

第四章 光的衍射

光的衍射现象

菲涅耳衍射（近场衍射）

夫琅和费衍射（远场衍射）

衍射光栅

4.1 光的衍射现象

4.1.1 衍射现象

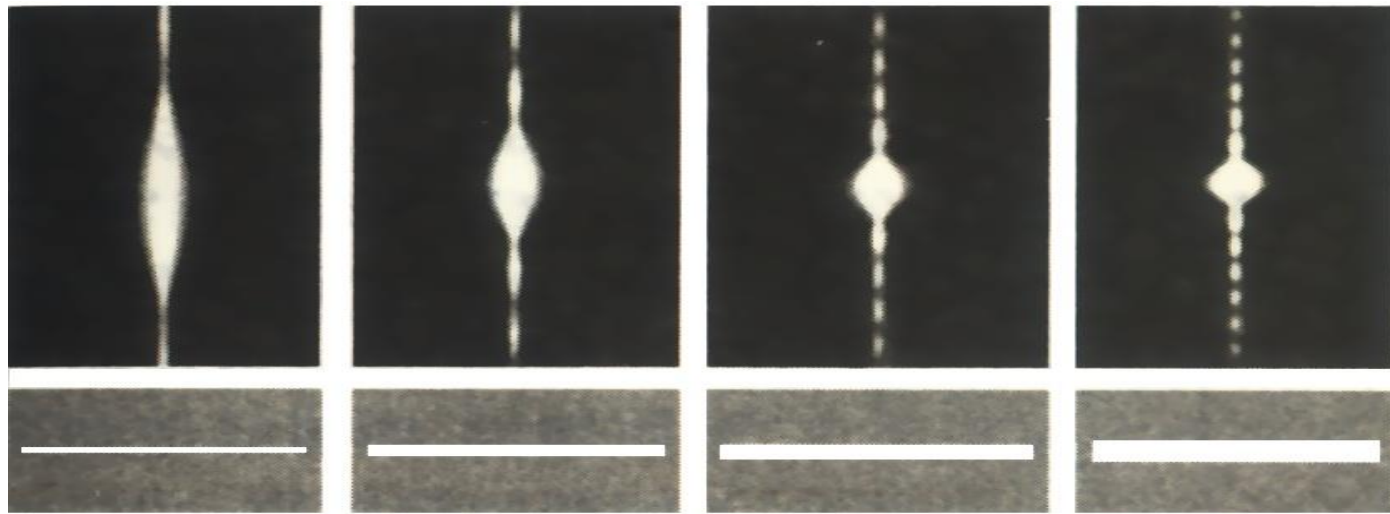
光的衍射：光波传播中遇到障碍物，绕过障碍物继续传播的现象，也称**绕射**。

衍射或绕射是波的基本特征。

光的衍射现象不易被观察：

1) 光波波长短； 2) 不相干的面光源

不同宽度狭缝的衍射花样

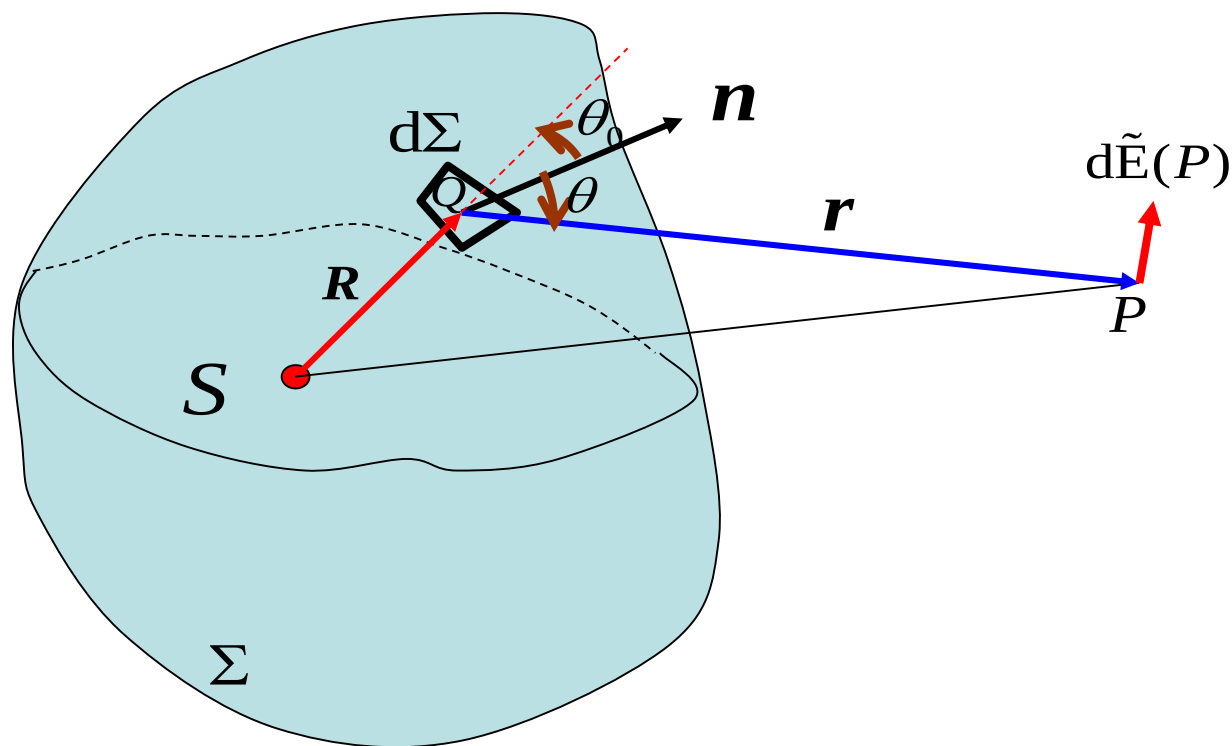


光的衍射的特点

- “绕射”与相干效应有关，光强重新分布，出现明暗条纹。
- 光传播时，某方向受限越厉害，扩展越明显，衍射越明显。
- 衍射与障碍物线度有关，孔或缝线度与波长相当，衍射才明显。

惠更斯—菲涅耳衍射积分公式

$$\tilde{E}(P) = \oiint_{\Sigma} d\tilde{E}(P) = \oiint_{\Sigma} KF(\theta_0, \theta) \tilde{E}_0(Q) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma$$



惠-菲公式是菲涅耳凭直觉根据惠更斯的思想得到的。
积分公式中 $K=?$ 倾斜因子 $F(\theta_0, \theta)=?$ 曲面积分区域如何选取?

4. 1. 2 菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式

$$\tilde{E}(P) = \oiint_{\Sigma} KF(\theta_0, \theta) \tilde{E}_0(Q) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma \quad \text{惠—菲公式}$$

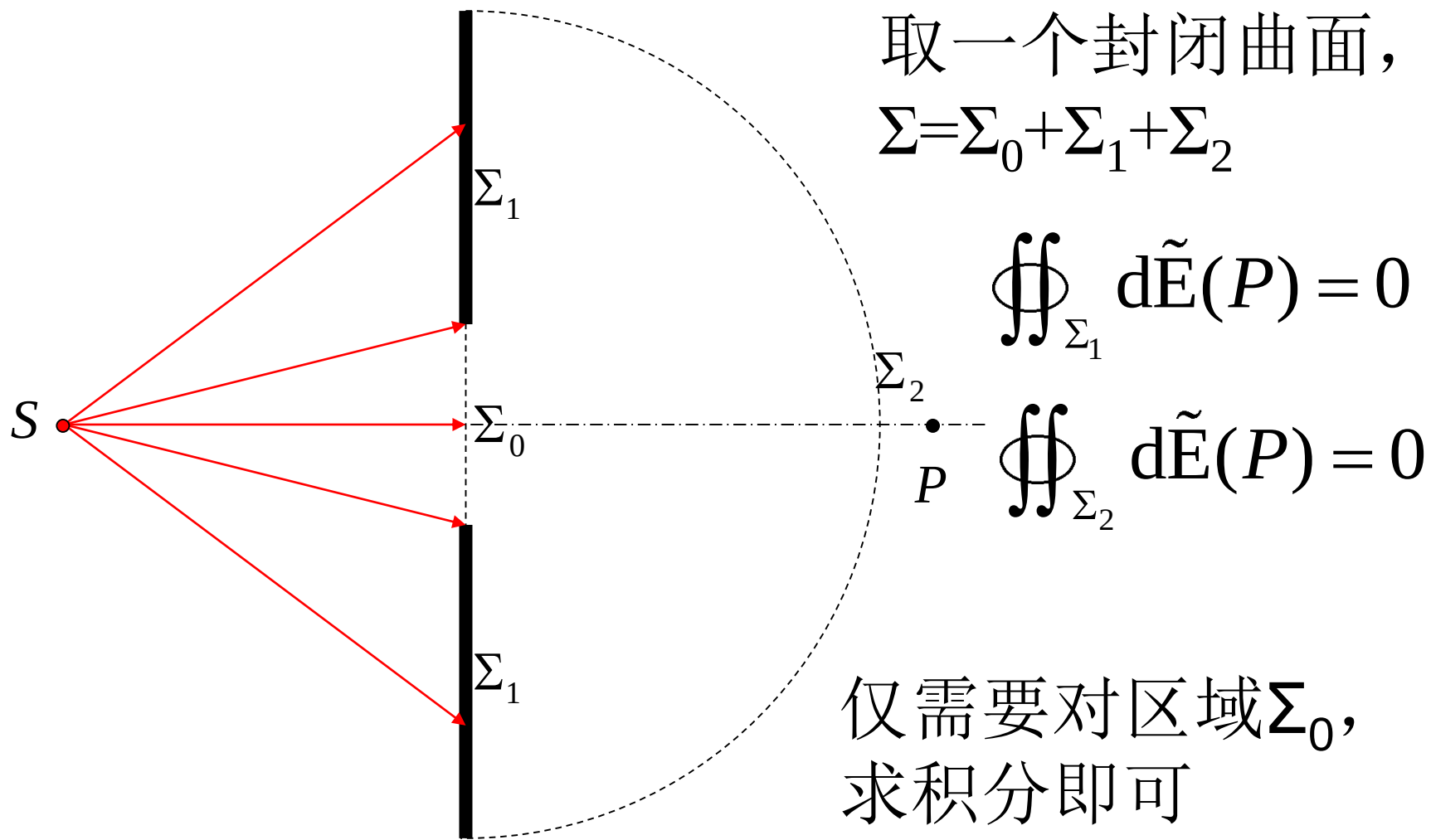
1. 菲涅耳-基尔霍夫积分公式

- 基尔霍夫对菲涅耳的积分公式作了严格的数学论证，得到以下结论：

(1) 确定了积分常数和倾斜因子的表达式

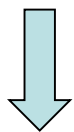
$$K = -\frac{i}{\lambda} = \frac{e^{-i\pi/2}}{\lambda} \quad F(\theta_0, \theta) = \frac{1}{2}(\cos\theta_0 + \cos\theta)$$

(2) 证明了积分区域选取的原则，不必对整个封闭曲面求积分，而只需对衍射障碍物（衍射屏）上开放区域（衍射光孔）求积分即可



封闭曲面积分转为仅对屏上透光区域求积分即可

处理光的衍射问题

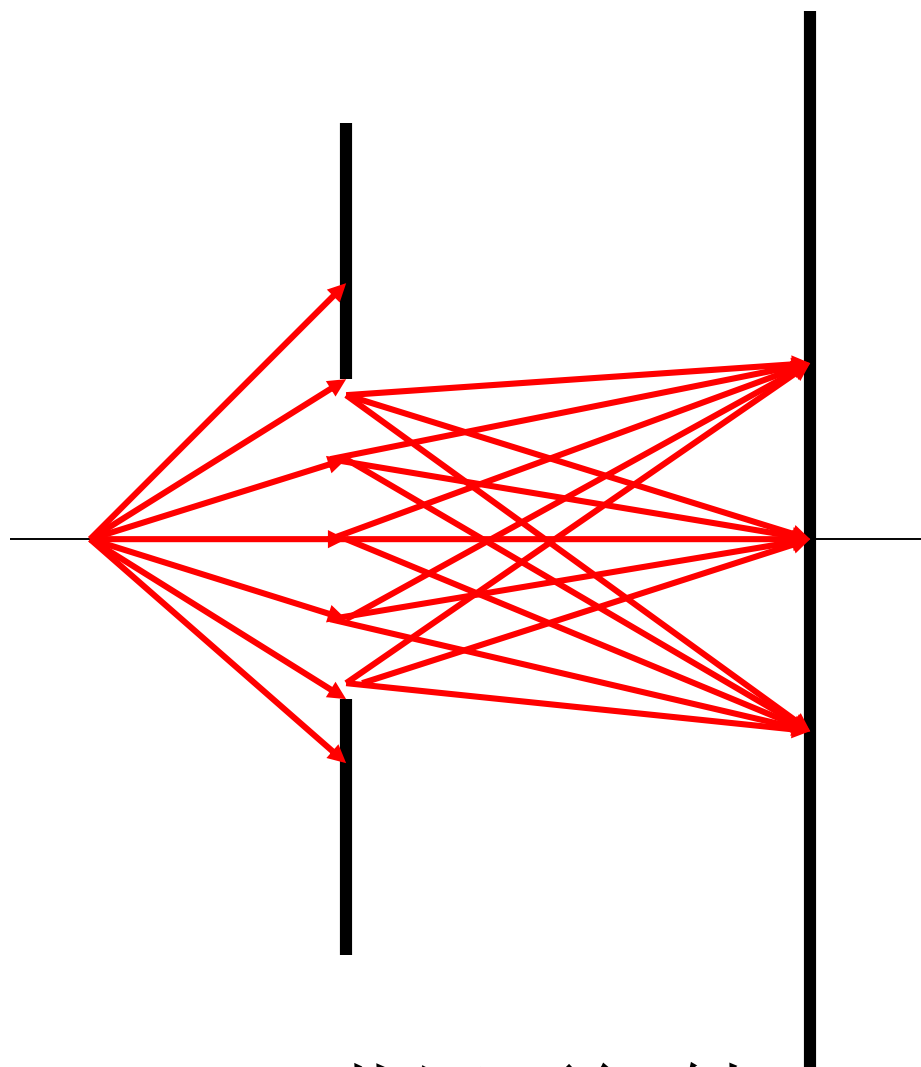


求菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式

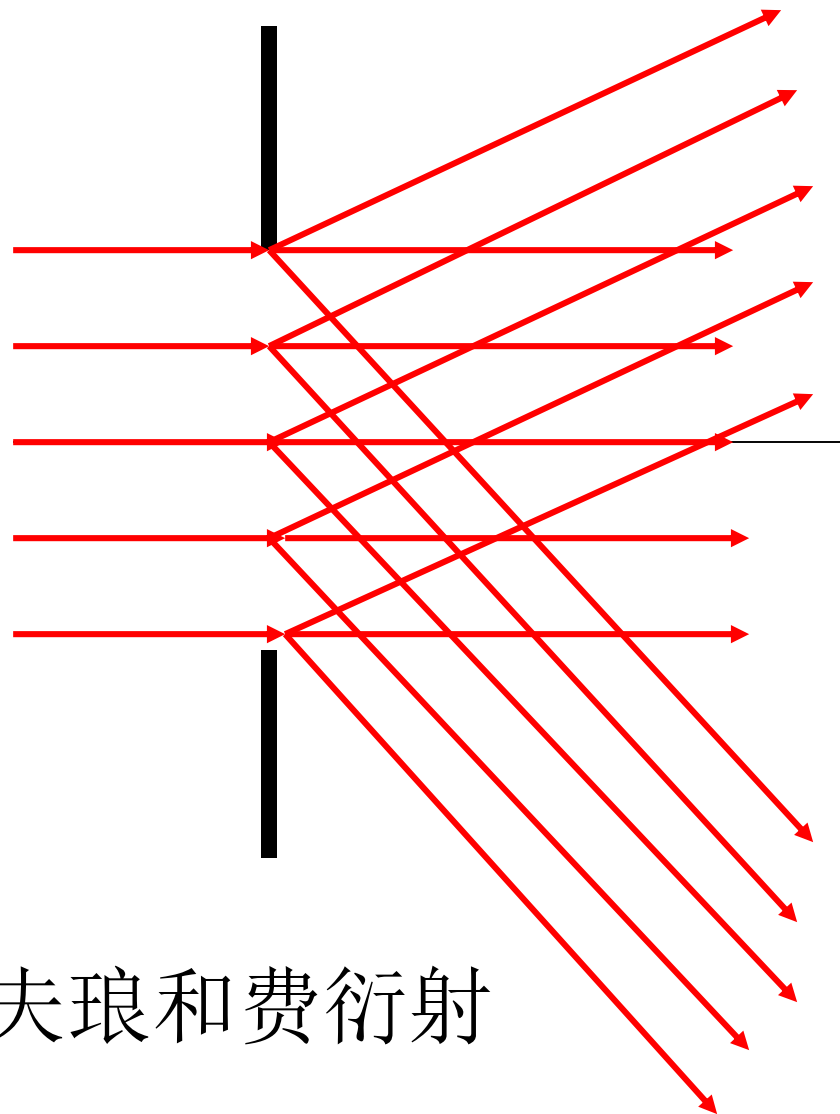
$$\tilde{E}(P) = K \iint_{\Sigma_0} \tilde{E}_0(Q) F(\theta_0, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma$$

2. 衍射的分类

- 根据衍射障碍物到光源和接收屏的距离分类。
- 两个距离都是有限的，或至少一个是有限的，为菲涅耳([Fresnel](#))衍射，又称近场衍射；
- 距离无限的，即平行光入射、出射，为夫琅和费([Fraunhofer](#))衍射，又称远场衍射。



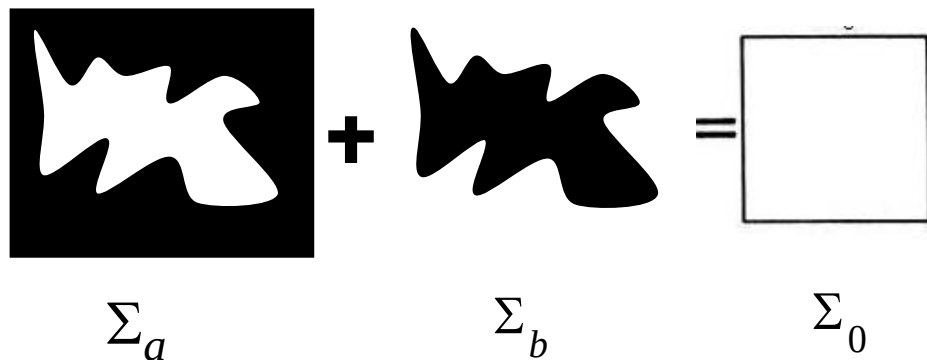
菲涅耳衍射



夫琅和费衍射

3. 巴俾涅(Babinet)原理

互补衍射屏:两衍射屏的透光部分相加为自由波场。



$$\tilde{E}_a(P) = K \iint_{\Sigma_a} \tilde{E}_0(Q) F(\theta_0, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma \quad \tilde{E}_b(P) = K \iint_{\Sigma_b} \tilde{E}_0(Q) F(\theta_0, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_a(P) + \tilde{E}_b(P) &= K \iint_{\Sigma_a} \tilde{E}_0(Q) F(\theta_0, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma + K \iint_{\Sigma_b} \tilde{E}_0(Q) F(\theta_0, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma \\ &= K \iint_{\Sigma_a + \Sigma_b} \tilde{E}_0(Q) F(\theta_0, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma = \tilde{E}_0(P) \end{aligned}$$

巴俾涅原理: 互补屏各自在衍射场中某点所产生的复振幅之和相当于自由传播时该点的复振幅。

巴俾涅原理处理夫琅和费衍射问题特别有效。

自由波场中有一个透镜，则光将汇聚成像，平行光汇聚成一个点

$$\tilde{E}_a(P) + \tilde{E}_b(P) = \tilde{E}_0(P) \quad \text{像点之外，处处为零}$$

平行光入射到透镜，按几何光学原理成像，除像点之外，处处复振幅为零。

$$\tilde{E}_a(P) = -\tilde{E}_b(P) \quad I_a(P) = I_b(P)$$

圆孔与圆屏、细丝与狭缝的衍射花样，除零级中央主极大外，处处相同。

巴俾涅原理给出的三个场之间的关系为复振幅关系，不是强度关系。并非a屏为亮，b屏为暗。

4.2 菲涅耳衍射（圆孔、圆屏）

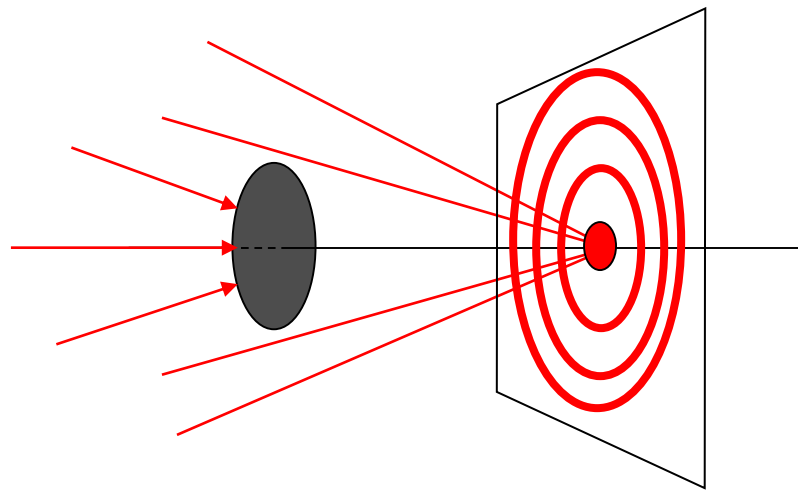
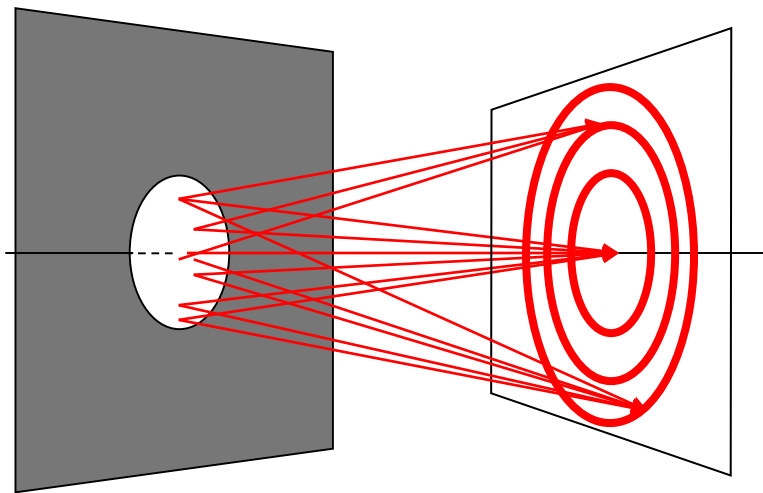
圆孔半径 $\rho \sim \text{mm}$,光源到孔的距离 $R \sim \text{m}$,孔到接收屏 $b \sim 3\text{-}5\text{m}$

4.2.1 衍射现象

- 圆孔衍射：接收屏上可见**同心圆环**，光孔变化、接收屏沿轴向移动，圆环中心明暗交替变化。

中心强度随光孔变化更敏感

- 圆屏衍射：接收屏上可见**同心圆环**，光孔变化、接收屏沿轴向移动，圆环中心永远是亮点。



处理衍射问题：

菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式

$$\tilde{E}(P) = K \iint_{\Sigma_0} \tilde{E}_0(Q) F(\theta_0, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma$$

分析三步骤：

1. 划分有效波前 Σ_0 （衍射屏上开口部分）。
2. 计算每个面元在某场点P引起的复振幅。
3. 将所有这些复振幅相干叠加。

4.2.2 半波带法分析菲涅耳圆孔衍射

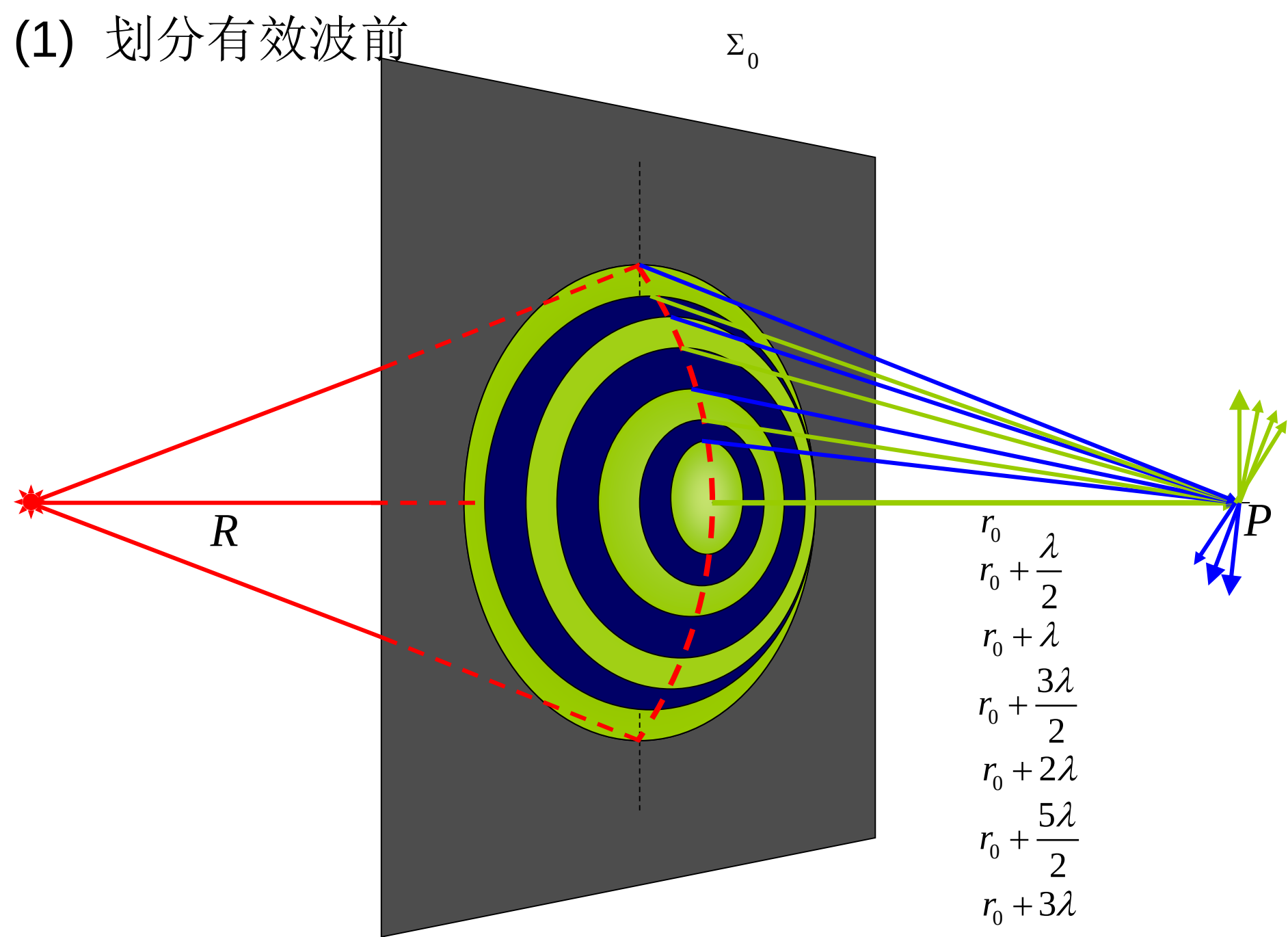
1. 菲涅耳半波带

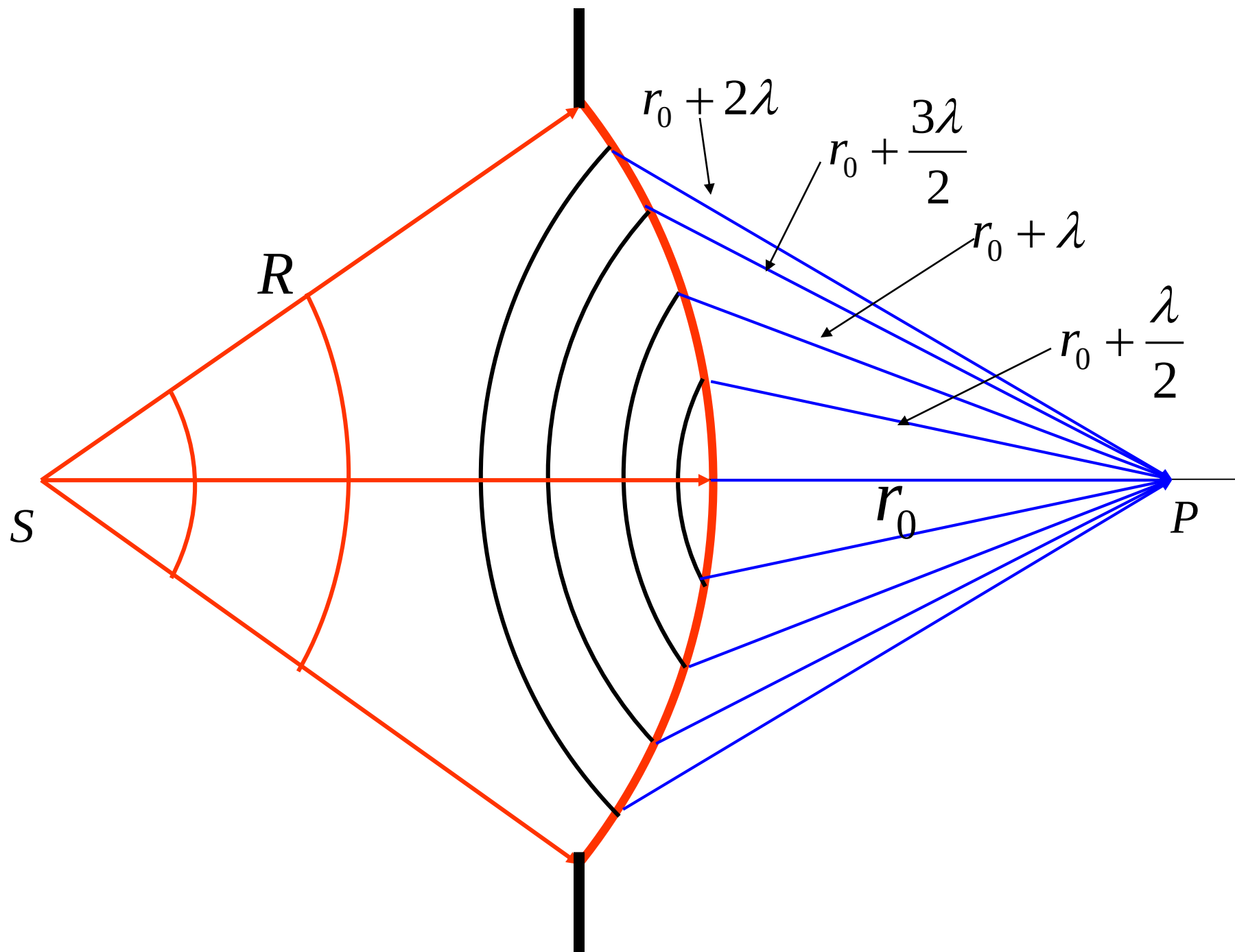
- 设法求解菲涅耳—基尔霍夫衍射积分公式。
- 菲涅耳衍射比较复杂，不易严格求解积分公式，可对波前进行巧妙分割。
- 将积分近似化为求和。
- 将波前（球面）划分为一系列的同心圆环带，每一带的中心到P点的距离依次相差半个波长，位相差为 π 。相邻波带在P点的振动方向相反，相互抵消。这些圆环带称为半波带。

无穷划分 $\Rightarrow$ 有限划分

不够精确，但能给出
衍射花样的基本特征

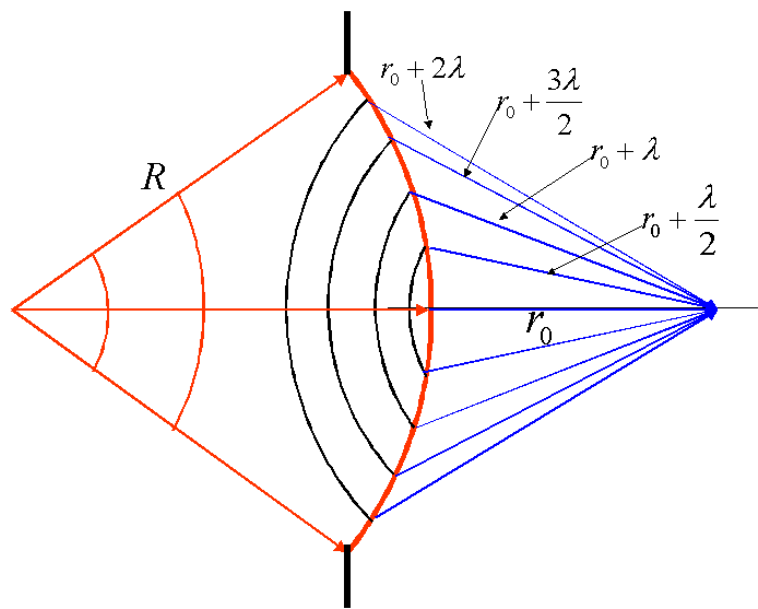
(1) 划分有效波前





(2) 计算每个面元（半波带）在场点P引起的复振幅

相邻半波带发出的次波，到达P点时，
光程差为 $\lambda/2$ ，相位差为 π



$$\tilde{E}_1(P) = E_{10}(P)e^{i\varphi_1}$$

$$\tilde{E}_2(P) = E_{20}(P)e^{i(\varphi_1+\pi)}$$

$$\tilde{E}_3(P) = E_{30}(P)e^{i(\varphi_1+2\pi)}$$

⋮

$$\tilde{E}_m(P) = E_{m0}(P)e^{i(\varphi_1+(m-1)\pi)}$$

相位相反，振动方向相反，相互抵消

(3) 所有复振幅相干叠加

合振动

相邻半波带相位相反，振动方向相反

$$\tilde{E}(P) = \sum_{m=1} \tilde{E}_m(P) = E_{10}(P) - E_{20}(P) + E_{30}(P) + \dots + (-1)^{m-1} E_{m0}(P)$$

菲-基公式

$$\tilde{E}(P) = K \iint_{\Sigma_0} \tilde{E}_0(Q) F(\theta_0, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma$$

积分
↓
求和

$$= \sum_m K \tilde{E}_0(Q) F(\theta_0, \theta) \frac{e^{ikr_m}}{r_m} s_m$$

$F(\theta_0, \theta)$ 易求, $\tilde{E}_0(Q)$ 对所有波带相同 (同一波面)

e^{ikr_m} 相互之间位相相差 π

先计算各个半波带的面积 s_m 和 r_m

[illegible]

$$= 2\pi R^2 (1 - \cos \varphi)$$

$$dS = 2\pi R^2 \sin \varphi d\varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{R^2 + (R + r_0)^2 - r_m^2}{2R(R + r_0)}$$

$$\sin \varphi d\varphi = \frac{r_m}{R(R + r_0)} dr_m$$

$$dS = \frac{2\pi R r_m}{R + r_0} dr_m$$

$$dr_m = \lambda / 2 \quad dS = S_m$$

第m个半波带的面积

$$\frac{S_m}{r_m} = \frac{\pi R}{R + r_0} \lambda \quad \text{与m无关}$$

菲-基衍射公式

$$\begin{aligned}
 \tilde{E}(P) &= K \sum_{m=1}^n \tilde{E}(Q) F(\theta_m) e^{ikr_m} \frac{S_m}{r_m} & F(\theta_0, \theta) &= \frac{1}{2} (\cos \theta_0 + \cos \theta) \\
 & & \theta_0 &= 0, \theta = \theta_m \\
 &= K \tilde{E}(Q) \frac{S_m}{r_m} \sum F(\theta_m) e^{i[\varphi_0 + (m-1)\pi]} \\
 &= K \tilde{E}(Q) e^{i\varphi_0} \frac{S_m}{r_m} \sum \frac{1}{2} (1 + \cos \theta_m) e^{i(m-1)\pi} \\
 &= \tilde{A} \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} (1 + \cos \theta_m) & (\tilde{A} &= \frac{K \tilde{E}(Q) e^{i\varphi_0}}{2} \frac{S_m}{r_m})
 \end{aligned}$$

$$\tilde{E}(P) = \tilde{A} \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} (1 + \cos \theta_m) = \sum_{m=1}^n \tilde{E}_m = \sum_{m=1}^n A_m (-1)^{m-1}$$

$\tilde{E}_m = \tilde{A}(1 + \cos \theta_m)(-1)^{m-1}$ 为第 m 个半波带发出的次波在P点的复振幅

$A_m = |\tilde{A}| (1 + \cos \theta_m)$ A_m 为第 m 个半波带发出的次波在P点的振幅

可见，在P点处：

相邻波带次波的位相相反；

m 越大的波带，振幅越小。

$$A_m = |\tilde{A}| (1 + \cos \theta_m)$$

$$\tilde{E}(P) = \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} A_m = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots$$

$$= \frac{1}{2} A_1 + \left(\frac{1}{2} A_1 - A_2 + \frac{1}{2} A_3 \right) + \left(\frac{1}{2} A_3 - A_4 + \frac{1}{2} A_5 \right) + \dots$$

$$= \frac{1}{2} [A_1 + (-1)^{n-1} A_n]$$

倾斜因子连续且缓慢变化

$$\frac{1}{2} A_1 - A_2 + \frac{1}{2} A_3 = 0$$

注：负号不代表半波带在P点的振幅为负值，只是表示位相的相反，也不表示偶数半波带在P点就是暗纹。

n为奇数

$$\tilde{E}(P) = \frac{1}{2} [A_1 + A_n]$$

n为偶数

$$\tilde{E}(P) = \frac{1}{2} [A_1 - A_n]$$

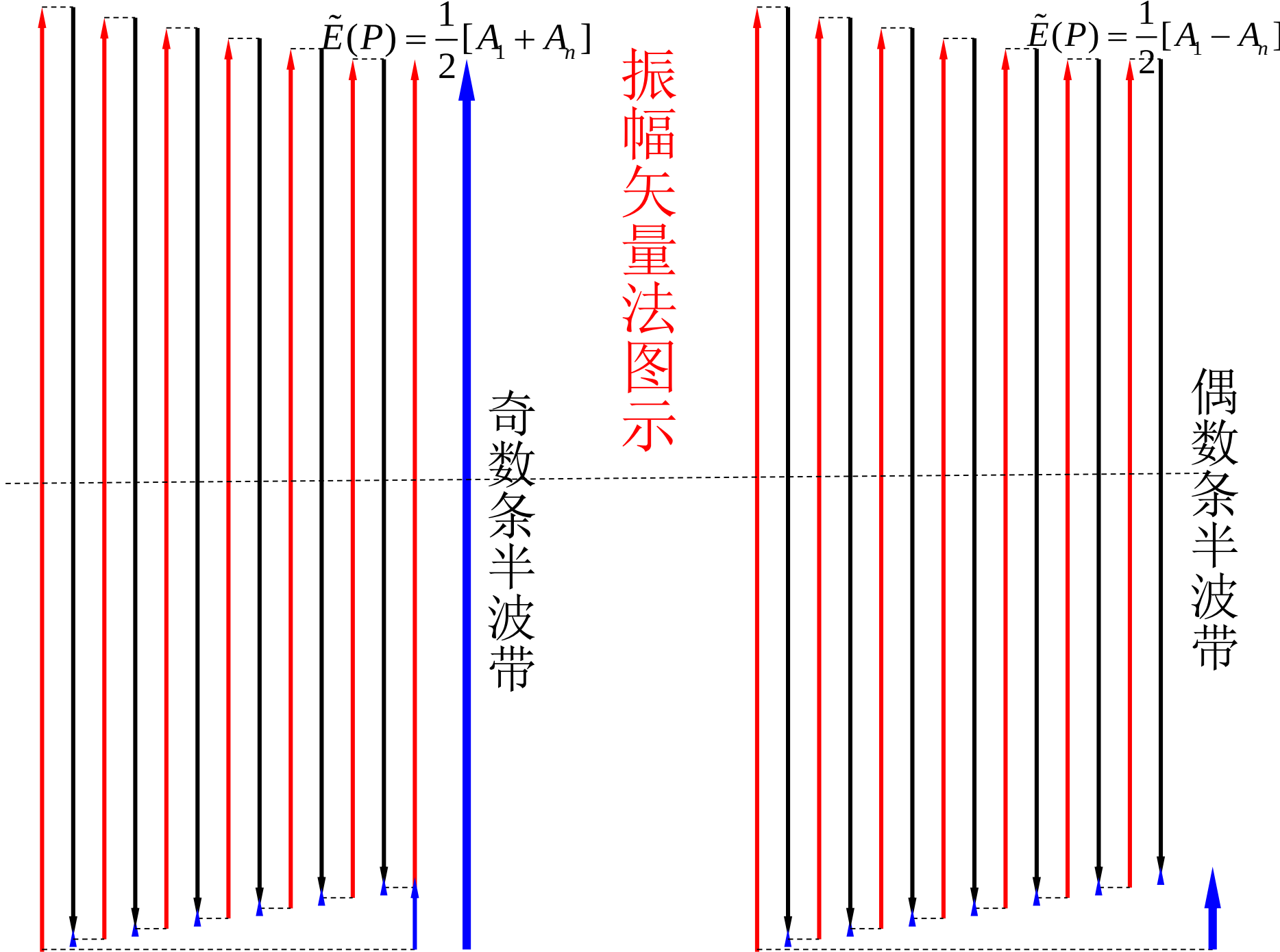
振幅矢量法图示

$$\tilde{E}(P) = \frac{1}{2}[A_1 + A_n]$$

奇数条半波带

$$\tilde{E}(P) = \frac{1}{2}[A_1 - A_n]$$

偶数条半波带



2. 衍射现象的解释

$$\tilde{E}(P) = \frac{1}{2} [A_1 + (-1)^{n-1} A_n]$$

圆孔：波带数 n 为奇数，亮点； n 为偶数，暗点

自由传播

$$\begin{aligned} n &\rightarrow \infty \\ A_n &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad E(P) = \frac{1}{2} A_1 \quad I_0 = \frac{1}{4} A_1^2$$

始终亮点

圆屏：相当于自由传播时前 n 个半波带被遮住

$$E(P) = \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k = \frac{1}{2} A_{n+1} \quad \text{始终亮点}$$

3. 半波带方程

- 半波带数

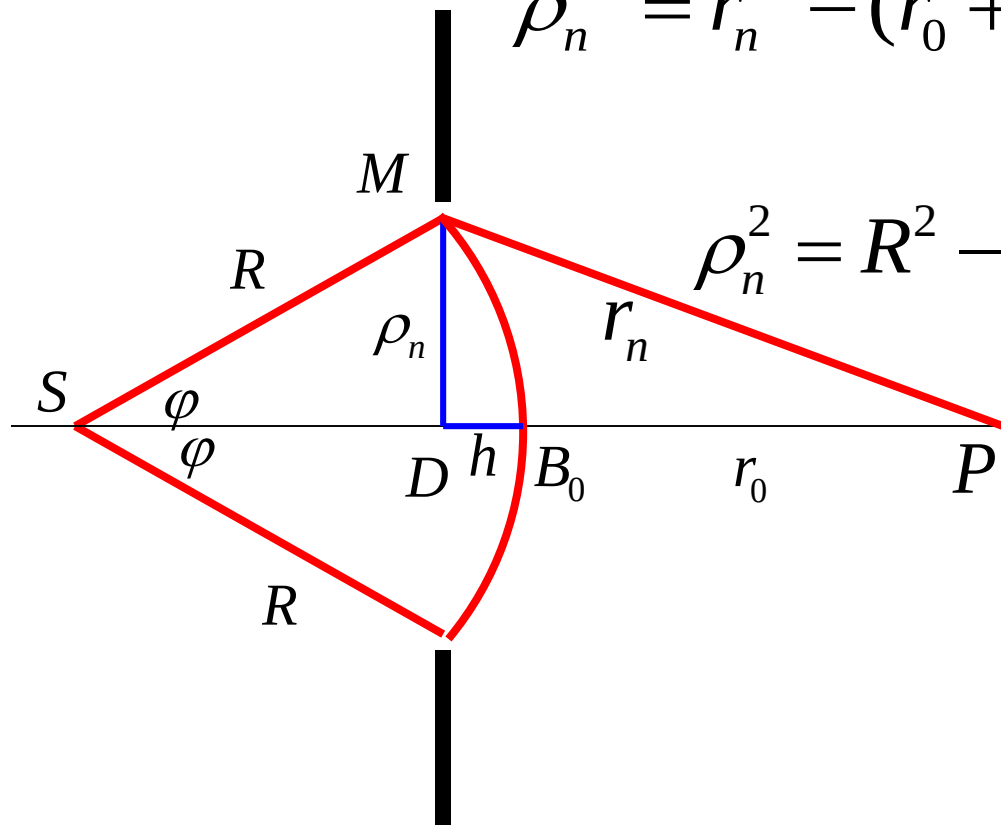
$$r_n^2 - r_0^2 = \left(r_0 + n\frac{\lambda}{2}\right)^2 - r_0^2 = nr_0\lambda + \left(\frac{n}{2}\lambda\right)^2 \approx n\lambda r_0$$

$$\begin{aligned}\rho_n^2 &= r_n^2 - (r_0 + h)^2 = r_n^2 - r_0^2 - 2r_0h - h^2 \\ &\approx n\lambda r_0 - 2r_0h\end{aligned}$$

$$\rho_n^2 = R^2 - (R - h)^2 = 2Rh - h^2 \approx 2Rh$$

$$n\lambda r_0 - 2r_0h = 2Rh$$

$$h = \frac{nr_0}{2(R + r_0)} \lambda$$

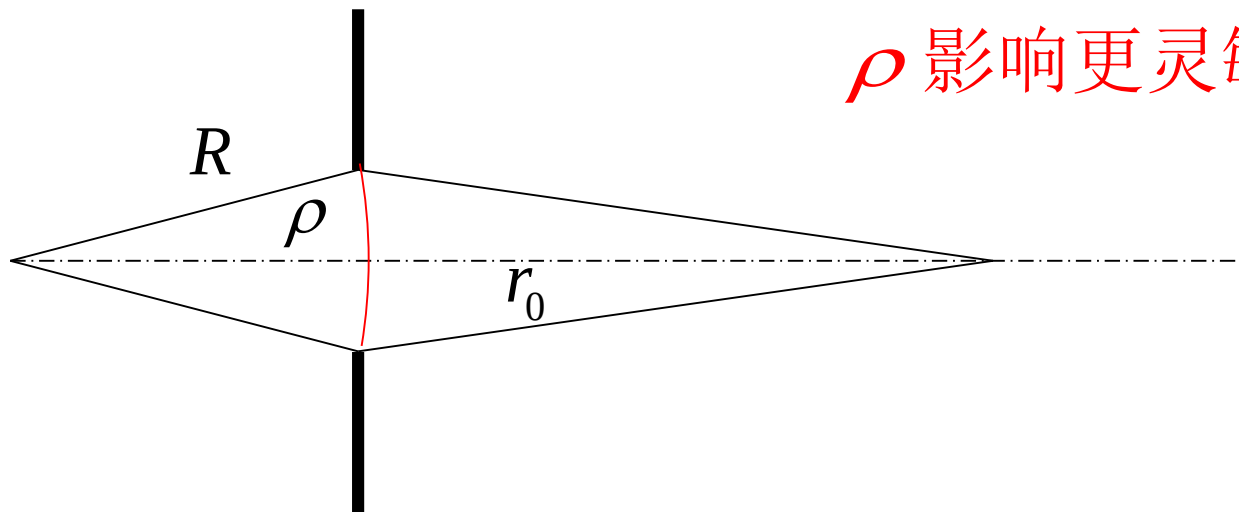


$$\rho_n^2 \approx 2Rh = 2R \frac{nr_0}{2(R+r_0)} \lambda = \frac{nr_0 R}{R+r_0} \lambda$$

$$n = \frac{\rho_n^2}{\lambda} \frac{R+r_0}{Rr_0}, \quad \rho_n = \sqrt{n} \rho_1, \quad \rho_1 = \sqrt{\frac{r_0 \lambda R}{R+r_0}}$$

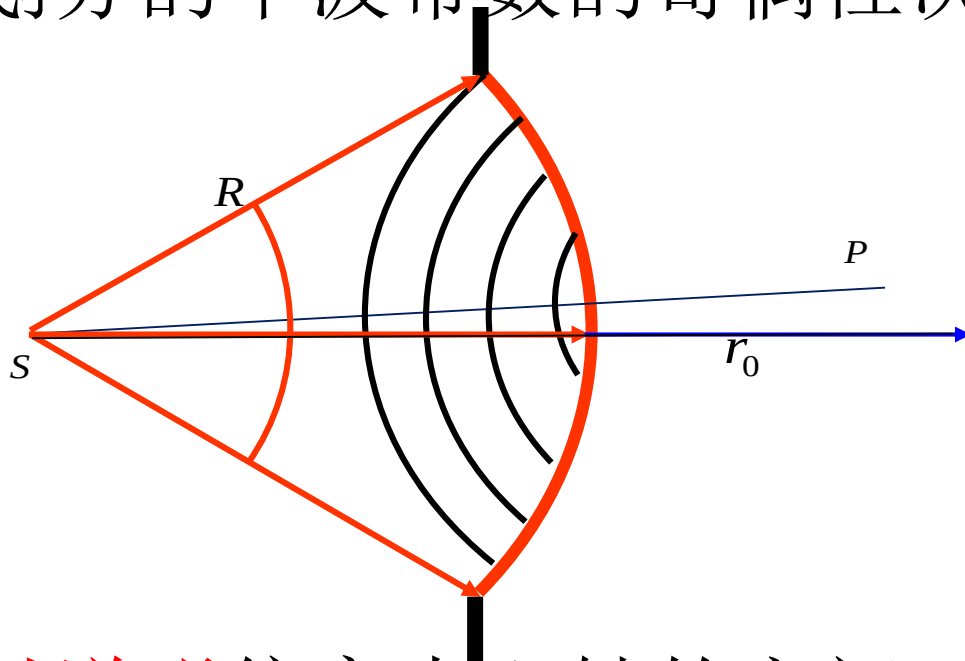
$$n = \frac{\rho^2}{\lambda} \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{R} \right) \quad \text{半波带方程}$$

λ, R 一定时, n 的数值及奇偶性由 ρ^2 和 r_0 决定。



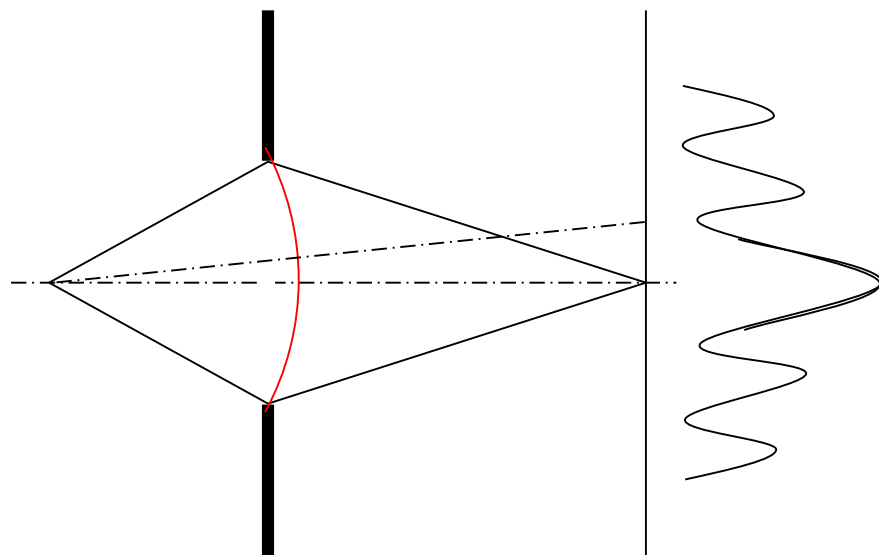
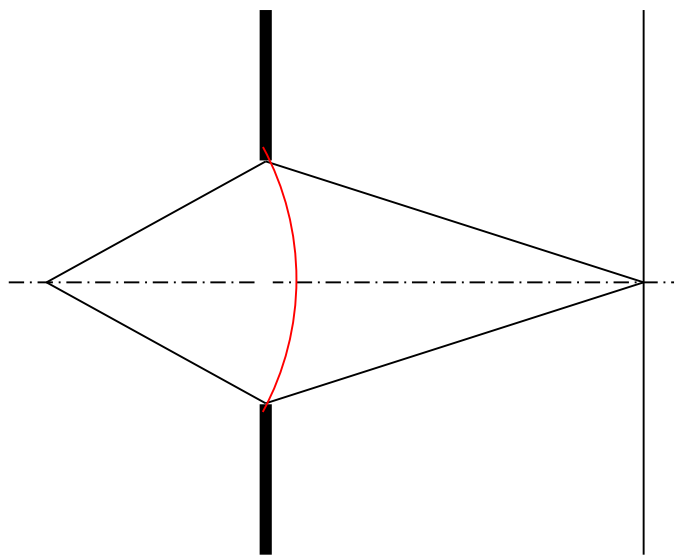
偏离中心轴上的点

对于偏离中心轴上的点，也同样在波面上划分半波带(圆孔和环带不同心)，而所剩余未划到的部分总是少量，对光强的分布影响不大。这样所划分的半波带数的奇偶性决定该空间点明暗。

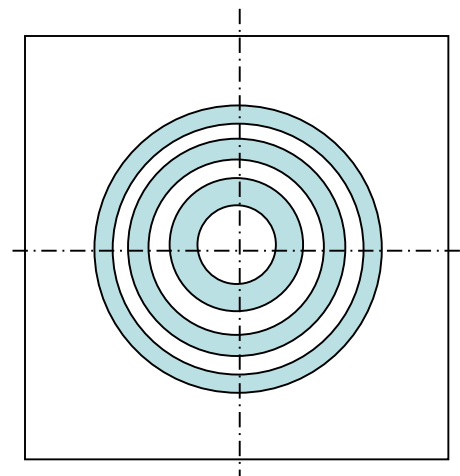


可定性的可以说明偏离中心轴的空间是明暗交替的。

菲涅耳圆孔衍射花样



由于装置具有中心轴对称，
空间是**明暗交替的圆环**。



4.2.3 一般情形下的波带(矢量图法)

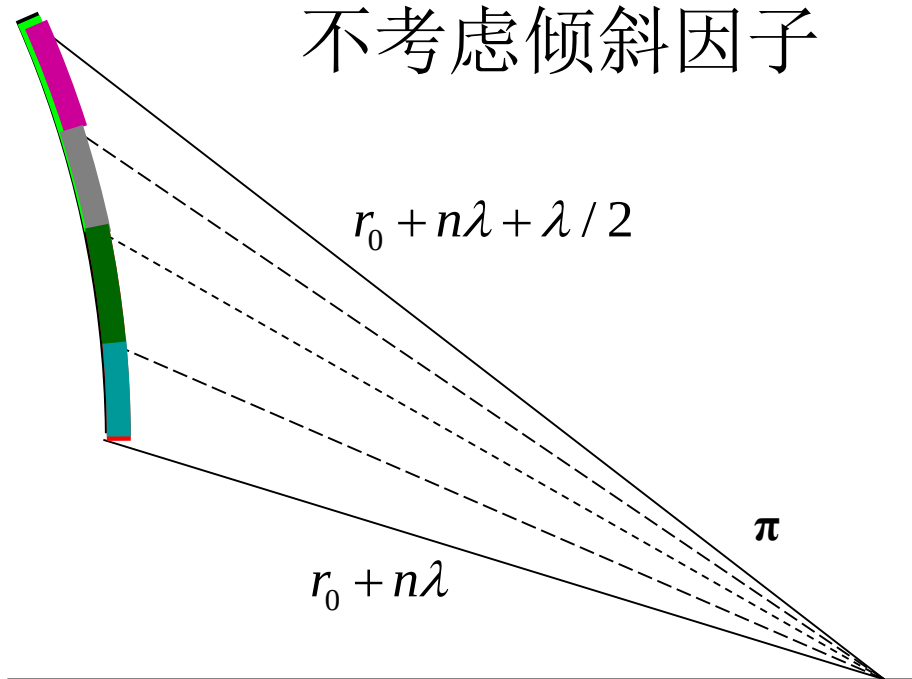
光孔不是刚好划分为整数个半波带，对半波带进一步划分

- 将每一个半波带划分为两个，则相邻波带发出的次波在P点位相差为 $\pi/2$ ；

如仍然不能整数划分

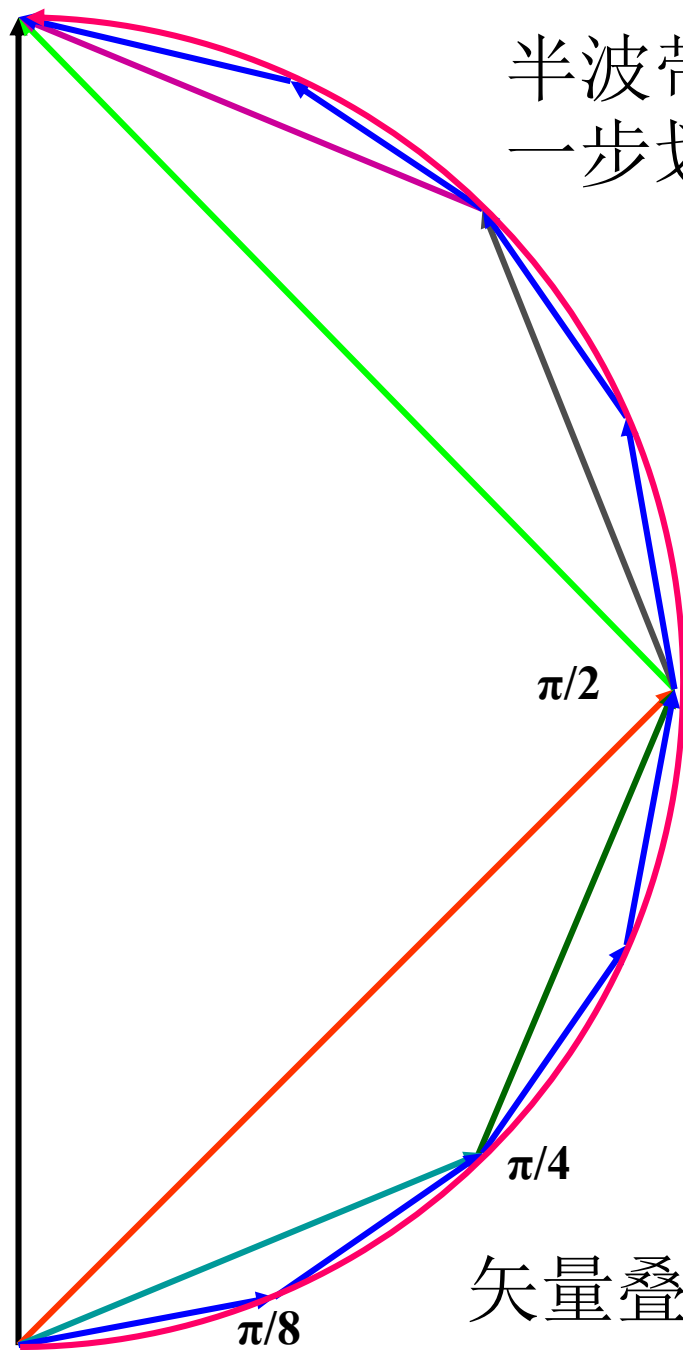
- 再将每一个波带进一步细分为三个，每个半波带中相邻波带的位相差为 $\pi/3$ ，
-
- 可将任何一个半波带进一步细分为n个，得到更多的波带，相邻波带间光程差为 $\lambda/2n$ ，位相差为 π/n 。

不考虑倾斜因子



n 很大时，位相差很小，
用振幅矢量法，原来的
每个半波带的波矢变为
由 n 个小波矢组成的半
圆。

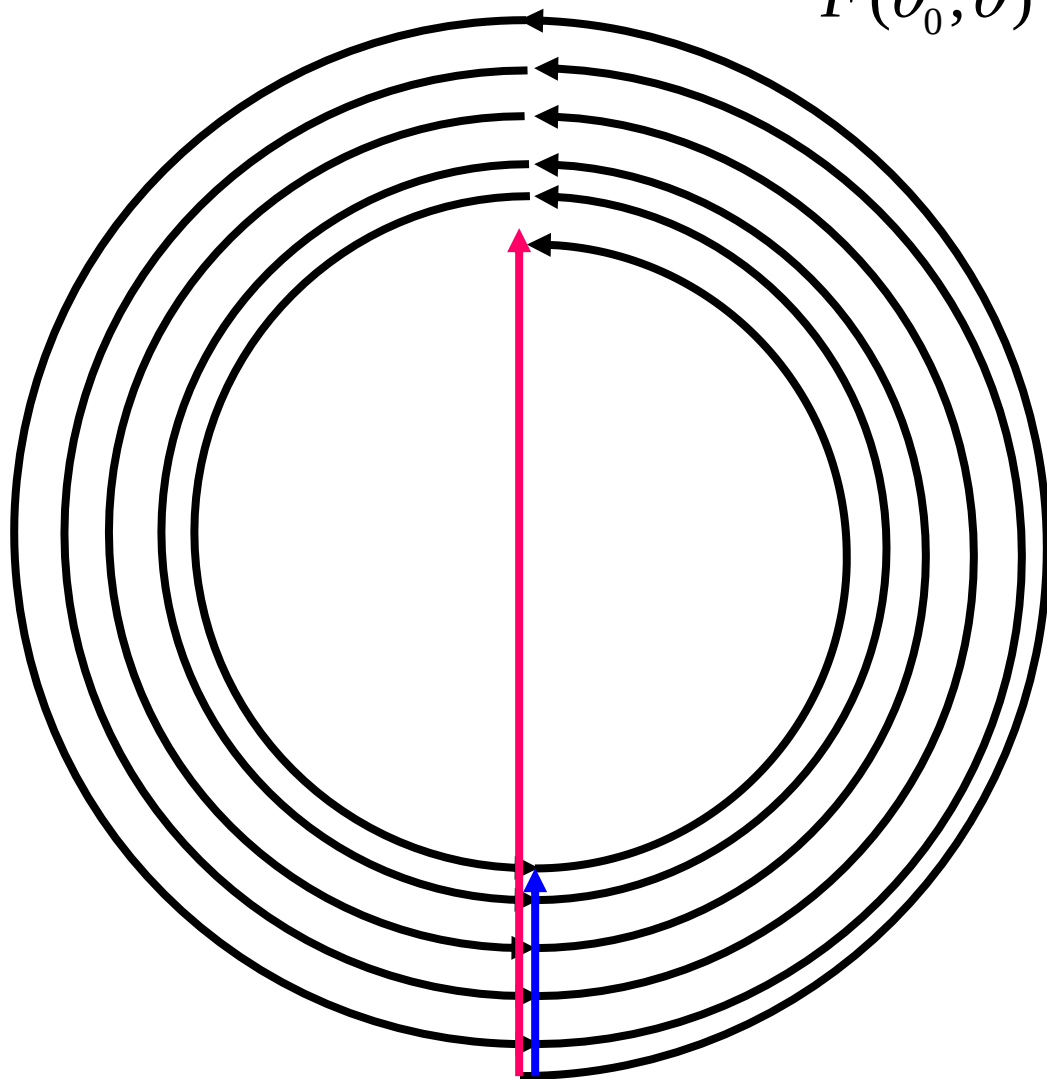
半波带的进
一步划分



矢量叠加法

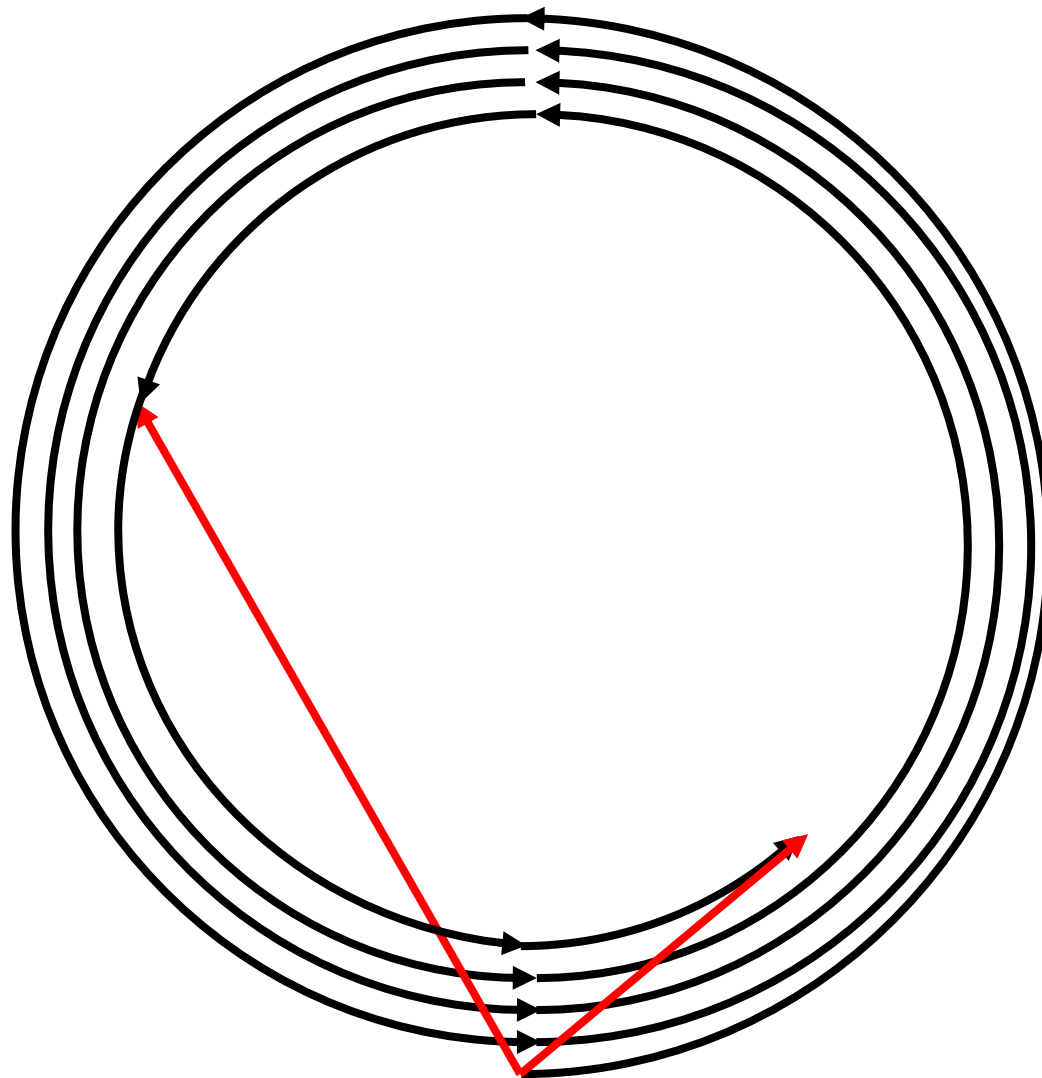
考虑倾斜因子（圆环半径逐渐减小）

$$F(\theta_0, \theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta_m)$$



整数个半波带

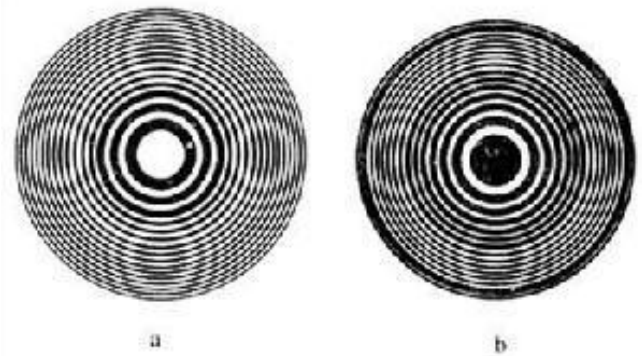
如果最后一个不是整数个半波带，也可以得到合振动。



不是整数个半波带

4.2.4 波带片

- 用半波带将波面分割，然后只让其中的奇数（或偶数）半波带透光，即制成波带片。
- 透过波带片的光，在场点P处光程差依次为 λ ，**位相相同，振动方向也相同**，合振动大大增强，衍射后的光强大大增强。
- 相当于将光波汇聚到P点。



菲涅耳波带片

- 一般情况下，可以认为**前面几个半波带**的倾斜因子相差不大，即满足近轴条件，所以他们发出的次波的**振幅近似相等**。

如果波带片共有20个半波带，则在P点的复振幅为

$$\tilde{E}(P) = A_1 + A_3 + A_5 + \cdots + A_{19} \approx 10A_1$$

光强

$$I(P) = 100A_1^2$$

自由传播时

$$\tilde{E}_0(P) = \frac{1}{2}A_1 \quad I_0(P) = \frac{1}{4}A_1^2$$

相差400倍。可见波带片具有使光汇聚的作用

波带方程

$$n = \frac{\rho^2}{\lambda} \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{R} \right)$$

- 将半波带方程写成如下形式 $\frac{1}{R} + \frac{1}{r_0} = \frac{n\lambda}{\rho^2} = \frac{1}{f}$
- 同透镜的公式
- 任一波带片，不同波长，焦距是不同的。

$$f = \frac{\rho^2}{n\lambda}$$

- 对平行光，波带片为平面的。
- 除主焦点之外，还有许多次焦点。

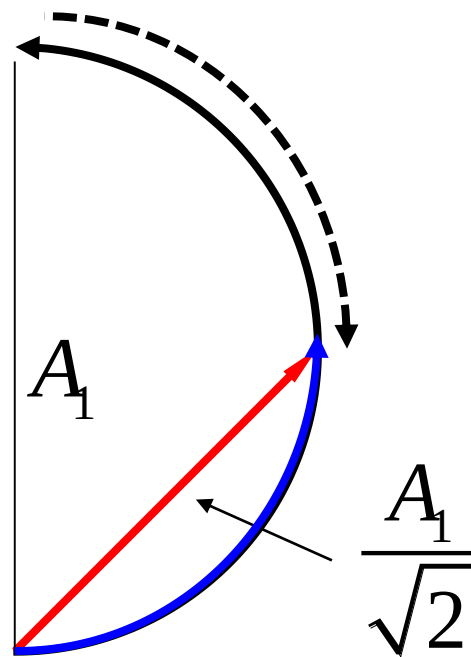
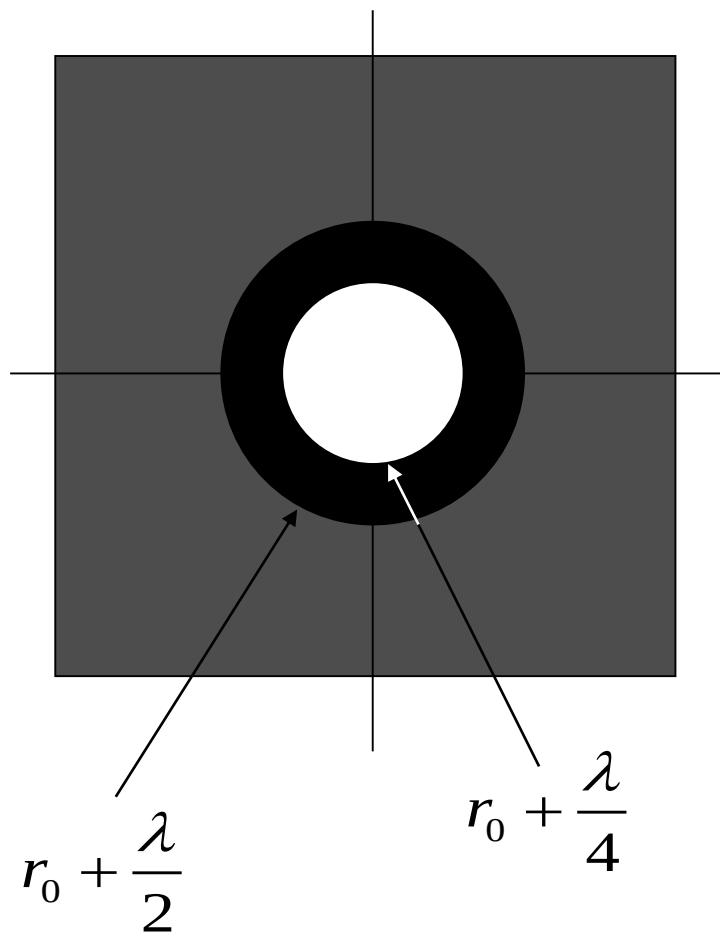
$$\frac{1}{R} + \frac{1}{r_0} = \frac{n\lambda}{\rho^2} = \frac{1}{f}$$

平行光 $R \rightarrow \infty$ $n = \frac{\rho^2}{\lambda} \frac{1}{r_0}$

- 当波带片不变时， r_0 改变，会引起 n 的改变，即可划分的半波带数目改变。
- r_0 减小，到 $r_0/2$ 时， $n'=2n$ ，暗点；
- r_0 减小，到 $r_0/3$ 时， $n'=3n$ ，亮点，次焦点；
- r_0 减小，到 $r_0/4$ 时， $n'=4n$ ，暗点.....

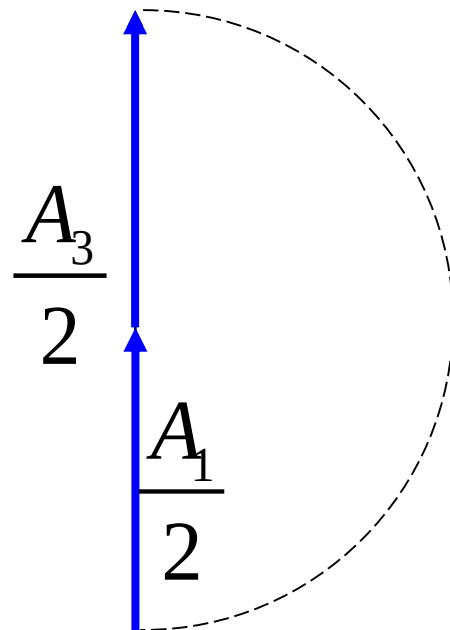
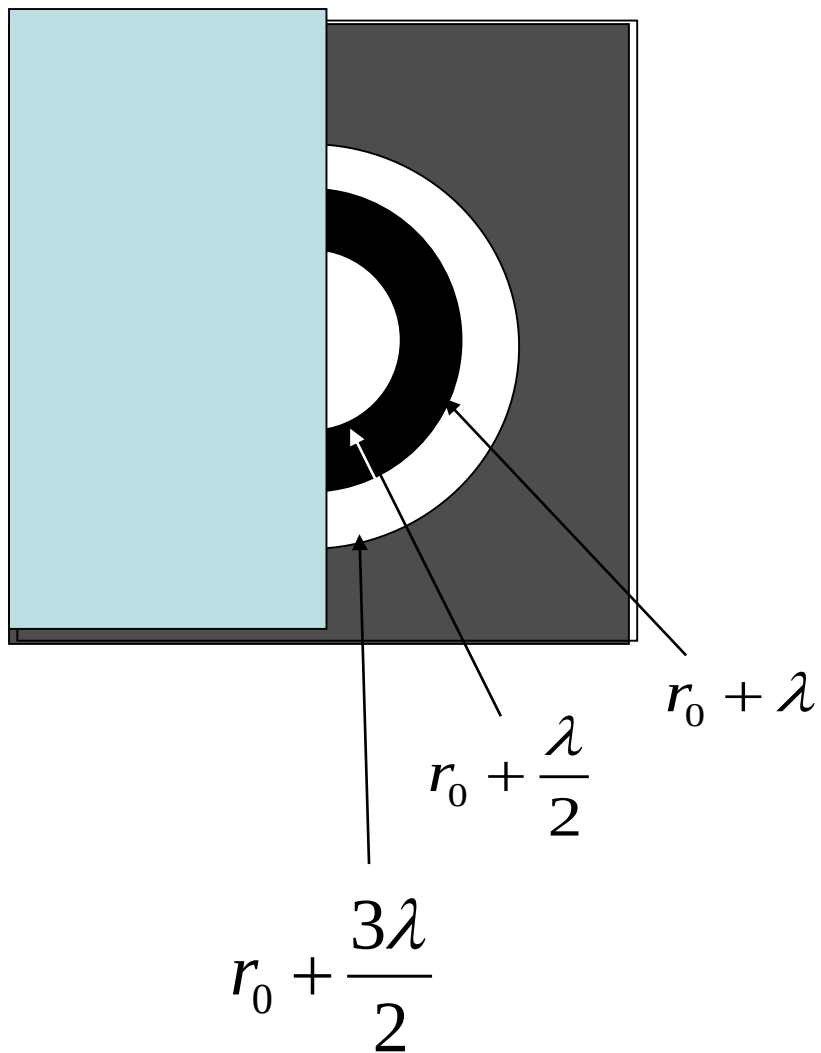
$$f' = \frac{f}{3}, \frac{f}{5}, \dots, \frac{f}{2m+1} \quad \text{一系列次焦点}$$

矢量法求解菲涅耳衍射问题



$$I = \frac{A_1^2}{2} = 2I_0, I_0 = \frac{A_1^2}{4}$$

衍射光强是自由传播的几倍？



$$\frac{A_1}{2} + \frac{A_3}{2} \approx A_1$$

$$I = A_1^2 = 4I_0, I_0 = \frac{A_1^2}{4}$$