Ch. 2 确定性系统和常微分方程

2.1 行星轨道

2.2 摄动理论初步，包括关于周期轨道的 Poincaré 方法

2.3 常微分方程组

2.1 行星轨道

1. Kepler定律和万有引力定律

2. 反问题：行星或慧星的轨道

3. 广义相对论的行星轨道

4. N个粒子，一个确定性的系统

5. 线性

1. Kepler定律和万有引力定律

Kepler定律

1. 行星以太阳为一焦点做椭圆运动

2. 相同时间里从太阳到行星的矢量扫过的面积相同

3. 周期的平方与长轴的3次方成正比

Kepler第二定律

$r^2\dot{\theta} = h$ 两倍面积速度

$x\dot{y} - y\dot{x} = h$ →

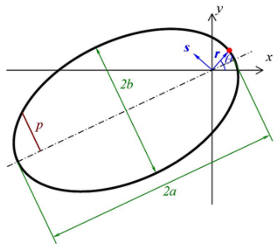
$x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0$

$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ $\quad \mathbf{s} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

$\mathbf{r}\cdot\mathbf{s} = 0, \quad \mathbf{r} \perp \mathbf{s}$

$\ddot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{s} = 0, \quad \ddot{\mathbf{r}} \perp \mathbf{s}$ → $\ddot{\mathbf{r}} // \mathbf{r}$

行星的加速度
永远指向太阳



Kepler第一定律

$$r = \frac{P}{1 + e\cos\theta}$$

P 焦点参数 $P > 0$

e 离心率 $0 < e < 1$

$c^2 = a^2 - b^2, \quad e = \frac{c}{a}, \quad P = \frac{b^2}{a}$

$$\dot{r} = \frac{he}{P}\sin\theta \qquad \ddot{r} = \frac{h^2 e\cos\theta}{Pr^2} = \frac{h^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{P}\right)$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{h^2}{Pr^2}$$

与距离平方成反比
由运动学轨道得到

Kepler第三定律

$$\frac{T^2}{a^3} = \left(\frac{\pi ab}{h/2}\right)^2 a^{-3} = \text{const}$$ →

$$\frac{h^2 a}{b^2} = \frac{h^2}{P} = \text{const} = K$$ →

普适常数

$$a_r = -\frac{h^2}{Pr^2} = -\frac{K}{r^2}$$

引力与距离平方成反比
牛顿（1684）

万有引力定律

1687年，牛顿在他的巨著《自然哲学的数学原理》中提出了三大运动定律和万有引力定律。

$$F_r=\frac{GMm}{r^2}$$

- 苹果落地
- 行星绕日
- 第二定律
- 叠加原理

7

2. 反问题：行星或慧星的轨道

从牛顿运动定律和万有引力定律出发，可以反过来研究行星的运动规律。

控制方程：

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=-\frac{GM}{r^2}$$ 径向运动 非线性

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0$$ 周向运动

$$r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0$$

8

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=-\frac{GM}{r^2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0 \Longrightarrow r^2\dot{\theta}=h$$ 运动积分

研究轨道 $r=r(\theta)$

引入：$u(\theta)=\dfrac{1}{r(\theta)} \Longrightarrow$

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=-\frac{1}{u^2}\frac{h}{r^2}\frac{du}{d\theta}=-h\frac{du}{d\theta}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-h\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{h}{r^2}=-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} \qquad r\dot{\theta}^2=\frac{h^2}{r^3}=h^2u^3$$

9

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} \qquad r\dot{\theta}^2=\frac{h^2}{r^3}=h^2u^3$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=-\frac{GM}{r^2} \Longrightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{GM}{h^2}$$ 线性

通解：$u=\dfrac{GM}{h^2}[1+e\cos(\theta-\theta_0)]$

特解 齐次通解

$$r=\frac{h^2}{GM}\frac{1}{[1+e\cos(\theta-\theta_0)]}$$

轨道

椭圆	抛物线	双曲线
e<1	e=1	e>1

彗星

10

3. 广义相对论的行星轨道

考虑广义相对论时 $\dfrac{d^2u}{d\theta^2}+u=\dfrac{GM}{h^2}(1+\varepsilon u^2)$

小参数

广义相对论效应：近日点进动 $2\pi\varepsilon\left(\dfrac{GM}{h^2}\right)^2$/周

精确解：椭圆函数

近似解：摄动法

数值解

方法的选择？

11

4. N个粒子，一个确定性的系统

考虑引力相互作用下一个N个质点的系统

运动方程： $m_\alpha\ddot{\mathbf{r}}_\alpha=\mathbf{F}_\alpha,\quad \alpha=1,2,\cdots N$

其中 $\mathbf{F}_\alpha=\sum_{\alpha\neq\beta}\mathbf{F}_{\alpha\beta}$

$$\mathbf{F}_{\alpha\beta}=-\frac{Gm_\alpha m_\beta}{|\mathbf{r}_\alpha-\mathbf{r}_\beta|^3}(\mathbf{r}_\alpha-\mathbf{r}_\beta)=-\mathbf{F}_{\beta\alpha}$$

12

更一般，有 $\mathbf{F}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha(t, \mathbf{r}_\beta, \mathbf{v}_\gamma)$， $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \cdots N$

$m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha$， $\alpha = 1, 2, \cdots N$ 可写为：

$$m_\alpha \frac{d\mathbf{v}_\alpha}{dt} = \mathbf{F}_\alpha(t, \mathbf{r}_\beta, \mathbf{v}_\gamma), \quad \frac{d\mathbf{r}_\alpha}{dt} = \mathbf{v}_\alpha, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \cdots N$$

一阶微分方程组

$$\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha^{(0)}, \quad \mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}_\alpha^{(0)} \quad \text{at } t = 0, \quad \alpha = 1, 2, \cdots N$$

初始条件

初始值问题　　解的存在性？唯一性？

5. 线性

定义向量值函数　$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$

其中　$\mathbf{x}(t)$　n 维列向量

$\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$　nxn 阶矩阵

则 $\mathbf{L}(\mathbf{x})$ 是线性函数，即

$$\mathbf{L}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{L}(\mathbf{x}) + \beta\mathbf{L}(\mathbf{y})$$

$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = 0$　　一阶线性齐次微分方程组

2.2 摄动理论初步，包括关于周期轨道的Poincaré方法

1. 摄动理论：初步考虑
2. 单摆运动的逐次近似
3. 用于单摆问题的摄动级数
4. **Poincaré 的摄动理论（PLK方法）**

1. 摄动理论：初步考虑

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y, \varepsilon) \\ y = y_0 \quad \text{when } x = x_0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad y = y(x, \varepsilon)$$

其中 $|\varepsilon| << 1$　小参数

$\varepsilon = 0$ 时解 $y = y(x, \varepsilon)$ 已知： $y^{(0)}(x, 0)$

假设解 $y = y(x, \varepsilon)$ 可展为 ε 的Taylor级数

$$y(x, \varepsilon) = y^{(0)}(x, 0) + \varepsilon y^{(1)}(x, 0) + \cdots + \varepsilon^n y^{(n)}(x, 0) + \cdots$$

$$y^{(n)}(x, 0) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n y}{\partial \varepsilon^n}\right)_{\varepsilon = 0} \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy^{(0)}(x, 0)}{dx} + \varepsilon \frac{dy^{(1)}(x, 0)}{dx} + \cdots + \varepsilon^n \frac{dy^{(n)}(x, 0)}{dx} + \cdots$$

$y(x, \varepsilon) = y^{(0)}(x, 0) + \varepsilon y^{(1)}(x, 0) + \cdots + \varepsilon^n y^{(n)}(x, 0) + \cdots$

将 $f(x, y, \varepsilon)$ 以 $y = y^{(0)}(x, 0), \varepsilon = 0$ 展开

$$f(x, y, \varepsilon) =$$
$$f(x, y^{(0)}, 0) + (y - y^{(0)}) f_y'(x, y^{(0)}, 0) + \varepsilon f_\varepsilon'(x, y^{(0)}, 0)$$
$$+ \frac{1}{2!}[(y - y^{(0)})^2 f_{yy}''(x, y^{(0)}, 0) + 2\varepsilon(y - y^{(0)}) f_{y\varepsilon}''(x, y^{(0)}, 0)$$
$$+ \varepsilon^2 f_{\varepsilon\varepsilon}''(x, y^{(0)}, 0)] + \cdots$$
$$= f(x, y^{(0)}, 0) + (\varepsilon y^{(1)} + \varepsilon^2 y^{(2)} + \cdots) f_y + \varepsilon f_\varepsilon$$
$$+ \frac{1}{2!}[\varepsilon^2 y^{(1)^2} f_{yy} + 2\varepsilon^2 y^{(1)} f_{y\varepsilon} + \varepsilon^2 f_{\varepsilon\varepsilon} + \cdots] + \cdots$$

$$y(x,\varepsilon)=y^{(0)}(x,0)+\varepsilon y^{(1)}(x,0)+\cdots+\varepsilon^n y^{(n)}(x,0)+\cdots$$

微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy^{(0)}(x,0)}{dx}+\varepsilon\frac{dy^{(1)}(x,0)}{dx}+\cdots+\varepsilon^n\frac{dy^{(n)}(x,0)}{dx}+\cdots$$

$$f(x,y,\varepsilon)=f(x,y^{(0)},0)+\varepsilon(f_y y^{(1)}+f_\varepsilon)$$
$$+\varepsilon^2(f_{yy}y^{(1)^2}+2f_{y\varepsilon}y^{(1)}+f_{\varepsilon\varepsilon}+2f_y y^{(2)})/2+\cdots$$

$$\frac{dy^{(0)}}{dx}=f(x,y^{(0)},0)$$

线性微分方程组

$$\frac{dy^{(1)}}{dx}=f_y(x,y^{(0)},0)y^{(1)}+f_\varepsilon(x,y^{(0)},0)$$

$\cdots$

初始条件

$$y(x,\varepsilon)=y^{(0)}(x,0)+\varepsilon y^{(1)}(x,0)+\cdots+\varepsilon^n y^{(n)}(x,0)+\cdots \Rightarrow$$

$$y_0=y^{(0)}(x_0,0)+\varepsilon y^{(1)}(x_0,0)+\cdots+\varepsilon^n y^{(n)}(x_0,0)+\cdots$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} &y^{(0)}(x_0,0)=y_0\\ &y^{(1)}(x_0,0)=0\\ &\cdots\\ &y^{(n)}(x_0,0)=0\\ &\cdots \end{aligned}$$

一般形式和显式解

$$\frac{dy^{(n)}}{dx}=Ay^{(n)}+B^{(n)}$$

一阶线性非齐次微分方程 $\Rightarrow$

$A=f_y(x,y^{(0)},0)$

$B^{(n)}$ 依赖于 x 和所有的 $y^{(k)}$, $(k<n)$

积分形式的显式解： $y^{(n)}=e^{-\int A dx}\left[\int Be^{-\int A dx}+C\right]$

例

$$y'+y=\varepsilon y^2,\qquad y(0)=1$$

$$\varepsilon=0,\qquad y^{(0)}=e^{-x}$$

令 $y=y^{(0)}+\varepsilon y^{(1)}+\varepsilon^2 y^{(2)}+\cdots \Rightarrow$

$$y'=y^{(0)\prime}+\varepsilon y^{(1)\prime}+\varepsilon^2 y^{(2)\prime}+\cdots$$

$$y^2=y^{(0)^2}+2\varepsilon y^{(0)}y^{(1)}+\cdots$$

$$y^{(0)\prime}+y^{(0)}=0,\quad y^{(0)}(0)=1 \Rightarrow y^{(0)}=e^{-x}$$

$$y^{(1)\prime}+y^{(1)}=y^{(0)^2},\quad y^{(1)}(0)=0$$

$$y^{(2)\prime}+y^{(2)}=2y^{(0)}y^{(1)},\quad y^{(2)}(0)=0$$

$\cdots$ $\qquad 2e^{-2x}-2e^{-3x}$

$$y^{(1)\prime}+y^{(1)}=e^{-2x},\quad y^{(1)}(0)=0 \Rightarrow y^{(1)}=e^{-x}-e^{-2x}$$

$$y=e^{-x}+\varepsilon(e^{-x}-e^{-2x})+O(\varepsilon^2)$$

$$y^{(2)\prime}+y^{(2)}=2e^{-2x}-2e^{-3x},\qquad y^{(2)}(0)=0$$

$$\Rightarrow \quad y^{(2)}=e^{-x}-2e^{-2x}+e^{-3x}$$

$$y=e^{-x}+\varepsilon(e^{-x}-e^{-2x})+\varepsilon^2(e^{-x}-2e^{-2x}+e^{-3x})+O(\varepsilon^3)$$

精确解 $\quad y=\dfrac{e^{-x}}{1-\varepsilon(1-e^{-x})}$

$$\frac{1}{1-\alpha}=1+\alpha+\alpha^2+\cdots$$

精确解

$$y'+y=\varepsilon y^2, \qquad y(0)=1$$

齐次方程解： $y=Ce^{-x}$

常数变易法：令 $y=C(x)e^{-x}$ →

$$y'=C'(x)e^{-x}-C(x)e^{-x}$$

代入，得：$C'(x)=\varepsilon C^2(x)e^{-x}$ →

$$C(x)=\frac{1}{\varepsilon e^{-x}+D} \quad \to \quad y=\frac{e^{-x}}{1-\varepsilon(1-e^{-x})}$$

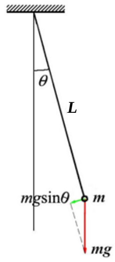
25

2. 单摆运动的逐次近似（迭代法）

运动方程：

$$mL\ddot{\theta}=-mg\sin\theta$$

$$\begin{cases}\ddot{\theta}+\omega_0^2\sin\theta=0 & t>0 \qquad \omega_0=\left(\dfrac{g}{L}\right)^{1/2}\\ \theta=a, \quad \dot{\theta}=0, & \text{at} \quad t=0\end{cases}$$



26

精确解

$$\begin{cases}\ddot{\theta}+\omega_0^2\sin\theta=0 & t>0 \qquad \omega_0=\left(\dfrac{g}{L}\right)^{1/2}\\ \theta=a, \quad \dot{\theta}=0, & \text{at} \quad t=0\end{cases}$$

第一积分：

$$\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2=\omega_0^2(\cos\theta-\cos a)=2\omega_0^2\left(\sin^2\frac{a}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=2\omega_0^2\sin^2\frac{a}{2}\cos^2\psi$$

令

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sin\frac{a}{2}\sin\psi \quad \to \quad \frac{1}{2}\dot{\theta}^2=\frac{2\sin^2\frac{a}{2}\cos^2\psi}{1-\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\psi}\dot{\psi}^2$$

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot\dot{\theta}=\sin\frac{a}{2}\cos\psi\cdot\dot{\psi}$$

27

$$\dot{\psi}^2=\omega_0^2\left(1-\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\psi\right) \quad \to$$

$$t=\frac{1}{\omega_0}\int\left(1-\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\psi\right)^{-1/2}d\psi$$

椭圆积分

周期为

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sin\frac{a}{2}\sin\psi$$

$$P=\frac{4}{\omega_0}\int_0^{\pi/2}\left(1-\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\psi\right)^{-1/2}d\psi$$

28

迭代法

取 $\sin\theta\approx\theta$ → $\ddot{\theta}+\omega_0^2\theta=0$ 近似方程 1

$$\theta(0)=a \qquad \dot{\theta}(0)=0$$

解： $\theta_0=a\cos\omega_0 t$

周期：

$$P_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\left(\frac{L}{g}\right)^{1/2}$$

改写方程：$\ddot{\theta}+\omega_0^2\theta=\omega_0^2(\theta-\sin\theta)$

$O(\theta^3)$

29

改进：$\ddot{\theta}_1+\omega_0^2\theta_1=\omega_0^2(\theta_0-\sin\theta_0)$

$$\theta_1(0)=a \qquad \dot{\theta}_1(0)=0$$

或：$\ddot{\theta}_1+\omega_0^2\theta_1=\omega_0^2\dfrac{\theta_0^3}{3!}$ 近似方程 2 →

$$\theta_1(0)=a \qquad \dot{\theta}_1(0)=0$$

$$\ddot{\theta}_1+\omega_0^2\theta_1=\omega_0^2\frac{a^3\cos^3\omega_0 t}{3!}=\frac{\omega_0^2a^3}{24}(\cos 3\omega_0 t+3\cos\omega_0 t)$$

30

$$\ddot{\theta}_1+\omega_0^2\theta_1=\frac{\omega_0^2a^3}{24}(\cos 3\omega_0 t+3\cos\omega_0 t)$$

共振项

久期项

$$\theta_1=a\cos\omega_0 t+\frac{a^3}{192}(\cos\omega_0 t-\cos 3\omega_0 t+12\omega_0 t\sin\omega_0 t)$$

精确到 a^3 的解

迭代方程：
$$\begin{cases}\ddot{\theta}_{i+1}+\omega_0^2\theta_{i+1}=\omega_0^2(\theta_i-\sin\theta_i)\\ \theta_{i+1}(0)=a \qquad \dot{\theta}_{i+1}(0)=0\end{cases}$$

3. 用于单摆问题的摄动级数

$$\begin{cases}\ddot{\theta}+\omega_0^2\sin\theta=0 \qquad t>0 \qquad \omega_0=\left(\frac{g}{L}\right)^{1/2}\\ \theta=a, \quad \dot{\theta}=0, \qquad \text{at} \quad t=0\end{cases}$$

引入新变量：$\Theta(t)=\dfrac{\theta(t)}{a}$

$|\Theta|\le 1, \quad \sim 1$

$\ddot{\theta}+\omega_0^2\theta=\omega_0^2(\theta-\sin\theta)$

$$\begin{cases}\ddot{\Theta}+\omega_0^2\Theta=\omega_0^2(\Theta-\frac{1}{a}\sin a\Theta)=\omega_0^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a^{2n}\frac{\Theta^{2n+1}}{(2n+1)!}\\ \Theta(0)=1, \quad \dot{\Theta}(0)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\ddot{\Theta}+\omega_0^2\Theta=\omega_0^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a^{2n}\frac{\Theta^{2n+1}}{(2n+1)!}\\ \Theta(0)=1, \quad \dot{\Theta}(0)=0\end{cases}$$

$$\Theta=\Theta(t,a)=\Theta^{(0)}(t)+a\Theta^{(1)}(t)+a^2\Theta^{(2)}(t)+\cdots$$

$$\ddot{\Theta}^{(0)}+a\ddot{\Theta}^{(1)}+a^2\ddot{\Theta}^{(2)}+\cdots$$
$$+\omega_0^2(\Theta^{(0)}+a\Theta^{(1)}+a^2\Theta^{(2)}+\cdots)$$
$$=\omega_0^2\left(\frac{a^2\Theta^{(0)^3}}{3!}+\cdots\right)$$

a^0: $\begin{cases}\ddot{\Theta}^{(0)}+\omega_0^2\Theta^{(0)}=0\\ \Theta^{(0)}(0)=1, \quad \dot{\Theta}^{(0)}(0)=0\end{cases}$ → $\Theta^{(0)}(t)=\cos\omega_0 t$

a^1: $\begin{cases}\ddot{\Theta}^{(1)}+\omega_0^2\Theta^{(1)}=0\\ \Theta^{(1)}(0)=0, \quad \dot{\Theta}^{(1)}(0)=0\end{cases}$ → $\Theta^{(1)}(t)=0$

a^2: $\begin{cases}\ddot{\Theta}^{(2)}+\omega_0^2\Theta^{(2)}=\omega_0^2\dfrac{\Theta^{(0)^3}}{3!}\\ \Theta^{(2)}(0)=0, \quad \dot{\Theta}^{(2)}(0)=0\end{cases}$

$\begin{cases}\ddot{\Theta}^{(2)}+\omega_0^2\Theta^{(2)}=\omega_0^2\dfrac{\Theta^{(0)^3}}{3!}\\ \Theta^{(2)}(0)=0, \quad \dot{\Theta}^{(2)}(0)=0\end{cases}$ $\quad\Theta^{(0)}(t)=\cos\omega_0 t$ →

$$\ddot{\Theta}^{(2)}+\omega_0^2\Theta^{(2)}=\frac{\omega_0^2}{24}(\cos 3\omega_0 t+3\cos\omega_0 t) \quad \rightarrow$$

$$\Theta^{(2)}(t)=\frac{1}{192}\cos\omega_0 t-\frac{1}{192}\cos 3\omega_0 t+\frac{1}{16}\omega_0 t\sin\omega_0 t$$

久期项

$$\Theta=\cos\omega_0 t+\frac{a^2}{192}(\cos\omega_0 t-\cos 3\omega_0 t+12\omega_0 t\sin\omega_0 t)+\cdots$$

讨论

$$\Theta=\cos\omega_0 t+\frac{a^2}{192}(\cos\omega_0 t-\cos 3\omega_0 t+12\omega_0 t\sin\omega_0 t)+\cdots$$

- 级数并不收敛，“渐近级数”
- 若 α 足够小，在一定时间内是有用的近似
- 当 $\omega_0 t>>1$ ，或 $t\sim\omega_0^{-1}a^{-2}$ 时失效
- 周期变化？

4. Poincaré 的摄动理论

PLK方法　　Poincaré-Lighthill-郭永怀

$$\begin{cases}\Theta=\Theta^{(0)}(\tau)+a\Theta^{(1)}(\tau)+a^2\Theta^{(2)}+\cdots\\ t=\tau+at^{(1)}(\tau)+a^2t^{(2)}(\tau)+\cdots\end{cases}$$

改变了时间尺度
增加了自由度

$$\begin{cases}\Theta=\Theta^{(0)}(\tau)+a^2\Theta^{(2)}+\cdots\\ t=\tau(1+a^2h_2+\cdots)\end{cases}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}=\frac{1}{(1+a^2h_2+\cdots)^2}\frac{d^2}{d\tau^2}=(1-2a^2h_2+\cdots)\frac{d^2}{d\tau^2}$$

37

$$\ddot{\Theta}+\omega_0^2\Theta=\omega_0^2(\Theta-\frac{1}{a}\sin a\Theta)=\omega_0^2a^2\frac{\Theta^3}{3!}+\cdots$$

$$(1-2a^2h_2+\cdots)\left(\frac{d^2\Theta^{(0)}}{d\tau^2}+a^2\frac{d^2\Theta^{(2)}}{d\tau^2}+\cdots\right)+$$

$$\omega_0^2(\Theta^{(0)}+a^2\Theta^{(2)}+\cdots)=a^2\frac{\omega_0^2}{6}\Theta^{(0)^3}+\cdots$$

a^0: $\Theta^{(0)}(t)=\cos\omega_0\tau$

a^2: $$\frac{d^2\Theta^{(2)}}{d\tau^2}+\omega_0^2\Theta^{(2)}=2h_2\frac{d^2\Theta^{(0)}}{d\tau^2}+\frac{\omega_0^2}{6}\Theta^{(0)^3}$$

$$=\frac{\omega_0^2}{24}\cos3\omega_0\tau+2\omega_0^2(\frac{1}{16}-h_2)\cos\omega_0\tau$$

38

$$h_2=\frac{1}{16}\quad\Longrightarrow\quad\frac{d^2\Theta^{(2)}}{d\tau^2}+\omega_0^2\Theta^{(2)}=\frac{\omega_0^2}{24}\cos3\omega_0\tau$$

$$\Longrightarrow\quad\Theta^{(0)}(t)=\cos\frac{\omega_0t}{1+\frac{a^2}{16}+\cdots}$$

周期： $$P_0=\frac{2\pi}{\omega_0}\left(1+\frac{a^2}{16}+\cdots\right)$$

39

与精确解一致：

$$P=\frac{4}{\omega_0}\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\psi)^{-1/2}d\psi$$

$$=\frac{2\pi}{\omega_0}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{2^nn!}\right]^2\sin^{2n}\frac{a}{2}\right\}$$

- PLK方法可用于需要将解曲面映射到一个畸变的自变量区域的情况
- 很多情况下有用而无法严格证明

40

2.3 常微分方程组

1. 初值问题：定理的陈述
2. 失去唯一性的例子

（其它内容略）

41

---

1. 初值问题：定理的陈述

对一 $n+1$ 维空间 $P(t,z_1,z_2,\cdots z_n)$ 中一个给定的点 $P_0(\tau,\varsigma_1,\varsigma_2,\cdots\varsigma_n)$，常微分方程组

$$\frac{dz_k}{dt}=f_k(t,z_1,z_2,\cdots z_n),\qquad k=1,2,\cdots,n\qquad(1)$$

的初始值问题为：求函数

$$z_m=g_m(t)\qquad m=1,2,\cdots,n$$

满足方程组(1)，且

$$g_m(\tau)=\varsigma_m\qquad m=1,2,\cdots,n$$

42

为简化，以下

$(z_1, z_2, \cdots, z_n) \rightarrow z$

$(\varsigma_1, \varsigma_2, \cdots, \varsigma_n) \rightarrow \varsigma$

43

定理 1 （存在性）：设函数 $f_k(t,z)$ 在 有限时间 有限范围

矩形域 R: $|t-\tau| \le a,\ |z_k - \varsigma_k| \le b,\quad k = 1,2,\cdots,n$

连续，并满足Lipschitz条件 闭区域中的连续函数有界 $|f_k| \le M$

$$|f(t,\bar{z}_1,\bar{z}_2,\cdots,\bar{z}_n) - f(t,z_1,z_2,\cdots,z_n)|$$
$$\le K[|\bar{z}_1 - z_1| + |\bar{z}_2 - z_2| + \cdots + |\bar{z}_n - z_n|]$$

M – "速度"

则在区间 $|t-\tau| \le \alpha,\ \alpha = \min(a, \frac{b}{M})$ 中，初始值问题的解存在且解函数 g_m 有连续的一阶导数 光滑

44

$$|f(t,\bar{z}_1,\bar{z}_2,\cdots,\bar{z}_n) - f(t,z_1,z_2,\cdots,z_n)|$$
$$\le K[|\bar{z}_1 - z_1| + |\bar{z}_2 - z_2| + \cdots + |\bar{z}_n - z_n|]$$

Lipschitz条件：只要变量 z 空间中两点的"距离"足够小，其函数值 f 的差至多与其同阶

如果每一个函数 f_k 都有连续的偏微商，则Lipschitz条件满足

45

定理2（唯一性）：初始值问题的解是唯一的

定理3（对参量的连续依赖性）：令函数

$f_k(t,z,\lambda)\quad k = 1,2,\cdots n$

满足定理 1 的要求，且这些函数在 λ_0 的某个邻域 $|\lambda - \lambda_0| < c$ 中连续地依赖于参量 λ ，则解函数在 λ_0 的某个邻域中也是 λ 的连续函数

$\frac{dz_k}{dt} = f_k(t,z,\lambda),\quad k = 1,2,\cdots,n \qquad z_k = z_k(t,\lambda)$

46

定理3'（稳定性）：令 $z_m = g_m(t;\varsigma_m)$ 表示第 m 个解函数，则对任给的 $\varepsilon > 0$ 和固定的时间 $T \ge \tau$，存在 $\delta = \delta(\varepsilon, T)$，只要 $|\varsigma_m' - \varsigma_m| \le \delta$，在 $\tau \le t \le T$ 中，有

$$|g_m(t;\varsigma_m) - g_m(t;\varsigma_m')| < \varepsilon$$

初始值的微小变化只引起解的微小变化

47

$\frac{dz_k}{dt} = f_k(t,z,\lambda),\quad k = 1,2,\cdots,n$

定理4（可微性）：如 $n(n+1)$ 个函数

$$\frac{\partial f_k}{\partial z_m}, \frac{\partial f_k}{\partial \lambda},\qquad k,m = 1,2,\cdots,n$$

为变量 $t, \{z_m\}$ 和参量 λ 的连续函数，则定理3的解函数 $z_m(t,\lambda)$ 对 λ 可微，且偏导数

$u_m(t,\lambda) \equiv \frac{\partial}{\partial \lambda} z_m(t,\lambda)$ 满足微分方程

$\frac{du_k}{dt} = \sum_m \frac{\partial f_k}{\partial z_m} u_m + \frac{\partial f_k}{\partial \lambda}$ 和初始条件 $u_k = 0$

48

注意：

- 学会所做处理合法的典型条件
- 不断掌握新的数学概念

  逐点收敛、一致收敛

  渐近序列、渐近级数

  集合、测度

  积分方程、泛函

  函数空间、模

模 (norm) 范数，函数空间中两个点的“距离”

如 $\varphi(x), \psi(x)$ 为定义在 $[a, b]$ 上的两个函数，定义

$$\|\varphi(x)-\psi(x)\| \equiv \max_{a \le x \le b} |\varphi(x)-\psi(x)|$$

或 $$\|\varphi(x)-\psi(x)\| \equiv \left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b [\varphi(x)-\psi(x)]^2 dx\right\}^{1/2}$$

性质 $\|\varphi(x)\| \ge 0,\quad \|\alpha\varphi\| = \alpha\|\varphi\|$

$\|\varphi+\psi\| \le \|\varphi\| + \|\psi\|$

2. 失去唯一性的例子

$(x,y) \ne (0,0)$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4+c^4}}$

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad f(x,y) = \frac{2x^3(c^2-\sqrt{x^4+c^4})}{x^4+c^4-c^2\sqrt{x^4+c^4}} = -\frac{2x^3}{\sqrt{x^4+c^4}}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{4x^3y}{x^4+y^2} & (x,y) \ne (0,0) \end{cases}$$

易证：$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，但不满足 Lipschitz 条件，解 $y = c^2 - \sqrt{x^4+c^4}$ 多值，满足初始条件 $(0,0)$，且所有积分曲线在原点的斜率为 0

考察函数在 $(0,0)$ 附近的形态。当 (x,y) 沿某条路径趋近 $(0,0)$ 时，该路径的主项可表为 $y = ax^i$

➢ 连续性：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^3y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4ax^{3+i}}{x^4+a^2x^{2i}} = \lim_{x\to 0} \begin{cases} \dfrac{4ax}{1+a^2} \to 0 & i=2 \\ \dfrac{4x^{3-i}}{a} \to 0 & i<2 \\ 4ax^{i-1} \to 0 & i>2 \end{cases}$$

➢ Lipschitz 条件： $\quad |f(t,\overline{z}) - f(t,z)| \le K|\overline{z}-z|$ $\quad t \to x,\ z \to y$

仅举一反例，取 $y = x^2$，则

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{4x^5}{2x^4}\right| = 2|x| \qquad \frac{4x^3y}{x^4+y^2}$$

$$|y-0| = x^2$$

当 $x \to 0$ 时，$2|x| \le Kx^2$ 不成立！

➢ 积分曲线的曲率：

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{(0,0)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{dy}{dx}(x,y) - \dfrac{dy}{dx}(0,0)}{x-0}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2y}{x^4+y^2}$$

同样，令 $y=ax^i$，则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{4ax^{2+i}}{x^4+a^2x^{2i}}=\lim_{x\to0}\begin{cases}\dfrac{4a}{1+a^2} & i=2 & \neq 0\\ \dfrac{4x^{2-i}}{a} & i<2 & \to 0\\ 4ax^{i-2} & i>2 & \to 0\end{cases}$$

解曲线的曲率在 (0,0) 点没有定义！