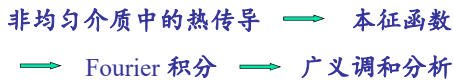


## Ch. 5 Fourier 分析的进一步讨论

- 5.1 热传导的其它方面
  - 5.2 Sturm-Liouville 系统
  - 5.3 Fourier 变换简介
  - 5.4 广义调和分析
- 附: 短时Fourier 变换和小波变换简介



1

## 5.1 热传导的其它方面

1. 地下温度的变化
2. 传热方程的数值积分
3. 非均匀介质中的热传导

2

### 1. 地下温度的变化

地表日平均温度  $f(t)$  可看作以一年为周期的函数, 并展为 Fourier 级数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2\pi i n t / T}, \quad \bar{C}_n = C_{-n}, \quad T = 1 \text{ year}$$

$T = 3.15 \times 10^7 \text{ sec}$

忽略地面曲率和每天中的变化, 得地下温度变化的简化模型:  $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$ ,  $\theta(0, t) = f(t)$

均质, 半无限体

边界条件

土的热扩散系数  $\kappa \approx 2 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$

一年中扩散的距离  $\sim \sqrt{\kappa T} \approx 2.50 \text{ m}$

日变化的长度尺度  $\sim \sqrt{\kappa T / 365} \approx \sqrt{\kappa T} / 19 \approx 0.13 \text{ m}$

3

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad \theta(0, t) = f(t)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2\pi i n t / T}, \quad \bar{C}_n = C_{-n}$$

寻找形为  $\theta(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n w_n(x) e^{2\pi i n t / T}$  的解, 规定

① 每一项都满足微分方程

②  $w_n(0) = 1$

边界条件自动满足

③  $w_n(x)$  有界, 且当  $x \rightarrow \infty$  时,  $w_n(x) \rightarrow 0$ ,  $n \neq 0$

深处温度不受地表温度影响

可放宽为  $w_n(x)$  有限

4

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad \theta(0, t) = f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2\pi i n t / T} \quad \theta(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n w_n(x) e^{2\pi i n t / T}$$

$$\frac{d^2 w_n}{dx^2} = P_n^2 w_n, \quad P_n^2 \equiv \frac{2\pi n}{\kappa T} i$$

令  $q_n = \left( \frac{|n| \pi}{\kappa T} \right)^{1/2} > 0$ , 则  $P_n = (1 \pm i) q_n$

+  $\rightarrow n > 0$   
-  $\rightarrow n < 0$

通解:  $w_n(x) = A_n e^{(1 \pm i) q_n x} + B_n e^{-(1 \pm i) q_n x}$

由③,  $A_n = 0$  由②,  $B_n = 1$   $w_n(0) = 1$

解:  $\theta(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-(1 \pm i) q_n x} e^{2\pi i n t / T}$

5

实数形式  $\theta(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-(1 \pm i) q_n x} e^{2\pi i n t / T} \quad q_n = \left( \frac{|n| \pi}{\kappa T} \right)^{1/2}$

$$C_n = |C_n| e^{i \gamma_n}, \quad C_{-n} = |C_n| e^{-i \gamma_n}$$

$$\theta(x, t) = |C_0| + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| e^{-q_n x} \cos \left( 2\pi n \frac{t}{T} + \gamma_n - q_n x \right)$$

$(\omega t + \theta_0 - q x)$  — 行波

频率:  $n/T$  波数:  $q_n / 2\pi$  基频:  $1/T$

传播速度:  $\frac{2\pi n}{q_n T} = \left( \frac{4\pi \kappa |n|}{T} \right)^{1/2}$

衰减系数  $q_n \propto |n|^{1/2}$  最重要的贡献来自  $n=1$

6



## 方法的选择

解析解可用于验证数值方法的可靠性

### 分析方法:

更好地洞悉问题的本质, 涉及奇异性、强间断的问题  
线性或弱非线性, 简单几何形状

### 数值方法:

普遍适用, 但难于获得规律性  
了解很少的问题, 可通过数值实验获得对现象的一般了解

### 混合方法:

对粗糙模型的分析, 找出最重要的作用和参数范围  
对更复杂模型的数值分析, 得到所需要的细节

13

## 3. 非均匀介质中的热传导

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)$$

分离变量:  $\theta(x, y, z, t) = U(x, y, z) e^{-\lambda t}$

一维情况, 得  $\frac{d}{dx} \left( k \frac{dU}{dx} \right) + \lambda \rho c U = 0$

考虑边界条件  $U(0) = U(L) = 0$  均匀情况仅对  $\lambda$  的某些离散值有非平凡解

可期望得到形为  $\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n U_n(x) e^{-\lambda_n t}$  的解

14

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \quad \theta(x, t) = U(x) e^{-\lambda t}$$

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dU_n}{dx} \right) + \lambda_n \rho c U_n = 0, \quad U_n(0) = U_n(L) = 0$$

通常, 仅对某些常数  $\lambda_n, n=1, 2, \dots$  有非平凡解

$\lambda_n$  — 本征值 eigenvalue  
 $U_n$  — 本征函数 eigenfunction

变系数  $\rightarrow$  本征值/本征函数  $\rightarrow$  以本征函数系展开  
Sturm-Liouville 系统

问题归结于求本征值和对应的本征函数, 特别是前几个较小的本征值和对应的本征函数

方法: 数值积分、渐近展开...

15

## 振动方程

$$\rho c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

分离变量:  $w(x, y, z, t) = W(x, y, z) e^{-i\omega t}$

令  $\omega^2 = \lambda$ , 则关于  $W$  的本征方程与  $U$  相同

振动  $\rightarrow$  离散频谱  $\rightarrow$  基频

16

## 5.2 Sturm-Liouville 系统

1. 二阶 Sturm-Liouville 型微分方程
2. 本征值和本征函数
3. 本征函数和本征值的渐近近似
4. 计算本征值和本征函数的其它方法

17

## 1. 二阶 Sturm-Liouville 型微分方程

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dU}{dx} \right] + [\lambda \rho(x) - q(x)] U = 0$$

其中  $\lambda$  为参数,  $p, \rho, q$  为  $x$  的实值函数且  $p, \rho > 0$

齐次边界条件:  $\begin{cases} \alpha U(a) + \beta U'(a) = 0 \\ \gamma U(b) + \delta U'(b) = 0 \end{cases}$

- 则: ① 仅对某些实的离散值  $\lambda_i$  才有非平凡解  $U_i$   
② 这些非平凡解以  $\rho(x)$  为权相互正交  
③ 存在无限多个本征值  
④ 可在适当意义下将一大类函数展为本征函数的无穷级数

18

## 2. 本征值和本征函数

本征值：实数，可数集，离散谱，无上界

本征函数：实函数，大的本征值对应的高阶本征函数振荡激烈

可数集：存在一映射可将它映上正整数集  $Z^+$

例：[0,1] 中的有理数构成可数集  
[0,1] 中的实数构成不可数集

离散谱：对任一  $\lambda_i$ ，存在一  $\delta_i$ ，使区间  $(\lambda_i - \delta_i, \lambda_i + \delta_i)$  中不包含其它本征值

19

## 正交性和正规化

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dU}{dx} \right] + [\lambda \rho(x) - q(x)] U = 0$$

设  $\lambda_i, \lambda_j$  为两个本征值，相应的本征函数为  $U_i, U_j$

$$\frac{d}{dx} \left( p \frac{dU_i}{dx} \right) + (\lambda_i \rho - q) U_i = 0 \quad \times U_j$$

$$\frac{d}{dx} \left( p \frac{dU_j}{dx} \right) + (\lambda_j \rho - q) U_j = 0 \quad \times U_i$$

相减  $\rightarrow$

$$U_j \frac{d}{dx} \left( p \frac{dU_i}{dx} \right) - U_i \frac{d}{dx} \left( p \frac{dU_j}{dx} \right) + (\lambda_i - \lambda_j) \rho U_i U_j = 0$$

20

$$U_j \frac{d}{dx} \left( p \frac{dU_i}{dx} \right) - U_i \frac{d}{dx} \left( p \frac{dU_j}{dx} \right) + (\lambda_i - \lambda_j) \rho U_i U_j = 0 \quad \begin{cases} \alpha U(a) + \beta U'(a) = 0 \\ \gamma U(b) + \delta U'(b) = 0 \end{cases}$$

$$\text{可证 } \int_a^b \left[ U_j \frac{d}{dx} \left( p \frac{dU_i}{dx} \right) - U_i \frac{d}{dx} \left( p \frac{dU_j}{dx} \right) \right] dx = 0$$

分部积分 + 边界条件

$$\rightarrow (\lambda_i - \lambda_j) \int_a^b \rho U_i U_j dx = 0$$

$$\text{如 } \lambda_i \neq \lambda_j, \text{ 则 } \int_a^b \rho(x) U_i(x) U_j(x) dx = 0 \quad \text{正交}$$

$$\text{归一化: 调整 } U_i \text{ 的大小, 使 } \int_a^b \rho(x) U_i(x) U_i(x) dx = 1$$

$$(U_i, U_j) = \delta_{ij} \quad \begin{matrix} \text{正规化} \\ \text{normalization} \end{matrix}$$

21

对多重本征值  $\lambda_n$ ，如有  $s$  个线性无关的本征函数  $U_{n1}, U_{n2}, \dots, U_{ns}$ ，可通过 Gram-Schmidt 过程构筑一组相互正交的本征函数并归一化。

例：双重本征值  $\lambda \rightarrow U_1, U_2$

$$\text{正交化: } \bar{U}_1 = U_1, \quad \bar{U}_2 = U_2 - \frac{(U_1, U_2)}{(U_1, U_1)} U_1$$

$$\text{归一化: } \tilde{U}_1 = \frac{\bar{U}_1}{(\bar{U}_1, \bar{U}_1)^{1/2}}, \quad \tilde{U}_2 = \frac{\bar{U}_2}{(\bar{U}_2, \bar{U}_2)^{1/2}}$$

22

## 以本征函数展开

以  $\{\phi_n(x)\}$  表示一正规化的本征函数集，即  $(\phi_m, \phi_n) = \delta_{mn}$

则可以用  $\{\phi_n(x)\}$  将任意函数  $f(x)$  表示为级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

$$\text{其中 } c_n = (\phi_n, f) = \int_a^b \rho(x) \phi_n(x) f(x) dx$$

为保证级数收敛于  $f(x)$ ，必须证明本征函数集对某类函数的完备性

23

## 3. 本征函数和本征值的渐近近似

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dU}{dx} \right] + [\lambda \rho(x) - q(x)] U = 0 \quad \begin{matrix} \text{化为 Liouville} \\ \text{标准形} \end{matrix}$$

引入新自变量  $t = t(x)$  和因变量  $w$ ，使得

$$U = y(x)w \quad \begin{matrix} \text{两个待定函数} \end{matrix}$$

①  $\frac{dw}{dt}$  的系数为 0；②  $\lambda$  的系数为 1

$$\text{则应取 } U(x) = \frac{w}{[p(x)\rho(x)]^{1/4}}, \quad t(x) = \int \left[ \frac{\rho(x)}{p(x)} \right]^{1/2} dx$$

$$\rightarrow \frac{d^2 w}{dt^2} + [\lambda - \hat{q}(t)] w = 0$$

$$\text{其中 } \hat{q} = \frac{q}{\rho} + (p\rho)^{-1/4} \frac{d^2}{dt^2} \left[ (p\rho)^{1/4} \right]$$

24

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + [\lambda - \hat{q}(t)]w = 0 \quad t(x) = \int \left[ \frac{\rho(x)}{p(x)} \right]^{1/2} dx$$

当  $\lambda \gg \hat{q}$  时, 有近似解  $e^{\pm i\lambda^{1/2}t}$

设  $w(t) = \exp(\pm i\lambda^{1/2}t)[w_0 + \lambda^{-1/2}w_1(t) + \dots]$

边界条件: 令  $t = \int_a^x \left[ \frac{\rho(\xi)}{p(\xi)} \right]^{1/2} d\xi \rightarrow$

$$t_a = 0, \quad t_b = \int_a^b \left[ \frac{\rho(\xi)}{p(\xi)} \right]^{1/2} d\xi$$

第一类边界条件:  $w(0) = 0, w(t_b) = 0$

25

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + [\lambda - \hat{q}(t)]w = 0 \quad w(0) = 0, w(t_b) = 0$$

一阶近似:

$$\lambda_n^2 = n\pi \left\{ \int_a^b \left[ \frac{\rho(x)}{p(x)} \right]^{1/2} dx \right\}^{-1} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$U_n(x) = [p(x)\rho(x)]^{-1/4} \sin \left\{ n\pi \frac{\int_a^x [\rho(x)/p(x)]^{1/2} dx}{\int_a^b [\rho(x)/p(x)]^{1/2} dx} \right\} \cdot \left[ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

26

例: Bessel 方程

$$U(x) = \frac{w}{[p(x)\rho(x)]^{1/4}}, \quad t(x) = \int \left[ \frac{\rho(x)}{p(x)} \right]^{1/2} dx$$

$$\frac{d}{dx} \left( x \frac{dU}{dx} \right) + \left( k^2 x - \frac{m^2}{x} \right) U = 0$$

$$p = \rho = x, \quad q = \frac{m^2}{x} \rightarrow U = wx^{-1/2}, \quad x = t$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \left( k^2 - \frac{m^2 - 1/4}{x^2} \right) w = 0$$

当  $k$  很大,  $x$  不在 0 附近时, 一阶近似通解为:

$$w(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$$

27

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \left( k^2 - \frac{m^2 - 1/4}{x^2} \right) w = 0$$

对第一类边界条件  $w(a) = w(b) = 0$

$$\text{得 } w_n(x) = \sin k_n(x-a), \quad k_n = \frac{n\pi}{b-a}$$

$$\text{如 } a=1, b=2 \rightarrow k_1 \approx \pi$$

精确解:  $m=0 \quad 3.1 < k_1 < 3.2 \quad k_1^2 \approx \pi^2 \gg \frac{1}{4x^2}$

$$m = \frac{1}{2} \quad k_1 = \pi$$

28

#### 4. 计算本征值和本征函数的其它方法

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dU}{dx} \right] + [\lambda \rho(x) - q(x)]U = 0$$

如可找到两个相互独立的基本解  $U_1(x, \lambda), U_2(x, \lambda)$

则通解  $U = c_1 U_1(x, \lambda) + c_2 U_2(x, \lambda)$   $\lambda$  为参数, 非本征值 不受边界条件限制

如果  $\lambda$  是方程满足边界条件  $U(a) = 0, U(b) = 0$  的

本征值, 则有  $\begin{cases} c_1 U_1(a, \lambda) + c_2 U_2(a, \lambda) = 0 \\ c_1 U_1(b, \lambda) + c_2 U_2(b, \lambda) = 0 \end{cases}$

于是  $U_1(a, \lambda)U_2(b, \lambda) - U_1(b, \lambda)U_2(a, \lambda) = 0$

问题转化为求函数的零点 (数值方法)

29

#### 5.3 Fourier 变换简介

1. Fourier 变换公式和 Fourier 恒等式

2. 用 Fourier 变换解热传导方程

讨论杆中热传导问题当  $L \rightarrow \infty$  时的极限

30

## 1. Fourier 变换公式和 Fourier 恒等式

长为  $L$  的杆中热传导问题，由初始条件

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} \quad \text{确定展开式的系数:}$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(\xi) e^{-in\pi\xi/L} d\xi$$

如  $L$  固定，当  $n \rightarrow \infty$  时， $c_n \rightarrow 0$  高度振荡，抵消

但当  $n \sim L$  时不成立 关键:  $n/L$

无法简单地推广到  $L \rightarrow \infty$  的情况

31

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(\xi) e^{-in\pi\xi/L} d\xi \quad f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$$

引入  $k \equiv \frac{n\pi}{L}$ ,  $\Delta k = \frac{\pi}{L}$   $n$  增加时  $k$  的增量

$$\text{则 } c_n = c(k) = \frac{\Delta k}{2\pi} \int_{-L}^L f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi$$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ e^{ikx} \cdot \frac{\Delta k}{2\pi} \int_{-L}^L f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right]$$

$$k = \dots, -2\Delta k, -\Delta k, 0, \Delta k, 2\Delta k, \dots$$

$$L \rightarrow \infty \quad \Delta k \rightarrow 0 \quad \rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{ik(x-\xi)} d\xi$$

假设  $|x| > A$  时  $f(x) = 0$

Fourier 恒等式

32

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{ik(x-\xi)} d\xi$$

实际上，只要  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| d\xi$  存在，Fourier 恒等式就成立

$$\text{也可写为 } g(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \quad \text{Fourier 变换}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk \quad \text{Fourier 逆变换}$$

33

## 2. 用 Fourier 变换解热传导方程

无限长杆中的热传导问题  $\theta_t = \kappa \theta_{xx}$

分离变量:  $\theta = X(x)T(t)$  (要求  $X, T$  有限)

一般解为  $e^{ikx - k^2 \kappa t}$   $k$  - 实数 连续谱  
正弦分布

$$\text{得 } \theta(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp(ikx - k^2 \kappa t) dk$$

幅度      频率      衰减       $A(k)$  - 权函数

34

$$\theta(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp(ikx - k^2 \kappa t) dk$$

初始条件  $\theta(x, 0) = f(x)$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp(ikx) dk$$

$$\rightarrow A(k) = \frac{g(k)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \rightarrow$$

$$\theta(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \exp[ik(x-\xi) - k^2 \kappa t] d\xi$$

$$\text{先积 } dk \quad \theta(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-(x-\xi)^2/4\kappa t} d\xi$$

与点源解结果相同

35

Fourier 分析可用于: 随时间变化的信号  
周期性结构

Fourier 级数: ① 定义在一个有限区间或周期函数  
② 即使  $f(x)$  连续, 边界仍可能间断  
③ 离散谱

Fourier 变换: ① 定义在无限域  
② 要求  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  存在  
③ 连续谱

36

## 5.4 广义调和分析

1. 一些无法用标准的 Fourier 方法分析的函数
2. 截断正弦函数的 Fourier 分析
3. 推广到稳态时间序列
4. 自相关函数和功率谱

讨论 Fourier 分析应用中的问题

非周期信号  
不衰减的信号  
噪音

37

## 1. 一些无法用标准的 Fourier 方法分析的函数

考虑几个周期函数的和

频谱:  $\delta$  函数

$$f(t) = A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t} + A_3 e^{i\omega_3 t}$$

无法表示为  
Fourier 级数  
Fourier 变换

如  $\omega_i / \omega_j$  非有理数, 则  $f(t)$  非周期函数

而另一个函数  $\phi(t) = e^{-\omega_0^2 t^2}$ ,  $\omega_0 > 0$  可以进行 Fourier 变换

非周期函数

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega_0^2 t^2 - i\omega t} dt = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\omega_0} e^{-\frac{\omega^2}{4\omega_0^2}}$$

38

## 2. 截断正弦函数的 Fourier 分析

实际观察时间都是有限的, 如何对一个有限的记录进行 Fourier 分析?

考虑截断正弦函数

$$f_T(t) = \begin{cases} A_0 e^{i\omega_0 t} & |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

Fourier 级数  $\rightarrow$  离散谱  
Fourier 变换  $\rightarrow$  连续谱

39

## Fourier 级数分析

$$f_T(t) = \begin{cases} A_0 e^{i\omega_0 t} & |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

以  $\Omega = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T}$  为基频, 在  $-T < t < T$  中

$$A_0 e^{i\omega_0 t} = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{in\Omega t}, \quad C_n = A_0 \frac{\sin(\omega_0 - n\Omega)T}{(\omega_0 - n\Omega)T}$$

最重要的分量为  $(\omega_0 - n\Omega)T$  较小时

如  $\omega_0 = k\Omega$ , 则  $C_k = C_{-k} = A_0$ ;  $C_i = 0, i \neq \pm k$   
仅有一个非零分量

40

$$A_0 e^{i\omega_0 t} = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{in\Omega t}, \quad C_n = A_0 \frac{\sin(\omega_0 - n\Omega)T}{(\omega_0 - n\Omega)T}$$

如  $k < \omega_0 / \Omega < k+1$ , 则  $C_k, C_{k+1}$  都是重要的  $\Omega T = \pi$

当  $\frac{\omega_0}{\Omega} = k + \frac{1}{2}$  时, 有

$$C_k = C_{k+1} = \frac{2A_0}{\pi} \approx 0.64A_0$$

两个频率的相对误差都是

$$\frac{1}{2k+1} \quad \text{记录时间在 10 个周期左右} \rightarrow \text{频率误差 5\%}$$

能量  $E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = |A_0|^2 \left( \langle A_0 e^{i\omega_0 t} \cdot \overline{A_0 e^{i\omega_0 t}} \rangle \right)$   $C_k, C_{k+1}: 80\% E$

41

## Fourier 积分分析

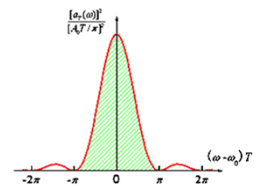
$$f_T(t) = \begin{cases} A_0 e^{i\omega_0 t} & |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

$$a_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T A_0 e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt = \frac{A_0 T}{\pi} \frac{\sin(\omega_0 - \omega)T}{(\omega_0 - \omega)T}$$

中心频带宽:  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\Omega$

所包含能量:

$$\mathcal{F} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \eta^{-2} \sin^2 \eta d\eta}{\int_{-\infty}^{\infty} \eta^{-2} \sin^2 \eta d\eta} \approx 90\%$$



无频率失真, 谱线变宽

反演:  $f_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} a_T(\omega) d\omega$

42

$a_T(\omega) = \frac{A_0 T \sin(\omega_0 - \omega)T}{\pi (\omega_0 - \omega)T}$

但当  $T \rightarrow \infty$ ,  $a_\infty(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} a_T(\omega) = \begin{cases} \infty & \omega = \omega_0 \\ \text{不确定} & \omega \neq \omega_0 \end{cases}$

为得到明确的极限值, 引入**累积振幅**

$A_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} a_T(\omega) d\omega = \frac{A_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\eta} \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta$      $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta = \pi$

其中  $\eta = (\omega - \omega_0)T$     当  $T \rightarrow \infty$  时,  $\omega < \omega_0, \eta \rightarrow -\infty$   
 $\omega > \omega_0, \eta \rightarrow \infty$

则  $T \rightarrow \infty$  时  $A_\infty(\omega) = \begin{cases} A_0 & \omega > \omega_0 \\ 0 & \omega < \omega_0 \end{cases}$

或:  $A_\infty(\omega) = A_0 H(\omega - \omega_0)$     Heaviside 函数

对  $A_\infty(\omega)$  的全部贡献来自  $\omega = \omega_0$

43

**反演**     $f_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} a_T(\omega) d\omega$      $A_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} a_T(\omega) d\omega$

引入 Stieltjes 积分

$I_A = \int_a^b F(\omega) dA = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_i F(\omega_i^*) [A(\omega_{i+1}) - A(\omega_i)]$

其中  $A(\omega)$  为  $\omega$  的单调增函数     $\omega_i \leq \omega_i^* \leq \omega_{i+1}$

则  $f_T(t) = \int_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} e^{i\omega t} dA_T(\omega)$      $A(\omega)$  可间断, 连续时得 Riemann 积分  $\int_a^b F(\omega) A'(\omega) d\omega$

此式当  $T \rightarrow \infty$  时仍有意义:  $f_\infty(t) = A_0 e^{i\omega_0 t}$

形式上, 有  $a_T = A_T'$      $A_\infty(\omega) = A_0 H(\omega - \omega_0)$

$a_\infty(\omega) = A_\infty'(\omega) = A_0 H'(\omega - \omega_0) = A_0 \delta(\omega - \omega_0)$

44

**Fourier 级数:**

- ① 实际上将记录以  $2T$  为周期开拓到  $(-\infty, \infty)$
- ② 分解为离散谱
- ③ 当记录不为整周期时发生畸变

Fourier 积分:

- ① 实际上将  $(-T, T)$  以外的记录取为 0
- ② 分解为连续谱
- ③ 会使频谱线变宽

45

**3. 推广到稳态时间序列**

考虑截断函数  $f_T(t) = \begin{cases} f(t) & |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$

定义  $a_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_T(t) e^{-i\omega t} dt$

则在区间  $(\omega, \omega + \Delta\omega)$  中  $a_T(\omega)$  的积累贡献为

$\Delta A_T(\omega) = \int_{\omega}^{\omega + \Delta\omega} a_T(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_T(t) \frac{e^{-i\omega t} - e^{-i(\omega + \Delta\omega)t}}{it} dt$

交换积分次序    容易收敛

46

$a_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_T(t) e^{-i\omega t} dt$      $\Delta A_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_T(t) \frac{e^{-i\omega t} - e^{-i(\omega + \Delta\omega)t}}{it} dt$

如  $T \rightarrow \infty$  时积分的极限存在, 可引入函数

$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1 - e^{-i\omega t}}{-it} dt$      $A(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} a_T(\omega) d\omega$

则  $f(t)$  可表示为 Stieltjes 积分

$f(t) = \int_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} e^{i\omega t} dA(\omega)$

$f(t) = (A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t} + A_3 e^{i\omega_3 t}) e^{-\omega_0^2 t^2}$

$A(\omega)$  在  $\omega = \omega_1, \omega_2, \omega_3$  有三个间断点

47

**4. 自相关函数和功率谱**     $f(x) = A_1 e^{i\omega_1 x} + A_2 e^{i\omega_2 x} + A_3 e^{i\omega_3 x}$   
 复杂函数/噪音?

自相关函数:

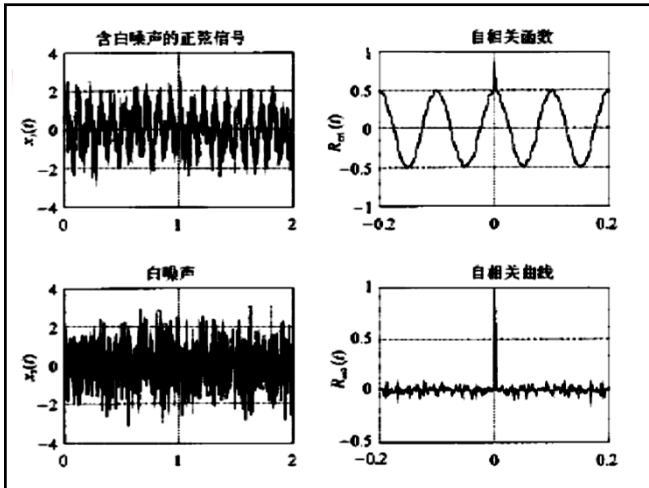
$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{t_0-T}^{t_0+T} \overline{f(t)} f(t+\tau) dt \equiv \langle \overline{f(t)}, f(t+\tau) \rangle_t$

对噪音或干扰信号, 当  $\tau \rightarrow \infty$  时,  $R(\tau) \rightarrow 0$     随机性

对  $f(t) = A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t} + A_3 e^{i\omega_3 t}$

$R(\tau) = |A_1|^2 e^{i\omega_1 \tau} + |A_2|^2 e^{i\omega_2 \tau} + |A_3|^2 e^{i\omega_3 \tau}$

48



按广义调和理论，存在一个功率谱

$$\frac{1}{2}F(\omega) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{|\Delta A|^2}{\Delta\omega}$$

$A(\omega)$ 为积累振幅

它与自相关函数有 Fourier 变换关系

$$R(\tau) = \int_0^\infty F(\omega) \cos \omega\tau d\omega$$

$$F(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R(\tau) \cos \omega\tau d\tau$$

当  $\tau=0$  时， $\langle |f(t)|^2 \rangle_t = \int_0^\infty F(\omega) d\omega$      $R(\tau) \equiv \langle f(t), f(t+\tau) \rangle_t$

能量                      功率谱

50

附：短时 Fourier 变换和小波变换简介

1. 短时 Fourier 变换 (窗口 Fourier 变换)
2. 小波变换 (Wavelet)

51

Fourier 变换把一个随时间变化的信号表示成一族具有不同频率的正弦波的线性叠加，时域中连续变化的信号转化为频域中的信号。因此 Fourier 变换是一种纯频域分析方法，适用于平稳变化的信号。

或空域 — 频域

对于具有突变性质的、非平稳变化的信号，人们尤其关心该信号在不同时刻的频率，即：需要时间和频率两个指标来刻画信号。但 Fourier 变换在时域上却没有任何分辨能力。因此需要时频分析方法来分析这种信号。

52

1. 短时 Fourier 变换 (窗口 Fourier 变换)

短时 Fourier 变换:  $G(\omega, \tau) = \int_R f(t)g(t-\tau)e^{-i\omega t} dt$

其中  $f(t) \in L^2(R)$ ,  $g(t)$  是具有紧支集的时限函数 (窗函数)

如  $g(t)$  的有效窗口宽度为  $\Delta t$ , 则  $G(\omega, \tau)$  给出  $f(t)$  在局部时间范围  $[\tau - \Delta t/2, \tau + \Delta t/2]$  内的频谱信息

53

Gabor 变换

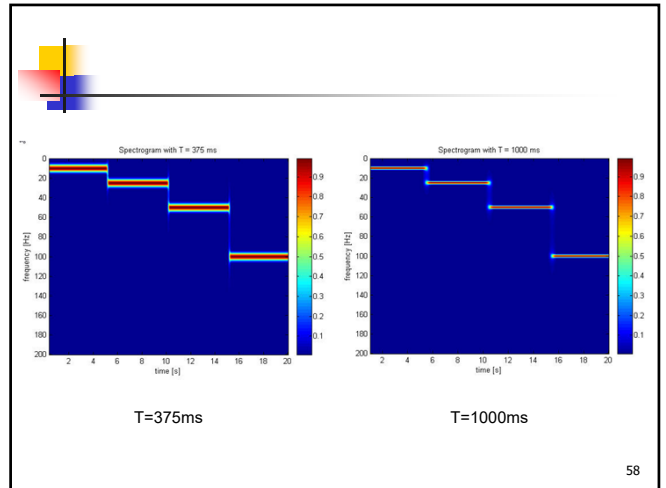
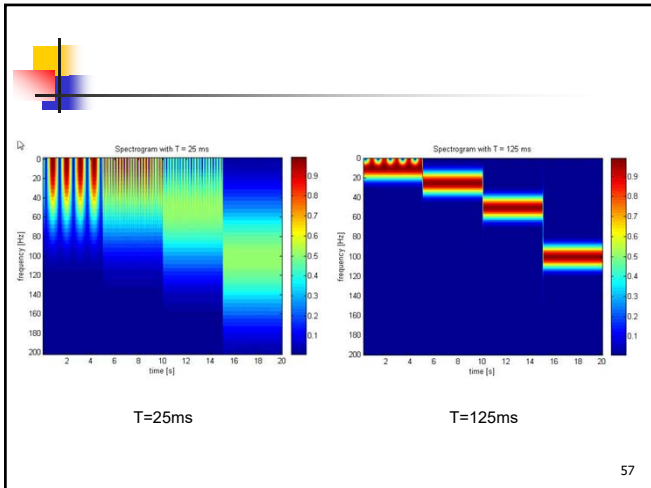
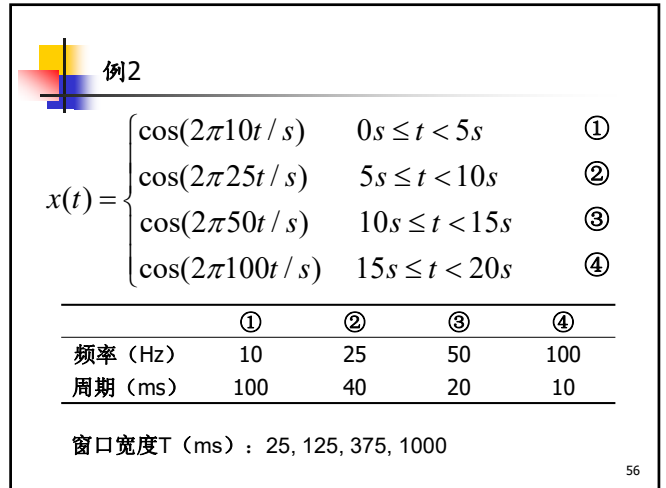
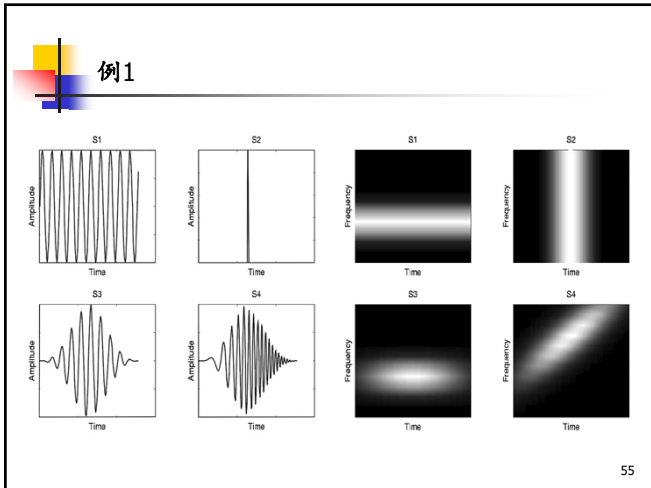
窗函数  $g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$

高斯窗函数

$$W_g f(\omega, \tau) = \int_R f(t)g(t-\tau)e^{-i\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{R^2} W_g f(\omega, \tau)g(t-\tau)e^{-i\omega t} d\omega d\tau$$

54



- 时频分析方法，可用于频率随时间变化的信号
- 窗口的大小和形状固定不变，取决于窗函数  $g(t)$
- 时间分辨率和频率分辨率不可能同时提高
- 使用高斯窗函数时可反演 (Gabor 变换)

59

## 2. 小波变换 (wavelet)

连续小波变换:

$$W_f(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) |a|^{-1/2} \overline{\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt = \langle f, \Psi_{a,b} \rangle$$

归一化因子                      平移因子

其中  $\Psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$  为由基小波  $\Psi(t)$  的  
 伸缩和平移所生成的函数族  $\Psi_{a,b}(t)$  连续小波  
 尺度因子


$\Psi(t)$  需满足条件  $C_\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^{-1} |\hat{\Psi}(\omega)|^2 d\omega < \infty$

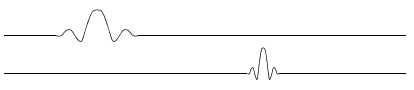
其中  $\hat{\Psi}(\omega)$  为  $\Psi(t)$  的 Fourier 变换

60

$C_\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^{-1} |\hat{\Psi}(\omega)|^2 d\omega$

反演:  $f(t) = \frac{1}{C_\Psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a^{-2} W_f(a,b) \Psi_{a,b}(t) da db$

Fourier 变换基 

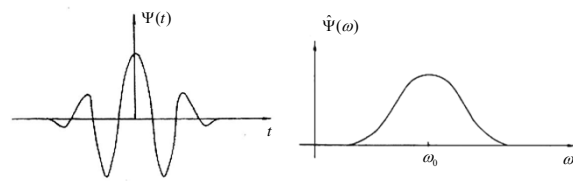
小波基 

61

**小波函数**

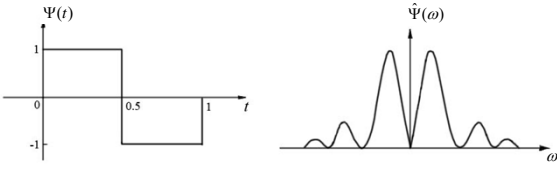
小波函数具有多样性: 不同的信号、不同的研究目的可采用不同的小波函数, 需要根据问题合理选择

Morlet 小波:  $\Psi(t) = e^{j\omega_0 t} e^{-t^2/2}$



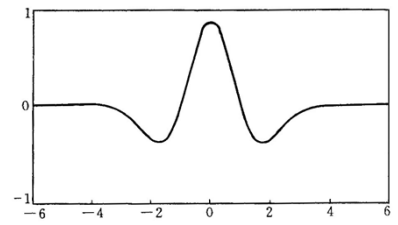
62

Harr 小波:  $\Psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1/2 \\ -1, & 1/2 < t < 1 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$



63

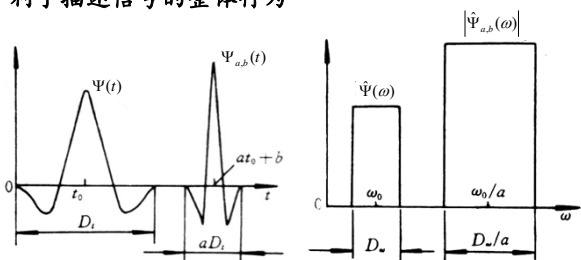
Mexico 草帽小波:  $\Psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} (1-t^2) e^{-t^2/2}$



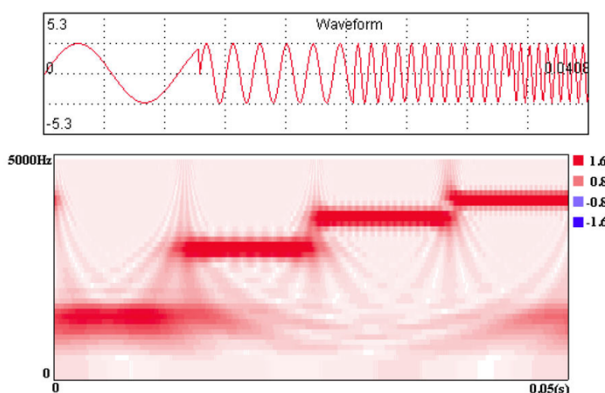
64

**自适应**  $W_f(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) |a|^{-1/2} \overline{\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt = \langle f, \Psi_{a,b} \rangle$

对高频信号, 时窗变窄, 频窗变宽, 有利于描述信号的细节; 对低频信号, 时窗变宽, 频窗变窄, 有利于描述信号的整体行为



65



调频信号的小波变换图

## 离散小波变换和二进小波变换

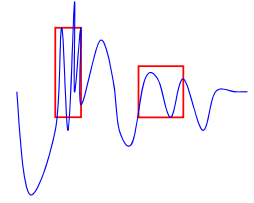
**离散小波变换:** 尺度参数  $a$  使用 2 的幂把频率轴剖分为二进的、相互毗邻的频带; 同时, 平移参数  $b$  只在时间轴上的二进位值取值

即: 取  $a = \frac{1}{2^j}$ ,  $b = \frac{k}{2^j}$ , 其中  $j, k$  为正整数

**二进小波变换:** 只对尺度  $a$  进行二进离散, 平移参数  $b$  保持连续变化

67

- 时频分析方法, 可用于频率随时间变化的信号
- 时窗和频窗自适应, 可用于突变信号
- 时域窗口宽度和频域窗口宽度的乘积不变
- 数值方法: Mallat 算法



68

小波变换在数学、物理、信号处理、人工智能、计算机图象处理、计算机图形学、生物信号处理、模式识别、计算机视觉、非线性科学、地球科学等很多领域有广泛应用

69