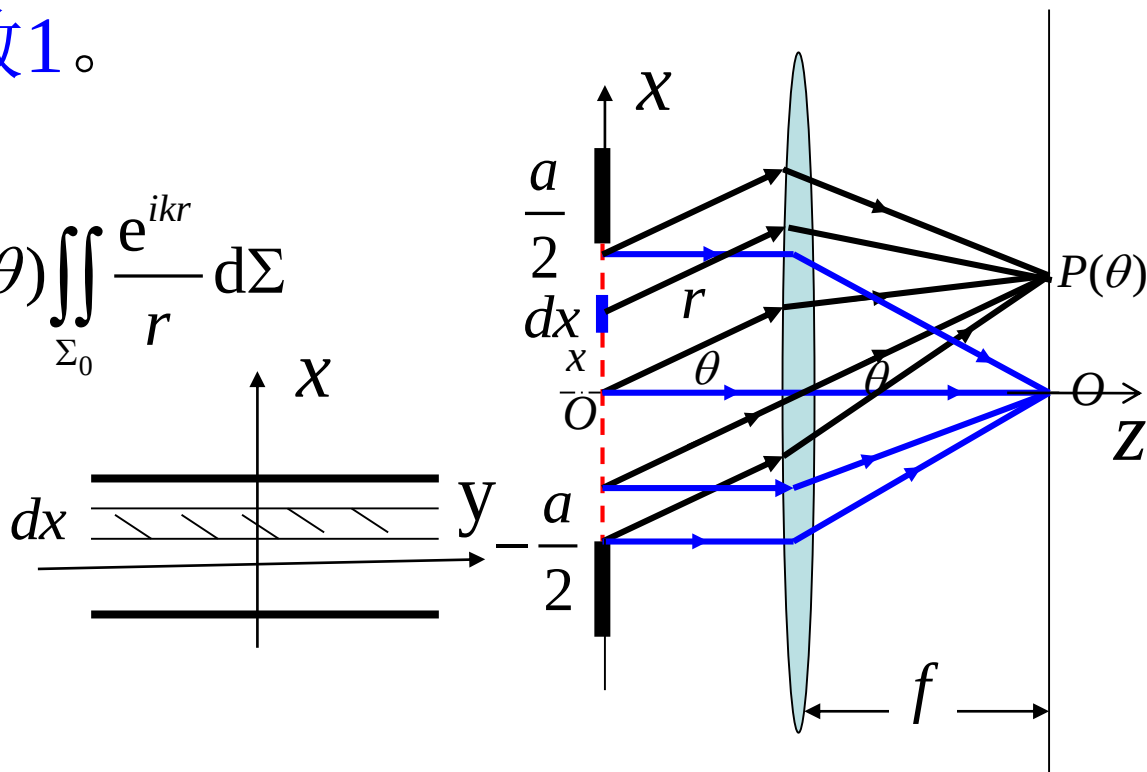
积分简化:

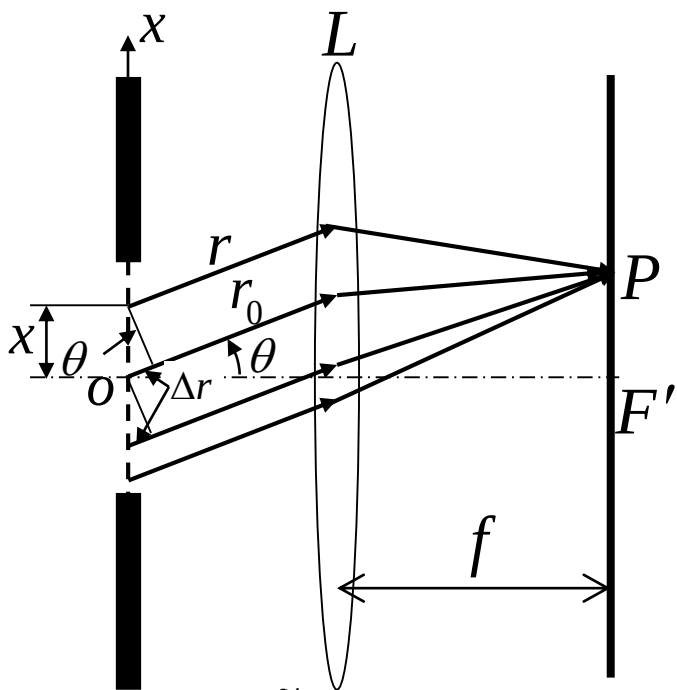
$$\tilde{E}(P) = K \tilde{E}_0(Q) F(\theta_0, \theta) \iint_{\Sigma_0} \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma$$

$$= K \tilde{E}_0(Q) \int_{-a/2}^{a/2} \frac{e^{ikr}}{r} dx$$

$$F(\theta_0, \theta) = 1$$

$$d\Sigma = y_0 dx = dx, \text{ 令 } y_0 = 1$$





$$\tilde{E}(P) = K\tilde{E}_0(Q) \int_{-a/2}^{a/2} \frac{e^{ikr}}{r} dx = \frac{\tilde{K}_0}{r_0} \int_{-a/2}^{a/2} e^{ikr} dx$$

$$F(\theta_0, \theta) = 1 \quad \tilde{K}_0 = K\tilde{E}_0(Q)$$

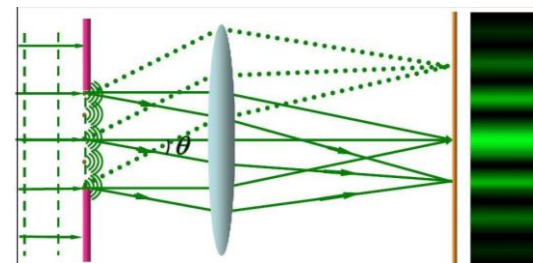
$$r = r(x) = ? \quad r = r_0 + \Delta r = r_0 - x \sin \theta$$

$$\Delta r = -x \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}(P) &= \frac{\tilde{K}_0}{r_0} e^{ikr_0} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-ikx \sin \theta} dx = \frac{\tilde{K}_0 e^{ikr_0}}{r_0} \frac{1}{-ik \sin \theta} \left[e^{-ik \frac{a}{2} \sin \theta} - e^{ik \frac{a}{2} \sin \theta} \right] \\ &= \frac{\tilde{K}_0 e^{ikr_0}}{r_0} \frac{-2i \sin(\frac{ka}{2} \sin \theta)}{-ik \sin \theta} = aK\tilde{E}_0(Q) \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \frac{\sin(\frac{1}{2} ka \sin \theta)}{\frac{1}{2} ka \sin \theta} = \tilde{E}_0 \frac{\sin u}{u} \end{aligned}$$

$$(\tilde{E}_0 = aK\tilde{E}_0(Q) \frac{e^{ikr_0}}{r_0}, \quad u = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda})$$

$$\tilde{E}(P) = aK\tilde{E}_0(Q) \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \frac{\sin(\frac{1}{2}ka \sin \theta)}{\frac{1}{2}ka \sin \theta} = \tilde{E}_0 \frac{\sin u}{u}$$



分析:

$$(1) \quad K\tilde{E}_0(Q) \frac{e^{ikr_0}}{r_0}$$

狭缝上Q点发出的次波在中心一几何像点所引起的复振幅

$$(2) \quad \tilde{E}_0 = ay_0 K\tilde{E}_0(Q) \frac{e^{ikr_0}}{r_0}$$

$y_0 = 1$

通过整个狭缝的次波在几何像点的复振幅

(所有次波沿光轴传播, 同位相)

$$(3) \quad I_0 = \tilde{E}_0 \tilde{E}_0^*$$

几何像点处的光强

$P(\theta)$ 点强度分布 $I(P) = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2}$ $u = \frac{1}{2}ka \sin \theta = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta$

$$\frac{\sin u}{u}$$

称作单缝 (单元) 衍射因子

4. 衍射花样的特点

$$I(P) = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2} \quad \left(u = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}\right)$$

1) 中央主极大的位置

$$\theta = 0 \quad \Delta\varphi = 0$$

叠加的次波位相差为零，振动方向相同，振动叠加互相加强，光强最大。

对应于费马原理中的“实际光线”，零级衍射斑的中心就是几何光学的像点。

2) 极值点

$$I(P) = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2} \quad \left(u = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}\right)$$

(1) 次极大点

极大值 $\left(\frac{\sin u}{u}\right)' = 0$

$$\frac{u \cos u - \sin u}{u^2} = 0 \quad \tan u = u$$

$$\sin \theta = \pm 1.43 \frac{\lambda}{a}, \pm 2.46 \frac{\lambda}{a}, \pm 3.47 \frac{\lambda}{a}, \dots$$

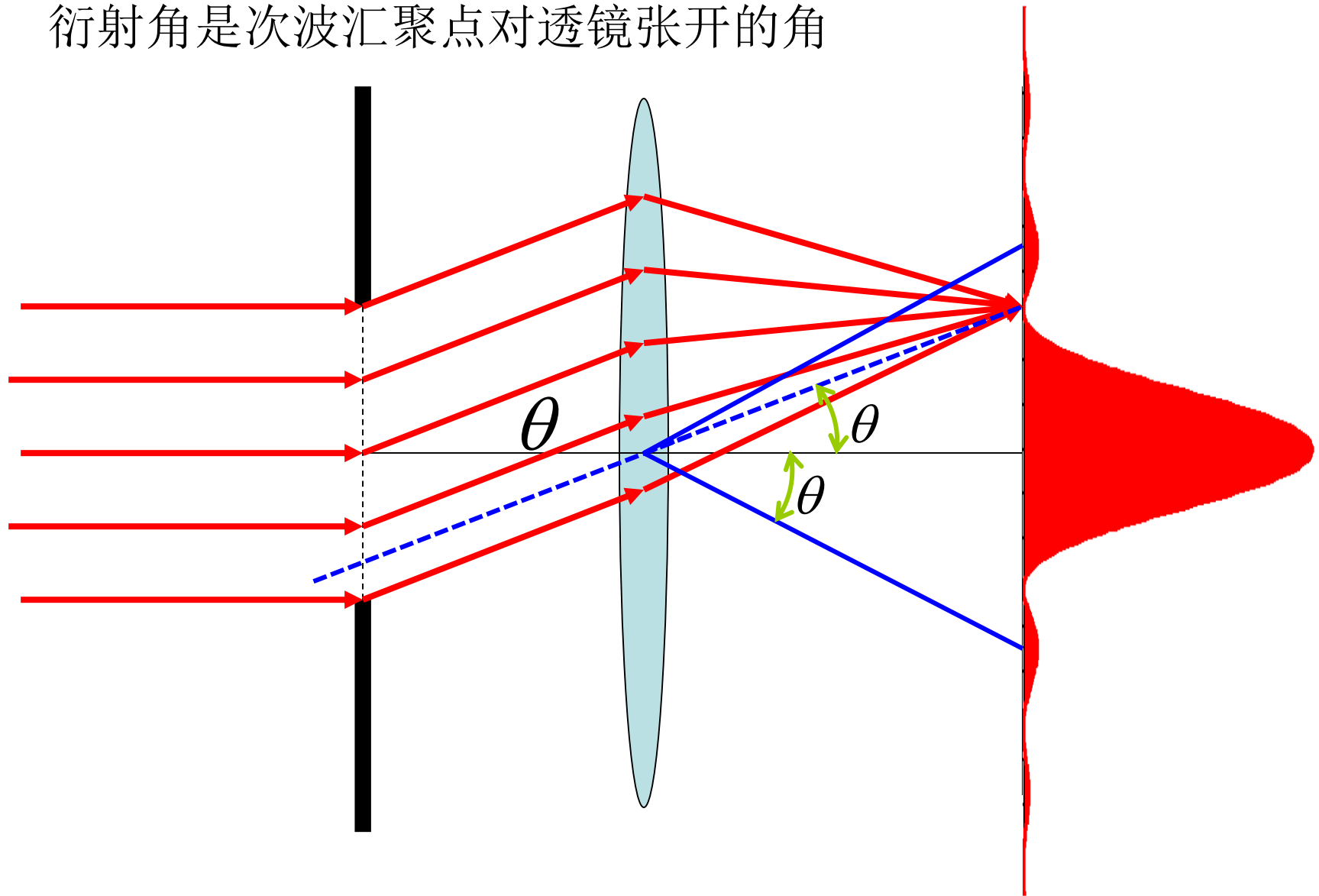
(2) 极小值点 $(\sin u = 0, u \neq 0)$

$$u = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta = j\pi \quad a \sin \theta = j\lambda \quad \text{暗纹条件}$$

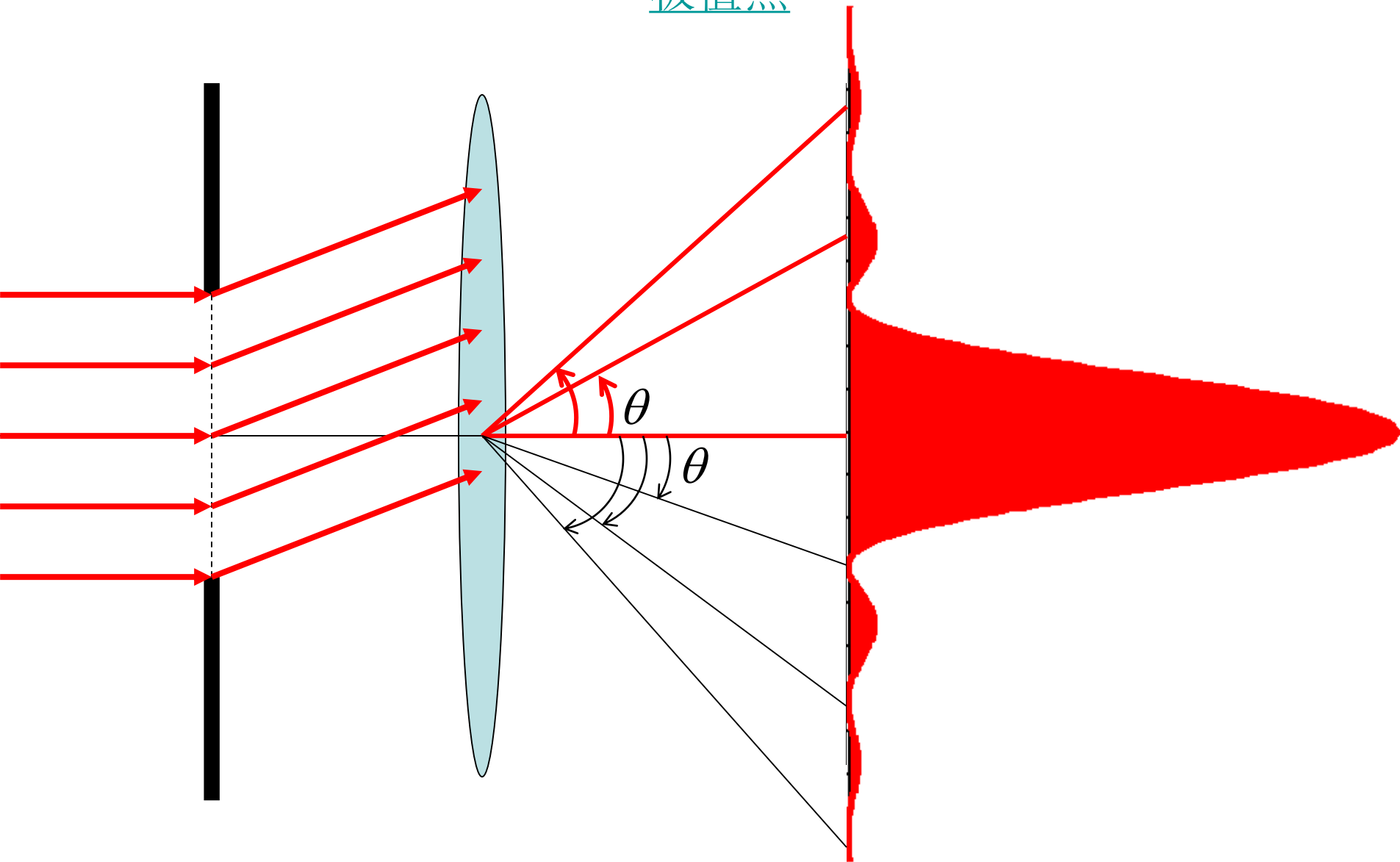
$j \neq 0$ $j \neq 0$

$$\sin \theta = \pm 1 \frac{\lambda}{a}, \pm 2 \frac{\lambda}{a}, \pm \dots, \pm j \frac{\lambda}{a}, \pm (j+1) \frac{\lambda}{a}, \dots$$

衍射角是次波汇聚点对透镜张开的角



极值点



3) 亮条纹角宽度（相邻暗条纹之间的角距离）

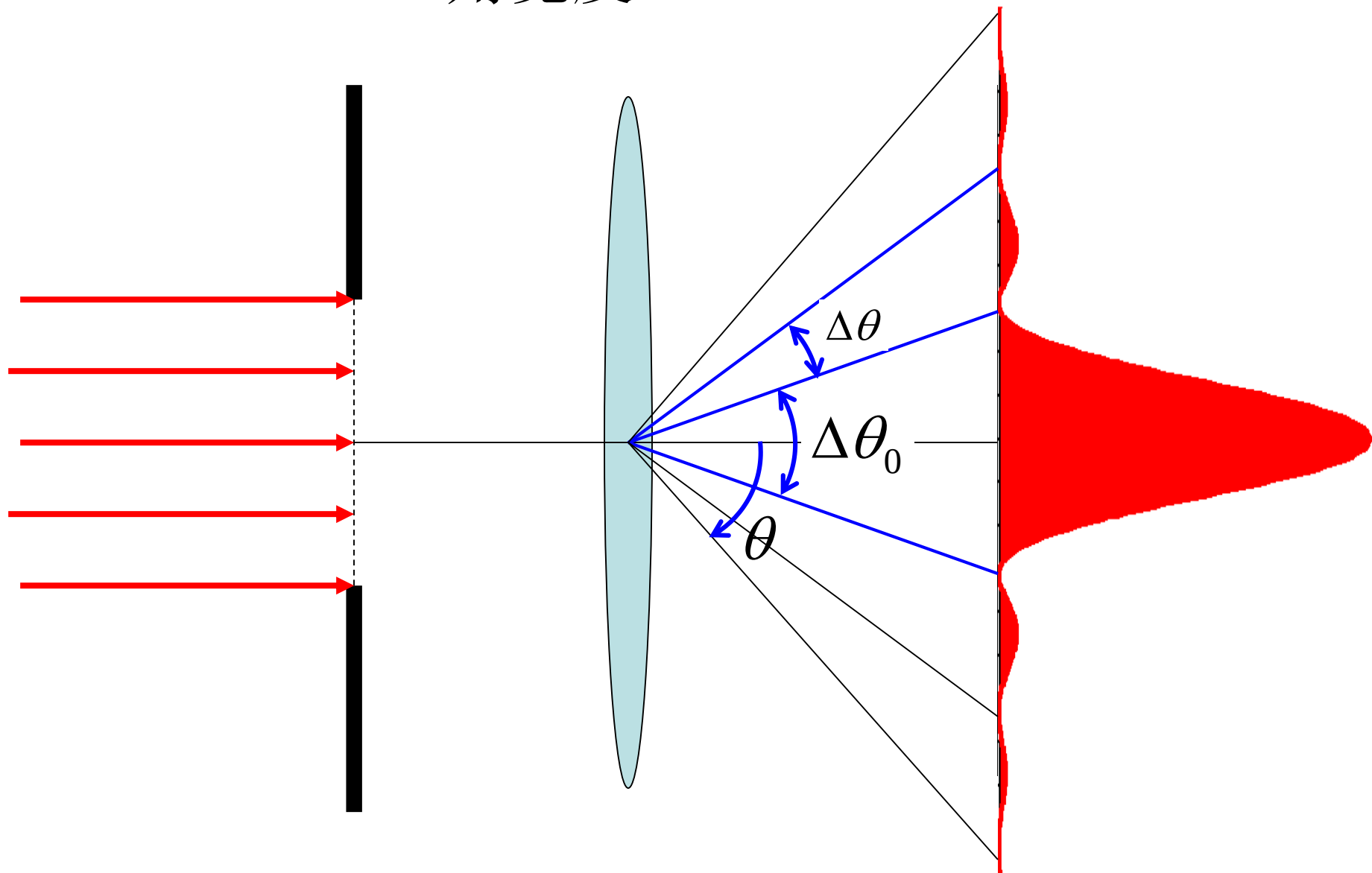
$$a \sin \theta = j \lambda$$

零级主极大 $\Delta \theta_0 = 2 \frac{\lambda}{a}$

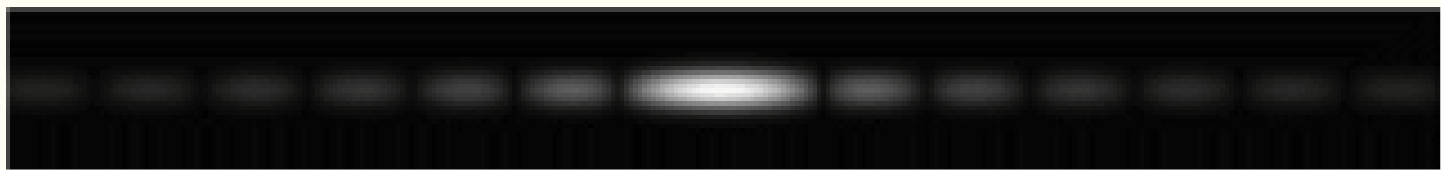
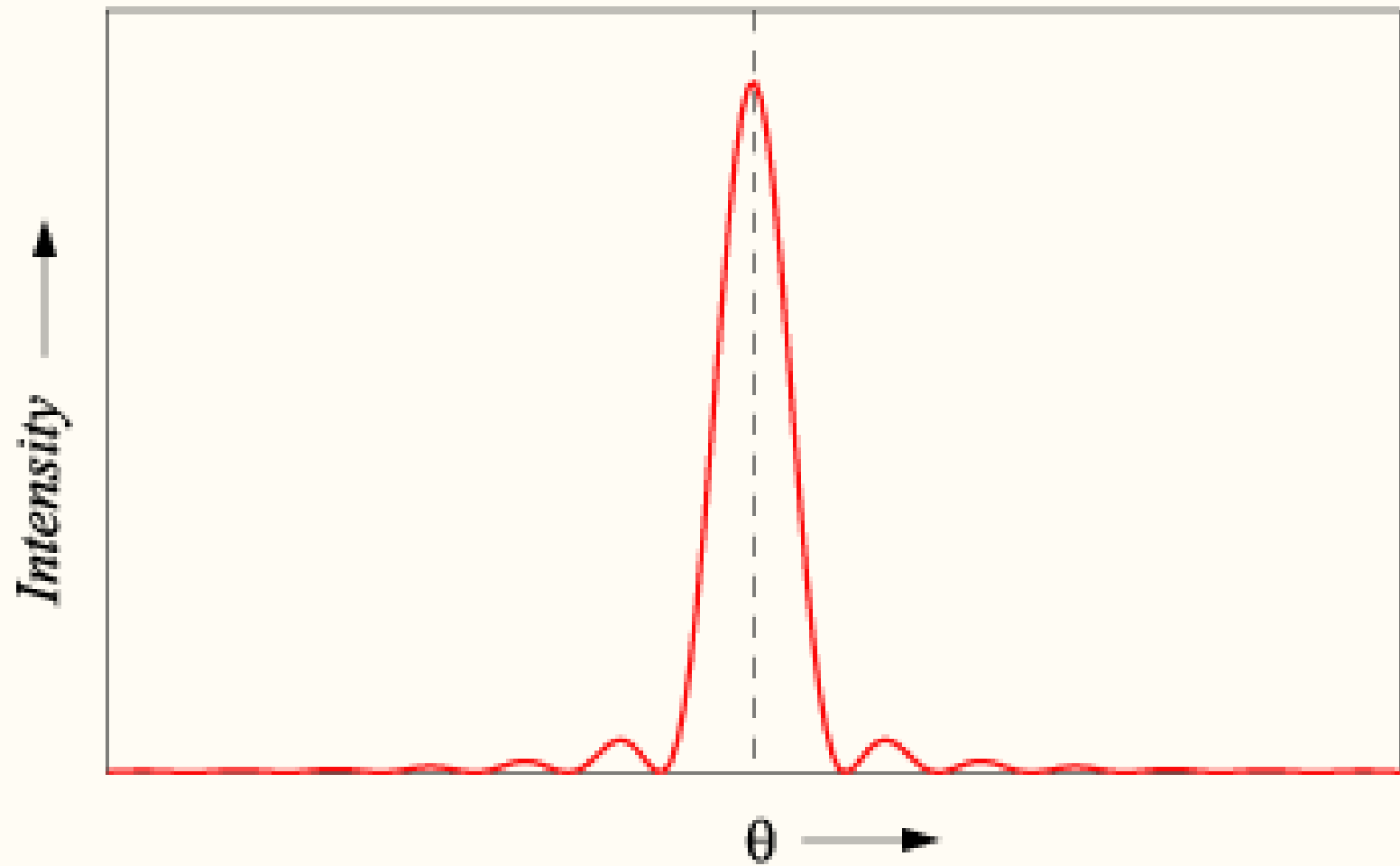
其它高级次条纹 $\Delta \theta = \frac{\lambda}{a}$

- (1) 零级条纹角宽度比其它级大一倍，且集中了大部分光强。
- (2) $\Delta \theta = \frac{\lambda}{a}$ $\begin{cases} a \downarrow, \Delta \theta \uparrow, & \text{受限制厉害, 衍射越明显} \\ a \ll \lambda, \text{衍射消失, 零级光斑展宽至整个屏} \\ a \uparrow, \Delta \theta \downarrow, & \Delta \theta \rightarrow 0, \text{直线传播} \end{cases}$
- (3) $\Delta \theta = \frac{\lambda}{a}$ $\begin{cases} \lambda \uparrow, \Delta \theta \uparrow, \\ \lambda \downarrow, \Delta \theta \downarrow, \lambda \rightarrow 0, \Delta \theta \rightarrow 0, & \text{几何光学是短波极限} \end{cases}$

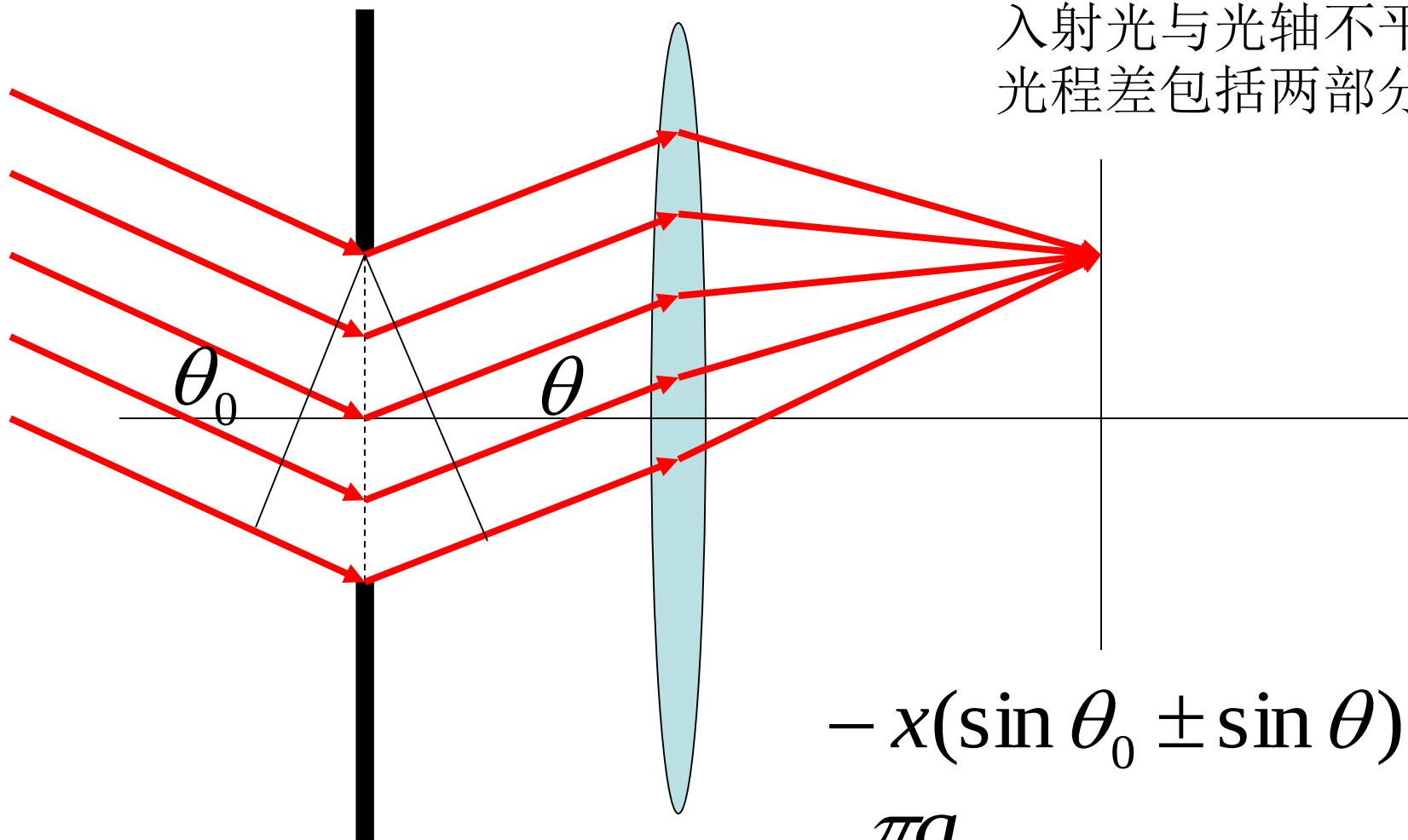
角宽度



Single-slit diffraction pattern



入射光与光轴不平行，
光程差包括两部分

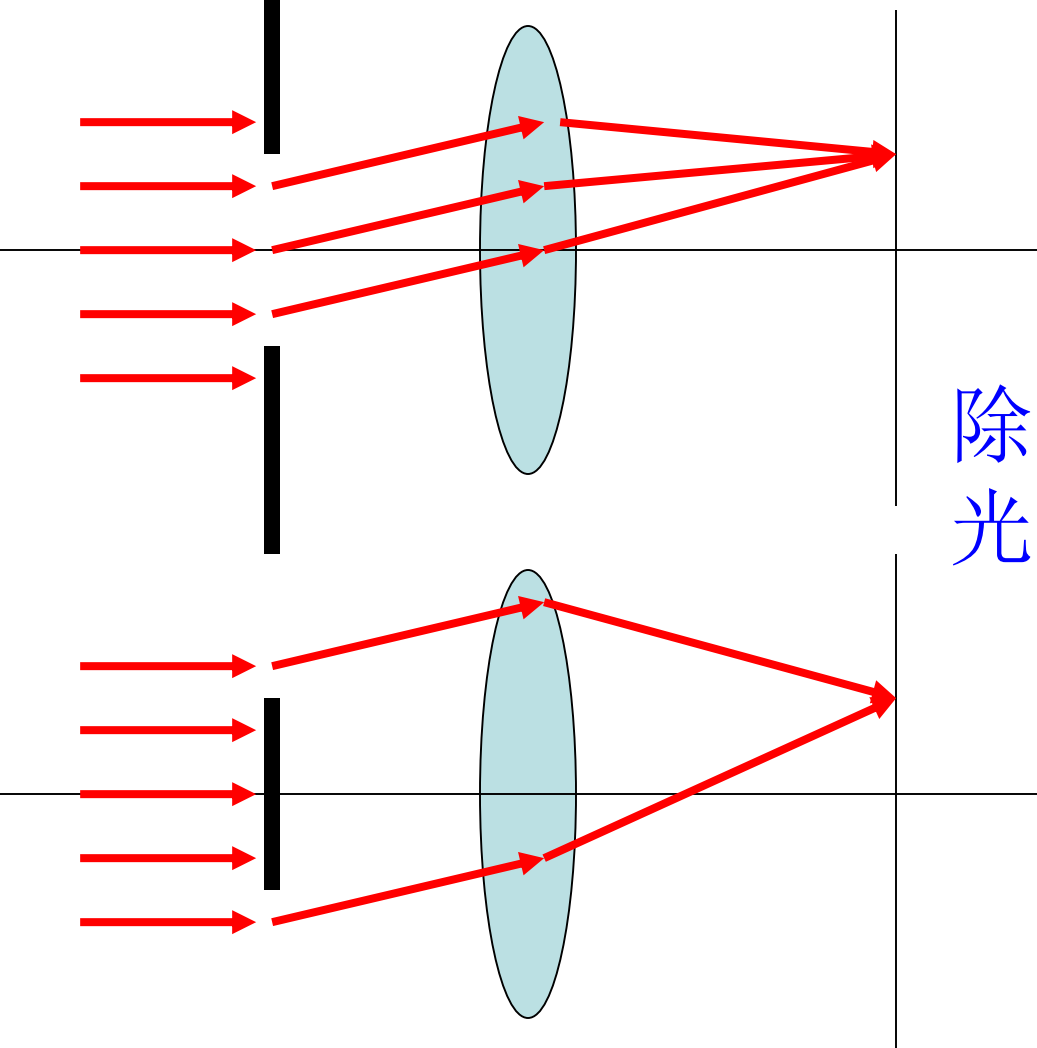


$$-x(\sin \theta_0 \pm \sin \theta)$$

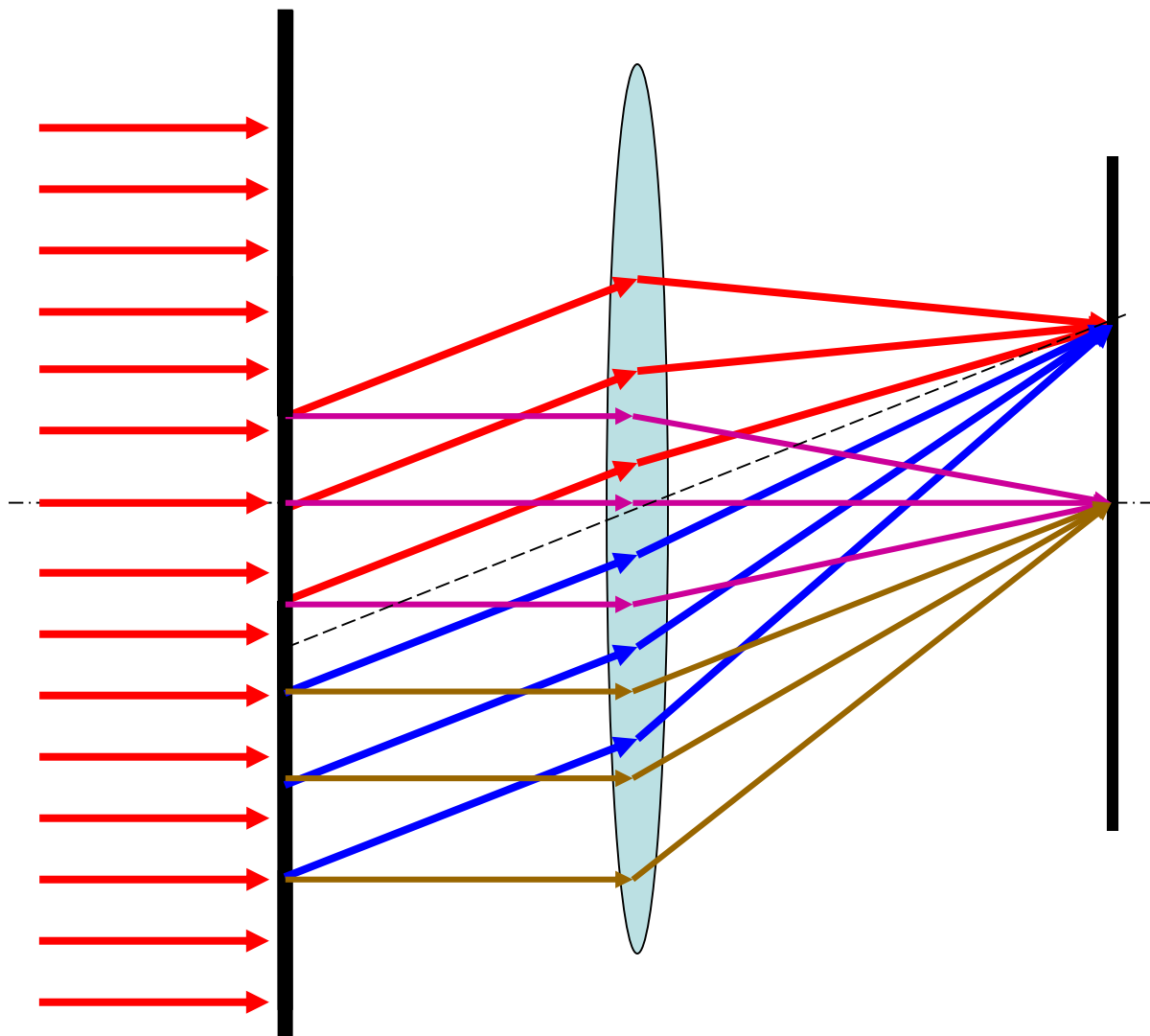
$$u = \frac{\pi a}{\lambda} (\sin \theta_0 \pm \sin \theta)$$

同侧+, 异侧-

互补屏：细缝和细丝

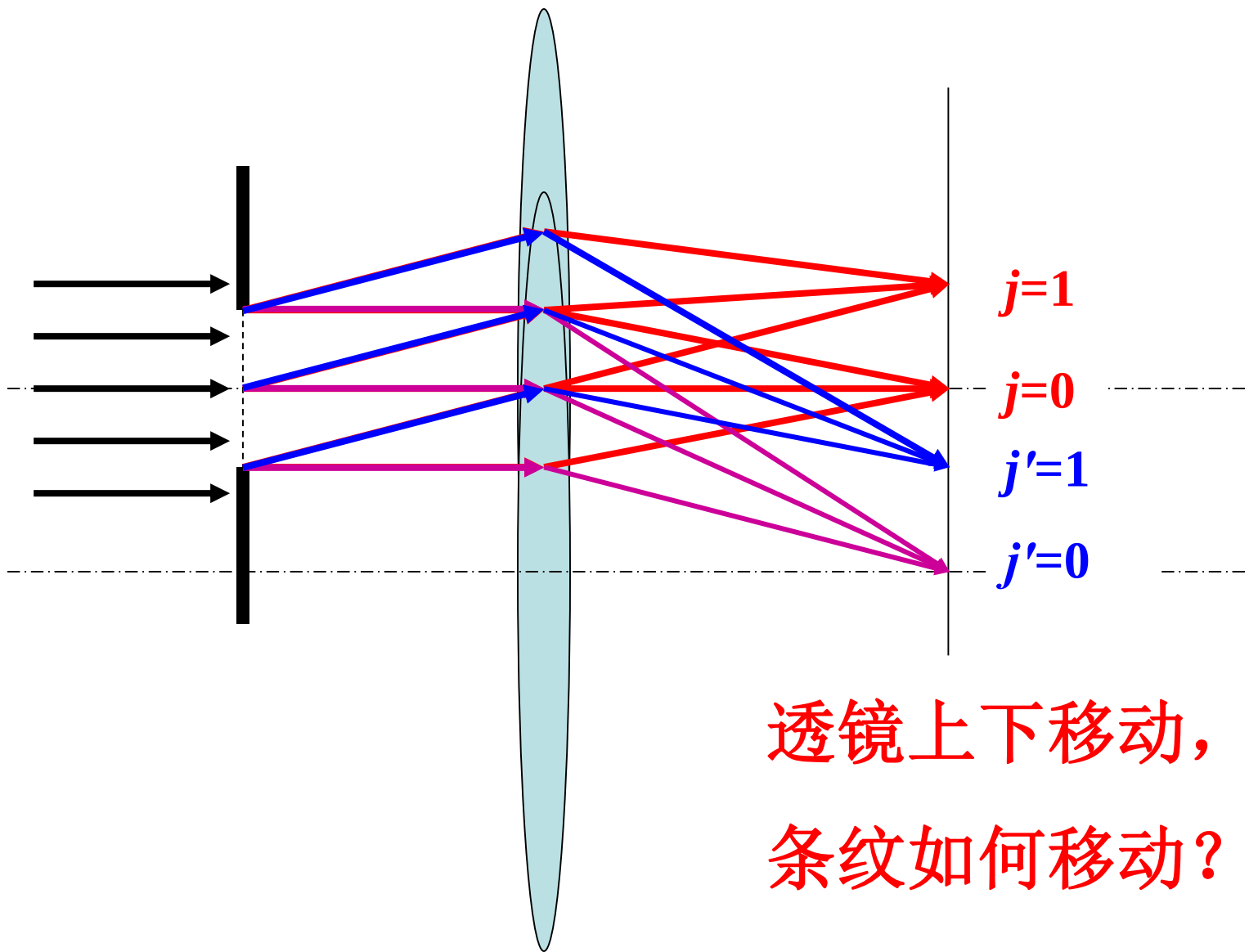


除零级中央主极大外，
光强分布处处相同



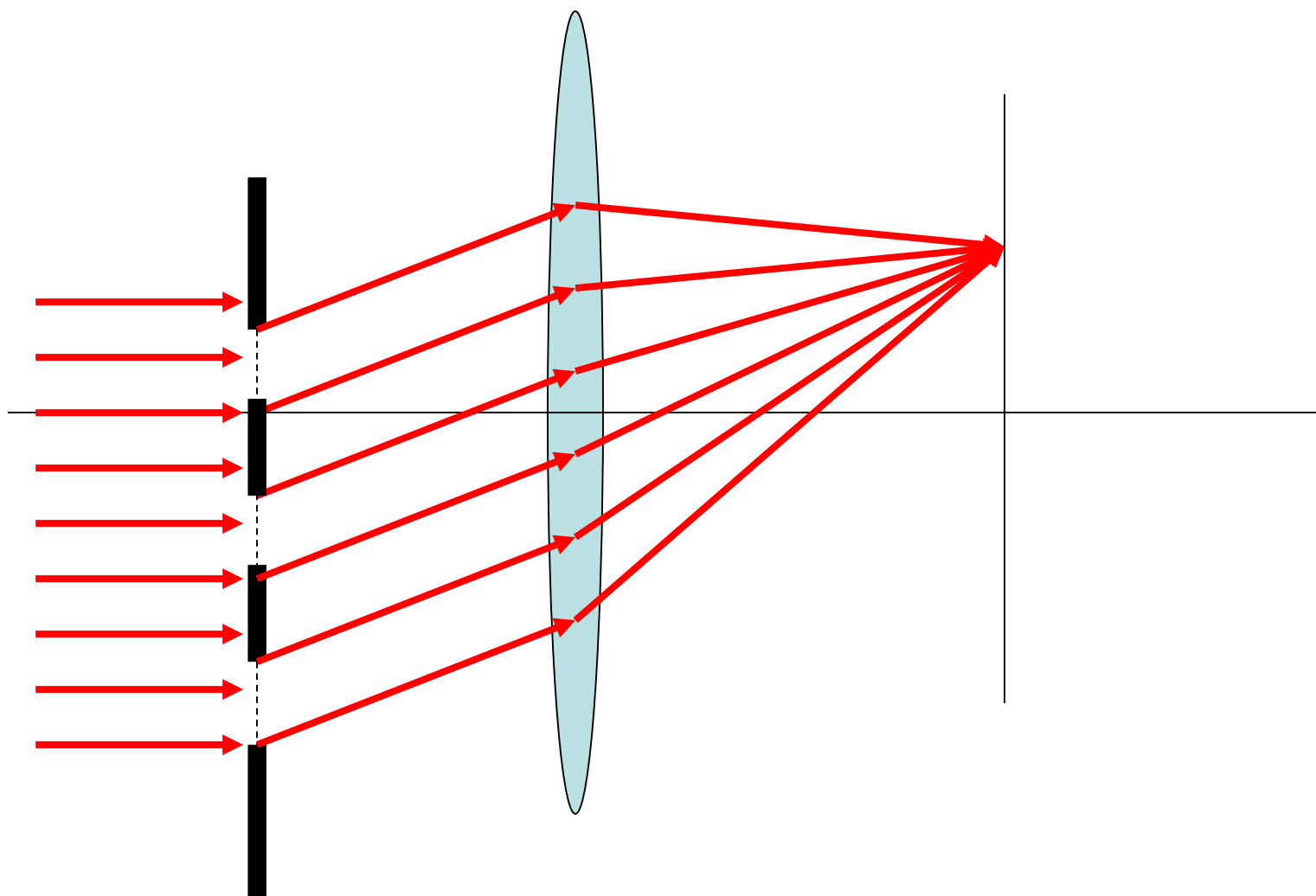
狭缝上下移动，条纹如何变？

狭缝上下移动，条纹不变



透镜上下移动，
条纹如何移动？

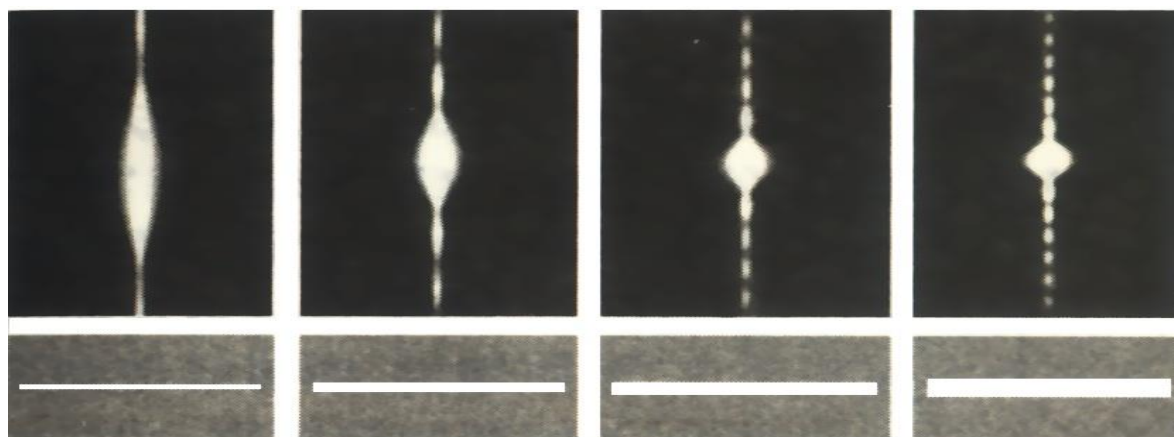
透镜上下移动，条纹相应移动



相互平行的狭缝，衍射条纹完全重合

衍射是波传播过程的基本特征

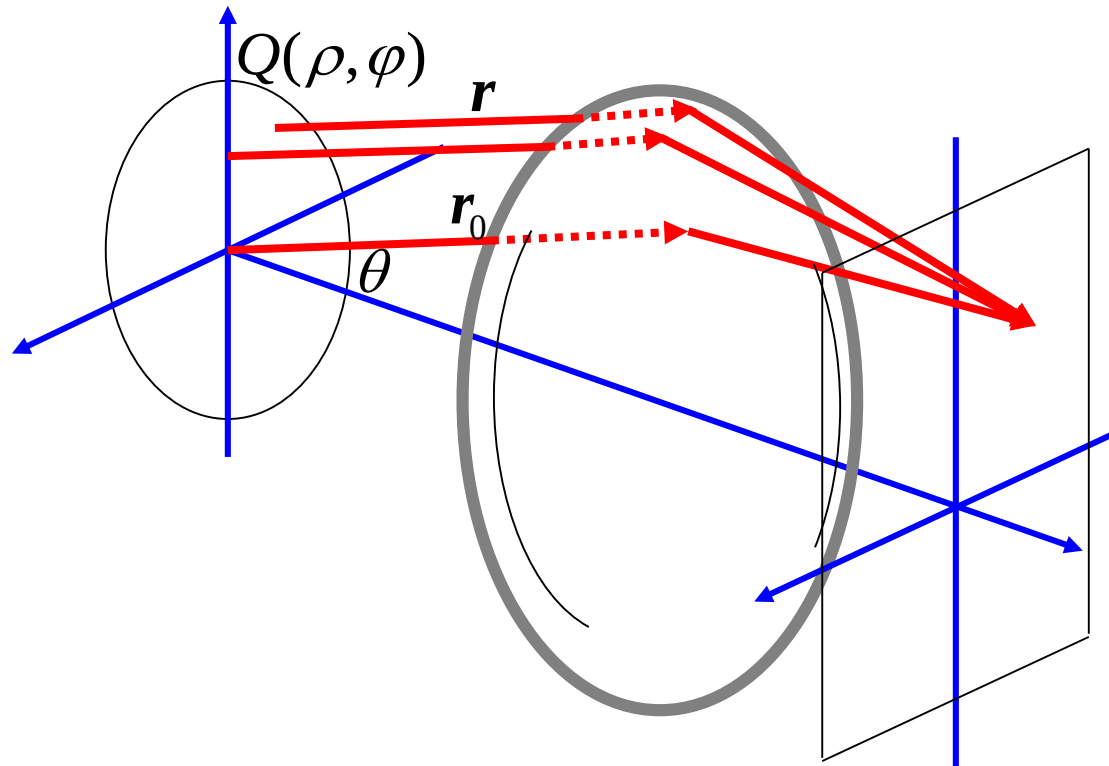
- 如果有衍射屏，即衍射障碍物，则衍射现象必然出现。
- 衍射能量大部分集中于0级。
- 存在**衍射反比关系**，即0级斑的空间（半）角宽度与缝宽成反比。



4.3.3 夫琅和费圆孔衍射及光学仪器的分辨本领

1. 夫琅和费圆孔衍射

- 平行入射光，通过半径为 R 的圆孔，汇聚在透镜的像方焦平面上。

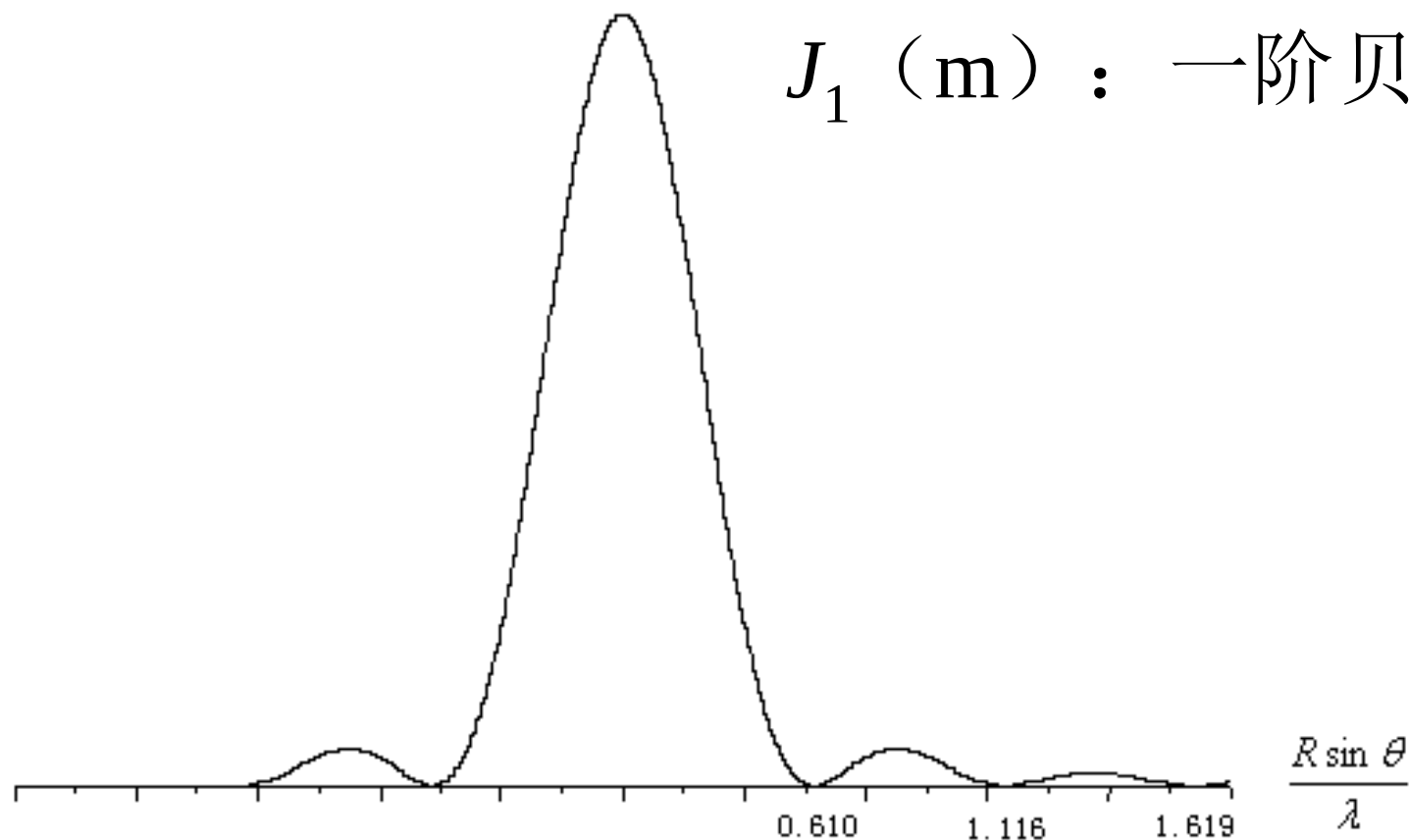


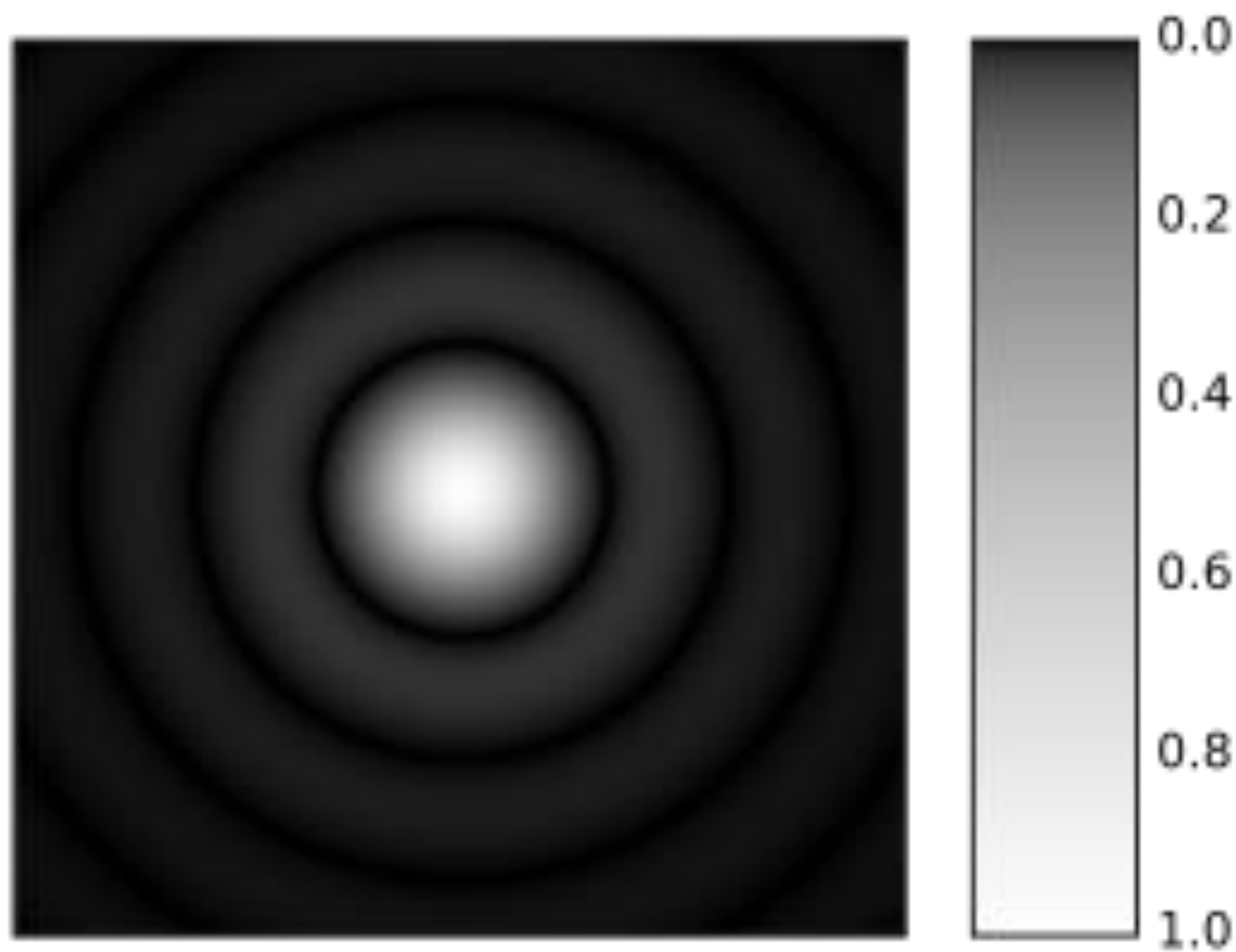
夫琅和费圆孔衍射

$$I(\theta) = I_0 \left[\frac{2J_1(m)}{m} \right]^2$$

$$m = 2\pi R \sin \theta / \lambda = kR \sin \theta$$

$J_1(m)$: 一阶贝塞尔函数





衍射花样的特点

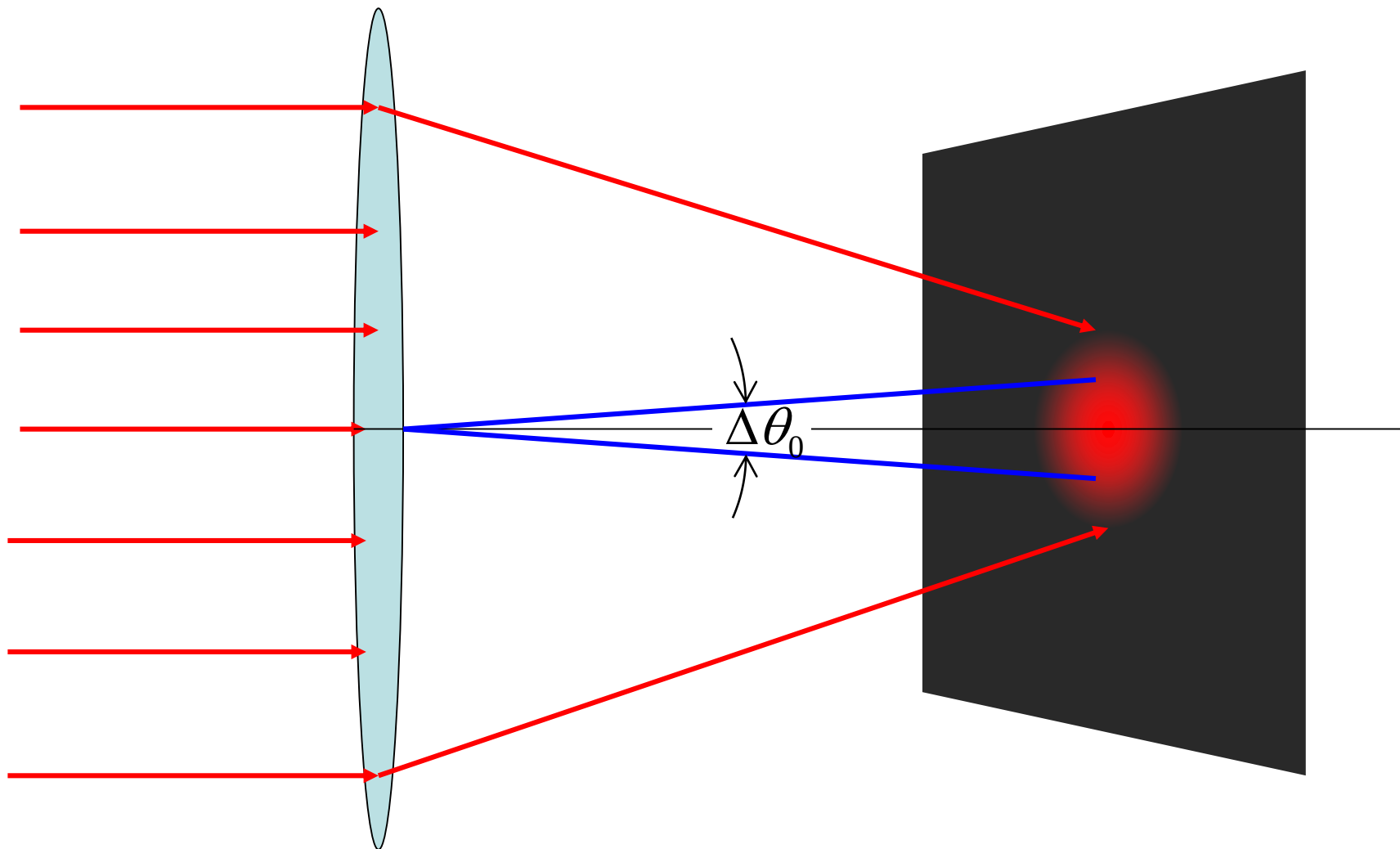
- 同心圆环，明暗交错，不等距。
- 中央主极大（零级斑）：艾里(Airy)斑，占总强度的 84 %，半角宽度 $\Delta \theta_0$

$$\Delta \theta_0 = 0.61 \frac{\lambda}{R} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

- 圆孔直径为 D ，透镜焦距 f ，则Airy斑半径 Δl

$$\Delta l = f \cdot \Delta \theta_0 = 1.22 \frac{f \lambda}{D}$$

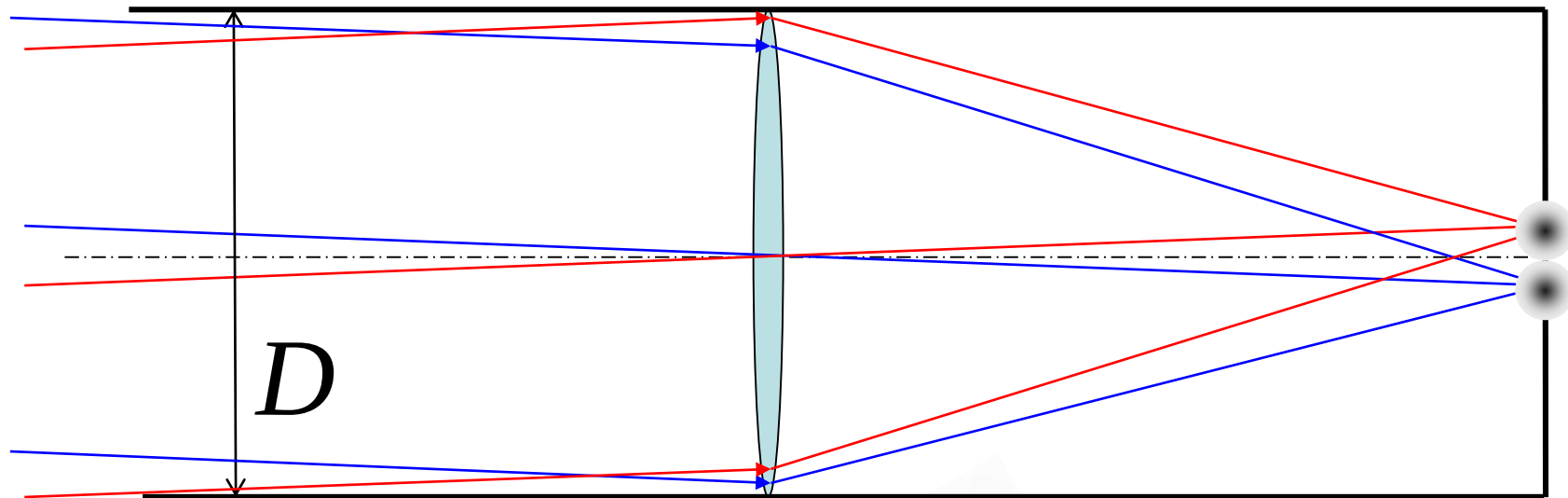
艾里斑



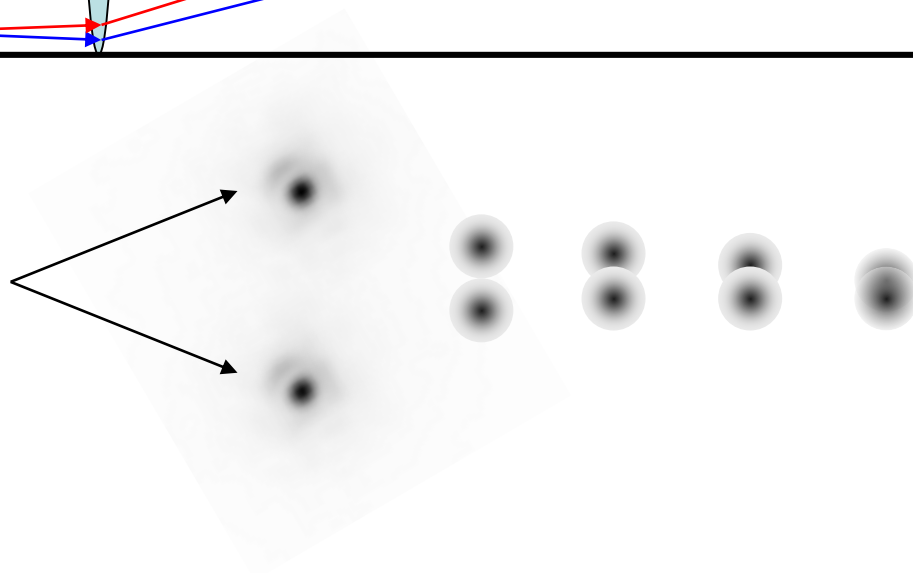
2. 光学仪器的分辨本领——瑞利判据 (the Rayleigh criterion)

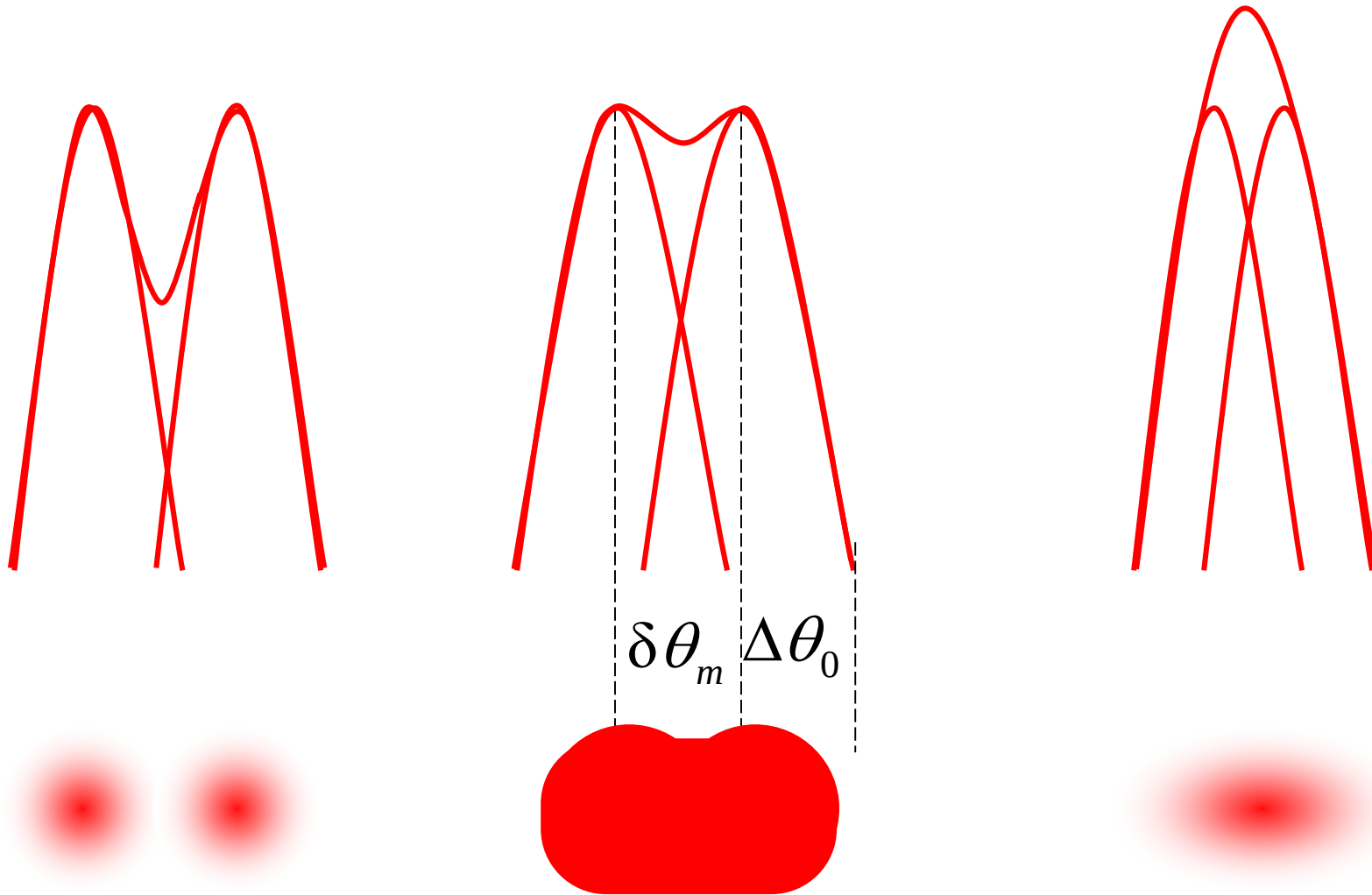
- 光学仪器的光瞳一般为圆形，平行光经光学仪器成象，由于衍射效应，总有一个艾里 (Aivry) 斑，而不是一个几何点。
- 两束光，则有两个Aivry斑。
- 两个物所成的Aivry斑若靠得很近，可能无法分辨是一个还是两个。
- 采用Rayleigh判据：两光斑的角距离恰等于一个光斑的半角宽度时，为可以分辨的最小极限。

望远镜成像



艾里 (Aivry)斑





Rayleigh(瑞利)判据

$\delta\theta_m = \Delta\theta_0$ 恰好可以分辨

$$\Delta\theta_0 = 0.61 \frac{\lambda}{R} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

干涉与衍射的联系和区别？

- 本质相同：

无论是衍射还是干涉，光波在相遇点都是振动的相干叠加，都遵循波的叠加原理，是光的波动性的体现。

- 形成条件不同：

干涉是分立光束之间的相干叠加，这些光束是有限条，或虽然有无限多条，但是光束之间是离散的、不连续的、可数的。直接应用波的叠加原理。

衍射是连续分布的无限多个点光源（次波中心）发出的光波的相干叠加。要应用惠更斯——菲涅耳原理，或菲涅耳——基尔霍夫衍射积分公式。

- 分布规律不同：

干涉时，光的能量在空间均匀分布，各个亮条纹有相差不大的能量；衍射时，光的能量主要集中在一个特殊的衍射级上，更接近于几何成像的情况。

- 采用的数学手段不同：

干涉采用有限项求和处理,衍射采用无限积分处理。