Ch. 11 应用于单摆问题的三种技巧

11.2 多重尺度展开

附1：其它奇异摄动方法

11.1 单摆正常平衡和倒置平衡的稳定性

11.3 相平面

附2：分岔现象和奇异吸引子

介绍其它奇异摄动方法以及稳定性分析

11.2 多重尺度展开

1. 用多重尺度法解单摆方程
2. 高阶近似，消去共振项
3. 进一步的例子

1. 用多重尺度法解单摆方程

考虑已尺度化的单摆方程

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2}+\frac{\sin a\Theta}{a}=0,\quad \Theta(0)=1,\quad \frac{d\Theta}{dt}(0)=0$$

引入 $a^2=\varepsilon$，将 $\sin\varepsilon^{1/2}\Theta$ 展开，得

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2}+\Theta-\frac{1}{6}\varepsilon\Theta^3+\cdots=0$$

假定 $\Theta(t,\varepsilon)=f(t,\tau,\varepsilon)$

$$=f^{(0)}(t,\tau)+\varepsilon f^{(1)}(t,\tau)+\varepsilon^2 f^{(2)}(t,\tau)+\cdots$$

其中 $\tau=\varepsilon t$ 慢变

双尺度级数，要求 $f^{(i)}=O(1)$

$$\Theta(t,\varepsilon)=f(t,\tau,\varepsilon)=f^{(0)}(t,\tau)+\varepsilon f^{(1)}(t,\tau)+\varepsilon^2 f^{(2)}(t,\tau)+\cdots,\quad \tau=\varepsilon t$$

则 $\frac{d}{dt}f(t,\tau,\varepsilon)=f_1^{(0)}+\varepsilon[f_2^{(0)}+f_1^{(1)}]+\varepsilon^2[f_2^{(1)}+f_1^{(2)}]+\cdots$

下标 i 表示对 f 的第 i 个宗量的导数，并假定二阶导数连续

$$\frac{d^2}{dt^2}f(t,\tau,\varepsilon)=f_{11}^{(0)}+\varepsilon[2f_{12}^{(0)}+f_{11}^{(1)}]+\varepsilon^2[f_{22}^{(0)}+2f_{12}^{(1)}+f_{11}^{(2)}]+\cdots$$

代入微分方程，得 $\frac{d^2\Theta}{dt^2}+\Theta-\frac{1}{6}\varepsilon\Theta^3+\cdots=0$

$$0=[f_{11}^{(0)}+f^{(0)}]+\varepsilon[f_{11}^{(1)}+f^{(1)}+2f_{12}^{(0)}-\frac{1}{6}\left(f^{(0)}\right)^3]+\cdots$$

(非 ε 的幂级数)

$$\Longrightarrow\begin{cases}f_{11}^{(0)}+f^{(0)}=0\\ f_{11}^{(1)}+f^{(1)}=\frac{1}{6}\left(f^{(0)}\right)^3-2f_{12}^{(0)}\end{cases}$$

充分而非必要

$$f(t,\tau,\varepsilon)=f^{(0)}(t,\tau)+\varepsilon f^{(1)}(t,\tau)+\cdots$$

$$\frac{d}{dt}f(t,\tau,\varepsilon)=f_1^{(0)}+\varepsilon[f_2^{(0)}+f_1^{(1)}]+\cdots$$

$$\begin{cases}f_{11}^{(0)}+f^{(0)}=0\\ f_{11}^{(1)}+f^{(1)}=\frac{1}{6}\left(f^{(0)}\right)^3-2f_{12}^{(0)}\end{cases}$$

初始条件：

$$\Theta(0)=1:\begin{cases}f^{(0)}(0,0)=1\\ f^{(1)}(0,0)=0\end{cases}\qquad \dot\Theta(0)=0:\begin{cases}f_1^{(0)}(0,0)=0\\ f_1^{(1)}(0,0)=-f_2^{(0)}(0,0)\end{cases}$$

最低阶近似：$f_{11}^{(0)}+f^{(0)}=0,\quad f^{(0)}(0,0)=1,\ f_1^{(0)}(0,0)=0$

$$\Longrightarrow\quad f^{(0)}(t,\tau)=A(\tau)\cos t+B(\tau)\sin t$$

对 t 的微分方程
将 τ 视为参数

初始条件要求 $A(0)=1,\quad B(0)=0$

无法直接得到 $A(\tau),B(\tau)$

2. 高阶近似，消去共振项

$$f_{11}^{(1)}+f^{(1)}=\frac{1}{6}\left(f^{(0)}\right)^3-2f_{12}^{(0)}\quad\Longrightarrow$$

$$f^{(0)}(t,\tau)=A(\tau)\cos t+B(\tau)\sin t$$

$$\frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial t^2}+f^{(1)}=\frac{1}{6}(A\cos t+B\sin t)^3-2(-A'\sin t+B'\cos t)$$

$$=\left[-2B'+\frac{1}{8}(A^3+AB^2)\right]\cos t+\left[2A'+\frac{1}{8}(B^3+A^2B)\right]\sin t$$

$$+\frac{1}{24}(A^3-3AB^2)\cos 3t-\frac{1}{24}(B^3-3A^2B)\sin 3t\qquad ()'=\frac{d()}{d\tau}$$

为消去共振项，要求：

$$-2B'+\frac{1}{8}(A^3+AB^2)=0,\quad 2A'+\frac{1}{8}(B^3+A^2B)=0$$

$$-2B'+\frac{1}{8}(A^3+AB^2)=0,\ \ 2A'+\frac{1}{8}(B^3+A^2B)=0 \qquad A(0)=1,\ \ B(0)=0$$

$$\longrightarrow\ A^2+B^2=\frac{16B'}{A}=-\frac{16A'}{B} \ \longrightarrow\ AA'+BB'=0$$

$$\longrightarrow\ A^2+B^2=\text{const}=1 \qquad -16B'+A=0,\ \ 16A'+B=0$$

$$\longrightarrow\ A(\tau)=\cos\frac{\tau}{16},\ \ B(\tau)=\sin\frac{\tau}{16}$$

由此得最低阶近似 $f^{(0)}(t,\tau)=A(\tau)\cos t+B(\tau)\sin t$

$$f^{(0)}(t,a^2t)=\cos\frac{a^2t}{16}\cos t+\sin\frac{a^2t}{16}\sin t=\cos\left(1-\frac{a^2}{16}\right)t$$

上式直到 $t=O(a^{-4})$ 仍有效

$$f^{(0)}(t,\tau)=A(\tau)\cos t+B(\tau)\sin t \qquad A(\tau)=\cos\frac{\tau}{16},\ \ B(\tau)=\sin\frac{\tau}{16}$$

$$\frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial t^2}+f^{(1)}=\frac{1}{24}(A^3-3AB^2)\cos 3t-\frac{1}{24}(B^3-3A^2B)\sin 3t$$

$$\longrightarrow\ f^{(1)}=C(\tau)\cos t+D(\tau)\sin t$$

$$-\frac{1}{192}(A^3-3AB^2)\cos 3t+\frac{1}{192}(B^3-3A^2B)\sin 3t$$

三次谐波

$$f^{(1)}(0,0)=0,\ \ f_1^{(1)}(0,0)=-f_2^{(0)}(0,0) \ \longrightarrow$$

$$C(0)=\frac{1}{192},\ \ D(0)=0$$

二阶方程将出现更高次谐波

但其控制方程需从二阶方程消去共振项的要求得到

3. 进一步的例子

例 1：用多重尺度法求解

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=0,\quad y(0)=0,\ y(1)=1,\quad 0<\varepsilon<<1$$

问题包含两个尺度：$1,\ \varepsilon$ $\longrightarrow$ 引入 $\xi=\dfrac{x}{\varepsilon}$ 快变

令 $y(x,\varepsilon)=Y(x,\xi,\varepsilon)=Y^{(0)}(x,\xi)+\varepsilon Y^{(1)}(x,\xi)+\cdots$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\varepsilon}Y_2^{(0)}(x,\xi)+Y_1^{(0)}(x,\xi)+Y_2^{(1)}(x,\xi)+\varepsilon Y_1^{(1)}(x,\xi)+\cdots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}Y_{22}^{(0)}(x,\xi)+\frac{1}{\varepsilon}\left[2Y_{12}^{(0)}(x,\xi)+Y_{22}^{(1)}(x,\xi)\right]+\cdots$$

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=0,\ \ y(0)=0,\ y(1)=1 \qquad y(x,\varepsilon)=Y(x,\xi,\varepsilon) \qquad \xi=\frac{x}{\varepsilon}$$

$$y(x,\varepsilon)=Y^{(0)}(x,\xi)+\varepsilon Y^{(1)}(x,\xi)+O(\varepsilon^2)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\varepsilon}Y_2^{(0)}(x,\xi)+Y_1^{(0)}(x,\xi)+Y_2^{(1)}(x,\xi)+O(\varepsilon) \ \longrightarrow$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}Y_{22}^{(0)}(x,\xi)+\frac{1}{\varepsilon}\left[2Y_{12}^{(0)}(x,\xi)+Y_{22}^{(1)}(x,\xi)\right]+O(1)$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\left[Y_{22}^{(0)}+2Y_2^{(0)}\right]+\left[Y_{22}^{(1)}+2Y_2^{(1)}+2Y_{12}^{(0)}+2Y_1^{(0)}+Y^{(0)}\right]+\cdots=0$$

$$O(\varepsilon^{-1}):\quad Y_{22}^{(0)}+2Y_2^{(0)}=0,\quad Y^{(0)}(0,0)=0,\ \ Y^{(0)}(1,\infty)=1$$

$$O(1):\quad Y_{22}^{(1)}+2Y_2^{(1)}=-2Y_{12}^{(0)}-2Y_1^{(0)}-Y^{(0)}$$

$Y^{(1)}(0,0)=0,\ \ Y^{(1)}(1,\infty)=0$

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=0,\quad y(0)=0,\ y(1)=1,\ \ 0<\varepsilon<<1 \qquad \xi=\frac{x}{\varepsilon}$$

$$O(\varepsilon^{-1}):\ Y_{22}^{(0)}+2Y_2^{(0)}=0,\quad Y^{(0)}(0,0)=0,\ \ Y^{(0)}(1,\infty)=1$$

$$\Downarrow$$

$$Y^{(0)}=C_1(x)+C_2(x)e^{-2\xi} \ \longrightarrow\ \begin{cases}C_1(0)+C_2(0)=0\\ C_1(1)=1\end{cases}$$

$$O(1):\quad Y_{22}^{(1)}+2Y_2^{(1)}=-2Y_{12}^{(0)}-2Y_1^{(0)}-Y^{(0)} \ \longrightarrow$$

$$Y_{22}^{(1)}+2Y_2^{(1)}=4C_2'e^{-2\xi}-2C_1'-2C_2'e^{-2\xi}-C_1-C_2e^{-2\xi}$$

$$=-(2C_1'+C_1)+(2C_2'-C_2)e^{-2\xi}$$

非齐次项与齐次方程通解相同，解将出现 $\xi,\ \xi e^{-2\xi}$ 项

但 $\varepsilon\downarrow 0$ 时，$\xi\to\infty$，不满足 $O(1)$ 要求 $\longrightarrow$ $2C_1'+C_1=0$

$$Y^{(0)}=C_1(x)+C_2(x)e^{-2\xi} \qquad C_1(0)+C_2(0)=0,\ \ C_1(1)=1$$

$$2C_1'+C_1=0 \ \longrightarrow\ C_1(x)=c_1e^{-x/2}$$

由边界条件，得：$C_1(x)=e^{(1-x)/2}$

而 $C_1(0)+C_2(0)=e^{1/2}+C_2(0)=0$ $\longrightarrow$ $C_2(0)=-e^{1/2}$

如取 $C_2(x)\equiv -e^{1/2}$，则

$$Y^{(0)}(x,\xi)=e^{(1-x)/2}-e^{1/2}e^{-2\xi}$$

$$y_0(x,\varepsilon)=e^{(1-x)/2}-e^{1/2}e^{-2x/\varepsilon}=e^{1/2}(e^{-x/2}-e^{-2x/\varepsilon})$$

$$Y_{22}^{(1)}+2Y_2^{(1)}=-(2C_1'+C_1)+(2C_2'-C_2)e^{-2\xi} \qquad C_2(0)=-e^{1/2}$$

也可令 $2C_2'-C_2=0$，则

充分而非必要，但对求高阶近似有利

$$C_2(x)=c_2e^{x/2},\quad C_2(0)=c_2=-e^{1/2} \;\Longrightarrow\; C_2(x)=-e^{(1+x)/2}$$

$$\Longrightarrow\; Y^{(0)}(x,\xi)=e^{(1-x)/2}-e^{(1+x)/2}e^{-2\xi}$$

$$\Longrightarrow\; y_0(x,\varepsilon)=e^{\frac{1-x}{2}}-e^{\frac{1+x}{2}}e^{-\frac{2x}{\varepsilon}}=e^{\frac{1}{2}}(e^{-\frac{x}{2}}-e^{-\frac{2x}{\varepsilon}+\frac{x}{2}})$$

只相差一个超越小项　　可忽略

13

例 2：

弱阻尼衰减振荡

非保守系统

$$\ddot{y}+\varepsilon\dot{y}+y=0,\quad t>0,\quad y(0)=0,\ \dot{y}(0)=1$$

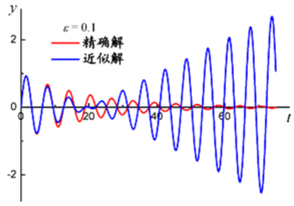
正则摄动：

$$y(t)\sim y_0(t)+\varepsilon y_1(t)+\cdots$$

保守

$$y(t)\sim \sin t-\frac{1}{2}\varepsilon t\sin t+\cdots$$

久期项



精确解：

$$y(t)=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}e^{-\varepsilon t/2}\sin\left(t\sqrt{1-\varepsilon^2/4}\right)$$

衰减

频率降低

14

$$\ddot{y}+\varepsilon\dot{y}+y=0,\quad t>0,\quad y(0)=0,\ \dot{y}(0)=1 \qquad \frac{d}{dt}\to\frac{\partial}{\partial t_1}+\varepsilon^\alpha\frac{\partial}{\partial t_2}$$

慢变

引入两个时间尺度：$t_1=t,\ t_2=\varepsilon^\alpha t$ $\Longrightarrow$ 增加自由度　解不唯一

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t_1^2}+2\varepsilon^\alpha\frac{\partial^2 y}{\partial t_1\partial t_2}+\varepsilon^{2\alpha}\frac{\partial^2 y}{\partial t_2^2}+\varepsilon\left(\frac{\partial y}{\partial t_1}+\varepsilon^\alpha\frac{\partial y}{\partial t_2}\right)+y=0$$

令 $y\sim y_0(t_1,t_2)+\varepsilon y_1(t_1,t_2)+\cdots$ $\Longrightarrow$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}+2\varepsilon^\alpha\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}+\cdots\right)(y_0+\varepsilon y_1+\cdots)$$

$$+\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial t_1}+\varepsilon^\alpha\frac{\partial}{\partial t_2}\right)(y_0+\cdots)+y_0+\varepsilon y_1+\cdots=0$$

$\Longrightarrow\ \alpha=1$

导致久期项　抵消久期项

15

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}+2\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}+\cdots\right)(y_0+\varepsilon y_1+\cdots)+\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial t_1}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_2}\right)(y_0+\cdots)+y_0+\varepsilon y_1+\cdots=0$$

$$y(0)=0,\ \dot{y}(0)=1$$

初始条件：$y=0,\ \dfrac{\partial y}{\partial t_1}+\varepsilon\dfrac{\partial y}{\partial t_2}=1,\quad \text{when } t_1=t_2=0$

$$O(1):\ \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1^2}+y_0=0,\quad y_0(0,0)=0,\ \frac{\partial y_0}{\partial t_1}(0,0)=1 \;\Longrightarrow$$

$$y_0=a_0(t_2)\sin t_1+b_0(t_2)\cos t_1,\quad a_0(0)=1,\ b_0(0)=0$$

$$O(\varepsilon):\ \begin{cases}\dfrac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2}+y_1=-2\dfrac{\partial^2 y_0}{\partial t_1\partial t_2}-\dfrac{\partial y_0}{\partial t_1}\\[2mm] y_1(0,0)=0,\ \dfrac{\partial y_1}{\partial t_1}(0,0)=-\dfrac{\partial y_0}{\partial t_2}(0,0)\end{cases}$$

16

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2}+y_1=-2\frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1\partial t_2}-\frac{\partial y_0}{\partial t_1} \qquad y_0=a_0(t_2)\sin t_1+b_0(t_2)\cos t_1,\quad a_0(0)=1,\ b_0(0)=0$$

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2}+y_1=-\left(2\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}+\frac{\partial}{\partial t_1}\right)(a_0\sin t_1+b_0\cos t_1)$$

$$=(2b_0'+b_0)\sin t_1-(2a_0'+a_0)\cos t_1$$

为消去久期项，要求：$2a_0'+a_0=0,\quad 2b_0'+b_0=0$

$$2a_0'+a_0=0,\quad a_0(0)=1 \;\to\; a_0(t_2)=e^{-t_2/2}$$

$$2b_0'+b_0=0,\quad b_0(0)=0 \;\to\; b_0(t_2)=0$$

$\Longrightarrow$

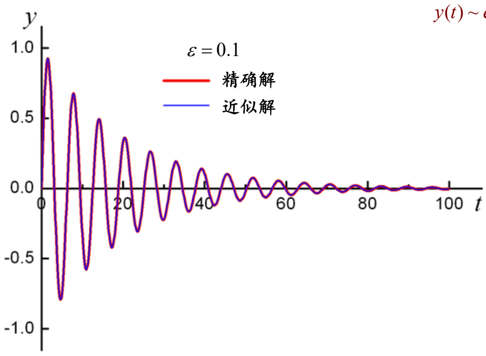
$$y_0(t_1,t_2)=e^{-t_2/2}\sin t_1$$

即：$y\sim e^{-\varepsilon t/2}\sin t$

17

$$y(t)=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}e^{-\varepsilon t/2}\sin\left(t\sqrt{1-\varepsilon^2/4}\right)$$

$$y(t)\sim e^{-\varepsilon t/2}\sin t$$



18

- 多重尺度法可用于存在边界层的情况
- 多重尺度法也适用于多个尺度共存的情况
- 有些问题存在很多个不同尺度
- 引入多尺度后增加了自由度，确定低阶展开式中系数的原则是使高阶项尽可能小（最小化原则）

19

附1：其它奇异摄动方法

1. WKB方法
2. 均匀化方法

20

1. WKB方法 (Wentzel, Kramers, Brillouin)

这一方法适用于对边界层变量有指数依赖性的情况，可大大减少工作量，曾用于获得 Schrödinger 方程的近似解

考虑方程 $\varepsilon^2 y'' - q(x)y = 0$，其中$q(x)$ 光滑　　线性方程

当 q 为常数时，得：$y(x) = a_0 e^{-\frac{1}{\varepsilon}x\sqrt{q}} + b_0 e^{\frac{1}{\varepsilon}x\sqrt{q}}$

设 $y \sim e^{\theta(x)/\varepsilon^\alpha}[y_0(x) + \varepsilon^\alpha y_1(x) + \cdots]$ ⟶　　$e^{\theta/\varepsilon^\alpha}$ 快变

$$y' \sim (\varepsilon^{-\alpha}\theta' y_0 + y_0' + \theta' y_1 + \cdots]e^{\theta/\varepsilon^\alpha}$$

$$y'' \sim \left\{\varepsilon^{-2\alpha}(\theta')^2 y_0 + \varepsilon^{-\alpha}[\theta'' y_0 + 2\theta' y_0' + (\theta')^2 y_1] + \cdots\right\} e^{\theta/\varepsilon^\alpha}$$

21

$\varepsilon^2 y'' - q(x)y = 0$　　$y \sim e^{\theta(x)/\varepsilon^\alpha}[y_0(x) + \varepsilon^\alpha y_1(x) + \cdots]$

$y'' \sim [\varepsilon^{-2\alpha}\theta_x^2 y_0 + \varepsilon^{-\alpha}(\theta_{xx}y_0 + 2\theta_x y_0' + \theta_x^2 y_1) + \cdots]e^{\theta/\varepsilon^\alpha}$

$$\varepsilon^2\left\{\frac{1}{\varepsilon^{2\alpha}}(\theta')^2 y_0 + \frac{1}{\varepsilon^\alpha}[\theta'' y_0 + 2\theta' y_0' + (\theta')^2 y_1] + \cdots\right\}$$

$$-q(x)(y_0 + \varepsilon^\alpha y_1 + \cdots) = 0 \longrightarrow \alpha = 1$$

程函方程

$O(1)$：$(\theta')^2 = q(x)$ ⟶ $\theta(x) = \pm\int^x \sqrt{q(s)}ds$　　非线性

$O(\varepsilon)$：$\theta'' y_0 + 2\theta' y_0' + (\theta')^2 y_1 = q(x)y_1$ ⟶

$\theta'' y_0 + 2\theta' y_0' = 0$ ⟶ $y_0(x) = \dfrac{c}{\sqrt{\theta'(x)}}$　　线性

⟶ $y \sim q(x)^{-1/4}\left(a_0 e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int^x \sqrt{q(s)}ds} + b_0 e^{\frac{1}{\varepsilon}\int^x \sqrt{q(s)}ds}\right)$　　要求 q 非零，a_0, b_0可为复数

22

例 1

$y \sim q(x)^{-1/4}\left(a_0 e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int^x \sqrt{q(s)}ds} + b_0 e^{\frac{1}{\varepsilon}\int^x \sqrt{q(s)}ds}\right)$

$q(x) = -e^{2x}$　　$\varepsilon^2 y'' + e^{2x} y = 0$ ⟶

$$y \sim e^{-x/2}\left(a_0 e^{-ie^x/\varepsilon} + b_0 e^{ie^x/\varepsilon}\right)$$

$$= e^{-x/2}[\alpha_0 \cos(\lambda e^x) + \beta_0 \sin(\lambda e^x)]$$　　其中 $\lambda = \varepsilon^{-1}$

边界条件：$y(0) = a,\ y(1) = b$ ⟶

$$y \sim e^{-x/2}\left[\frac{be^{1/2}\sin\lambda(e^x - 1) - a\sin\lambda(e^x - e)}{\sin\lambda(e-1)}\right]$$

23

$y \sim e^{-x/2}\left[\dfrac{be^{1/2}\sin\lambda(e^x - 1) - a\sin\lambda(e^x - e)}{\sin\lambda(e-1)}\right]$

精确解：$y(x) = c_0 J_0(\lambda e^x) + c_1 Y_0(\lambda e^x)$

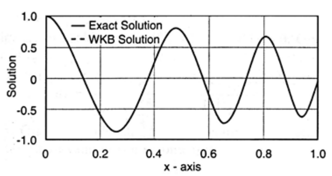
其中 $c_0 = \dfrac{1}{d}[bY_0(\lambda) - aY_0(\lambda e)]$，$c_1 = \dfrac{1}{d}[aJ_0(\lambda e) - bJ_0(\lambda)]$

J_0 和 Y_0 为第一类和第二类零阶 Bessel 函数

$d = J_0(\lambda e)Y_0(\lambda) - Y_0(\lambda e)J_0(\lambda)$

近似解与精确解比较

$\varepsilon = 0.1,\ a = 1,\ b = 0$



24

$y(x)=c_0J_0(\lambda e^x)+c_1Y_0(\lambda e^x)$ $d=J_0(\lambda e)Y_0(\lambda)-Y_0(\lambda e)J_0(\lambda)$

例 2

$c_0=\frac{1}{d}[bY_0(\lambda)-aY_0(\lambda e)],\ c_1=\frac{1}{d}[aJ_0(\lambda e)-bJ_0(\lambda)]$

求方程 $y''+\lambda^2e^{2x}y=0,\ y(0)=y(1)=0$ 的本征值

当 $\lambda>>1$，令 $\varepsilon=1/\lambda$，方程与例 1 相同，通解近似为

$$y\sim e^{-x/2}\left[\frac{be^{1/2}\sin\lambda(e^x-1)-a\sin\lambda(e^x-e)}{\sin\lambda(e-1)}\right]$$

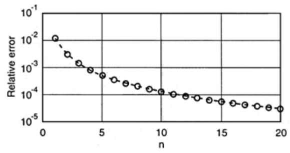
$a=b=0$

本征值：$\lambda\sim\frac{n\pi}{e-1}$

精确解：

$J_0(\lambda e)Y_0(\lambda)-Y_0(\lambda e)J_0(\lambda)=0$

的根



近似解与精确解比较

- 相对较易，但只适用于线性微分方程
- 程函方程（解的快变部分）是非线性的，有时很难解
- $q(x)$的零点是方程解的转折点（一侧为指数函数另一侧为正弦函数），两个区域需要分别求解，然后在过渡层（尺度为 $\varepsilon^{2/3}$ ）进行匹配

2. 均匀化方法

一些工程和科学问题常常需要处理具有多种组元的材料，如层合板、纤维增强复合材料、泡沫材料、多孔介质中的流动等。通常希望找到简化方程以描述其光滑了的平均行为

非均匀介质
复杂细观结构

均匀化 →

以宏观参数描
述的约化问题

多尺度　　　　单一尺度

例：

考虑方程 $\frac{d}{dx}\left[D(x,x/\varepsilon)\frac{du}{dx}\right]=f(x),\ u(0)=a,\ u(1)=b$

记 $y=x/\varepsilon$　　　x 慢变，y 快变（微尺度）

其中 $0<D_m(x)\le D(x,y)\le D_M(x)$

问题：是否可将 D 光滑 (不依赖于ε)？如何平均？

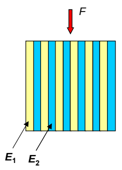
方法一：D 对 y 求平均

$$D_{\text{avg}}(x)=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y}\int_0^y D(x,r)dr=\langle D\rangle_\infty \quad ?$$

$\varepsilon\to 0$

复合材料的弹性模量

假设两种材料体积分数相同



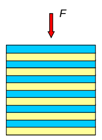
$F_1=A_1\sigma_1=A_1E_1\varepsilon$

$F_2=A_2\sigma_2=A_2E_2\varepsilon$

$A_1=A_2=A/2$

$F=F_1+F_2=A\varepsilon(E_1+E_2)/2$

→ $E_{\text{avg}}=(E_1+E_2)/2$



$\varepsilon_1=\delta_1/h_1=\sigma/E_1$

$\varepsilon_2=\delta_2/h_2=\sigma/E_2$

$h_1=h_2=h/2$

$\varepsilon=(\delta_1+\delta_2)/h=(\varepsilon_1+\varepsilon_2)/2$

$=\sigma\left(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}\right)\Big/2=\sigma\Big/\frac{2E_1E_2}{E_1+E_2}$

→ $E_{\text{avg}}=\frac{2E_1E_2}{E_1+E_2}$

$\frac{d}{dx}\left[D(x,x/\varepsilon)\frac{du}{dx}\right]=f(x),\ u(0)=a,\ u(1)=b$

考虑 x,y 两个尺度，方程写为　　$y=x/\varepsilon$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[D(x,y)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]=\varepsilon^2f(x)\qquad \frac{d}{dx}=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y}$$

设 $u=u_0(x,y)+\varepsilon u_1(x,y)+\varepsilon^2u_2(x,y)+\cdots$ →

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[D\frac{\partial u_0}{\partial y}\right]+\varepsilon\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[D\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)\right\}$$

$$+\varepsilon^2\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[D\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[D\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right]-f(x)\right\}+\cdots=0$$

$$O(1):\ \frac{\partial}{\partial y}\left[D(x,y)\frac{\partial u_0}{\partial y}\right]=0 \longrightarrow$$

$$u_0(x,y)=c_1(x)+c_0(x)\int_{y_0}^{y}\frac{ds}{D(x,s)}$$ y_0 任意

但 $\int_{y_0}^{y}\frac{ds}{D(x,s)}\ge\int_{y_0}^{y}\frac{ds}{D_M(x)}=\frac{y-y_0}{D_M(x)}\to\infty$, when $y\to\infty$

而 u_0 有界 $\longrightarrow$ $c_0(x)=0,\ u_0=u_0(x)$ 仅与慢变量有关

另一方面，有：$\int_{y_0}^{y}\frac{ds}{D(x,s)}\le\frac{y-y_0}{D_m(x)}$, when $y\to\infty$

增长限于 y 线性函数

31

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[D\frac{\partial u_0}{\partial y}\right]+\varepsilon\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[D\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)\right\}+\cdots=0$$

$u_0=u_0(x)$

$$O(\varepsilon):\ \frac{\partial}{\partial y}\left[D\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{du_0}{dx}\right)\right]=0 \longrightarrow D\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{du_0}{dx}\right)=b_0(x)$$

$$\longrightarrow u_1(x,y)=b_1(x)+b_0(x)\int_{y_0}^{y}\frac{ds}{D(x,s)}-y\frac{du_0}{dx}$$

后两项无界，但均为 $O(y)$，因此要求

$$\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y}\left[b_0(x)\int_{y_0}^{y}\frac{ds}{D(x,s)}-y\frac{du_0}{dx}\right]=0$$

或 $$\frac{du_0}{dx}=b_0(x)\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y}\int_{y_0}^{y}\frac{ds}{D(x,s)}=\left\langle D^{-1}\right\rangle_\infty b_0(x)$$

32

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[D\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[D\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right]-f(x)=0$$

$$D\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{du_0}{dx}\right)=b_0(x)$$

$$O(\varepsilon^2):\ \frac{\partial}{\partial y}\left[D(x,y)\frac{\partial u_2}{\partial y}\right]=f(x)-b_0'(x)-\frac{\partial}{\partial y}\left[D(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right]$$

$$\longrightarrow u_2(x,y)=d_1(x)+d_0(x)\int_{y_0}^{y}\frac{ds}{D(x,s)}$$

$$-\int_{y_0}^{y}\frac{\partial u_1(x,s)}{\partial x}ds+(f-b_0')\int_{y_0}^{y}\frac{sds}{D(x,s)}$$

只有最后一项为 $O(y^2)$ $\longrightarrow$ $b_0'(x)=f(x)$

33

$$\frac{du_0}{dx}=\left\langle D^{-1}\right\rangle_\infty b_0(x) \qquad b_0'(x)=f(x)$$

$$\longrightarrow f(x)=\frac{d}{dx}\left[\left(\left\langle D^{-1}\right\rangle_\infty\right)^{-1}\frac{du_0}{dx}\right]$$

即，u_0 应满足方程

$$\frac{d}{dx}\left[\bar{D}(x)\frac{du_0}{dx}\right]=f(x),\ u_0(0)=a,\ u_0(1)=b$$

均匀化方程
不依赖于 ε

其中 $\bar{D}(x)=\frac{1}{\left\langle D^{-1}\right\rangle_\infty}$ $\qquad \left\langle D^{-1}\right\rangle_\infty=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y}\int_{y_0}^{y}\frac{ds}{D(x,s)}$

可见：直接对 D 平均是不妥的 $\bar{D}\ne\langle D\rangle_\infty$

34

例：$$\frac{d}{dx}\left[D(x,x/\varepsilon)\frac{du}{dx}\right]=f(x),\ u(0)=a,\ u(1)=b$$

如取 $$D(x,y)=\frac{1}{1+\alpha x+\beta g(x)\cos y}$$

则：$$\left\langle D^{-1}\right\rangle_\infty=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y}\int_{y_0}^{y}[1+\alpha x+\beta g(x)\cos s]ds=1+\alpha x$$

取 $f(x)=0,\ a=0,\ b=1,\ g(x)=1,\ \alpha=0$ $\longrightarrow$

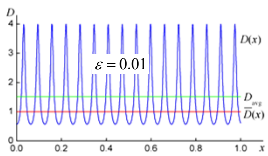
$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{1+\beta\cos(x/\varepsilon)}\frac{du}{dx}\right]=0,\ u(0)=0,\ u(1)=1$$

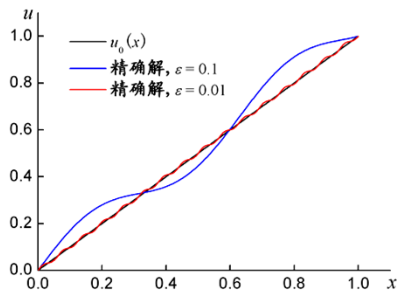
$$\left\langle D^{-1}\right\rangle_\infty=1 \qquad \frac{d^2u_0}{dx^2}=0$$

精确解：$u(x)=\frac{x+\beta\varepsilon\sin(x/\varepsilon)}{1+\beta\varepsilon\sin(1/\varepsilon)}$ 近似解：$u_0(x)=x$

35

$$\frac{d}{dx}\left[D\frac{du}{dx}\right]=0,\ u(0)=0,\ u(1)=1$$





$$D=\frac{1}{1+\beta\cos(x/\varepsilon)}$$

$\beta=0.75$

$$u(x)=\frac{x+\beta\varepsilon\sin(x/\varepsilon)}{1+\beta\varepsilon\sin(1/\varepsilon)}$$

$u_0(x)=x$

36

➢ 均匀化方法可看作多重尺度法的推广，不同的是即使对双尺度，也必须考虑三阶方程

➢ 此方法的关键是得到一个仅包含慢变量的问题，其系数由对快尺度的平均得到

➢ 当尺度更多时，很难找到正确的约束条件。因此，此方法多用于周期结构

➢ 此方法也可用于导热等其它问题以及系数 D 是间断的情况

11.1 单摆正常平衡和倒置平衡的稳定性

1. 确定平衡的稳定性

2. 结果讨论

确定平衡点并引入小扰动分析其稳定性

1. 确定平衡的稳定性

单摆的控制方程：$\dfrac{d^2\theta^*}{dt^2}+\sin\theta^*=0,\quad t=t^*\left(\dfrac{L}{g}\right)^{-1/2}$

平衡解：不随时间变化 $\theta^*=\Theta=\text{const}$ →

$\sin\theta^*=0$ → $\Theta=0$ 正常平衡；$\Theta=\pi$ 倒置平衡

稳定性分析：引入一个度量与稳定态偏离的变量

$$\theta'=\theta^*-\Theta$$

$\dfrac{d^2\theta^*}{dt^2}+\sin\theta^*=0$ $\quad\theta'=\theta^*-\Theta$

控制方程：$\dfrac{d^2\theta'}{dt^2}+\sin(\theta'+\Theta)=0$

假定与平衡态的偏离很小，线化后得

$\Theta=0$: $\dfrac{d^2\theta'}{dt^2}+\theta'=0$ → 稳定 随遇稳定 neutrally stable

$$\theta'=\theta_0\cos t+\theta_1\sin t,\quad \theta_0=\theta'(0),\ \theta_1=\frac{d\theta'}{dt}(0)$$

$\Theta=\pi$: $\dfrac{d^2\theta'}{dt^2}-\theta'=0$ → 不稳定

$$\theta'=\theta_0\cosh t+\theta_1\sinh t$$

2. 结果讨论

➢ 微小扰动是不可避免的，因此不稳定平衡实际上观察不到

➢ 小扰动分析只适用于失稳起始，失稳后期的行为是非线性的

➢ 通常存在阻尼，偏离正常平衡的小扰动最终会完全消失，称为渐近稳定

11.3 相平面

1. 无阻尼单摆的相图

2. 分离线、临界点和极限环

3. 临界点附近相轨迹的行为

4. 阻尼摆

稳定性问题的相平面描述

1. 无阻尼单摆的相图

$$\frac{d^2\theta^*}{dt^{*2}}+\frac{g}{L}\sin\theta^*=0,\quad \theta^*(0)=a,\quad \frac{d\theta^*}{dt^*}(0)=\Omega$$

引入变量 $\theta=\theta^*,\ t=\omega_0 t^*$ ⟹

$$\ddot\theta+\sin\theta=0,\quad \theta(0)=a,\ \dot\theta(0)=\Omega\left(\frac{L}{g}\right)^{1/2}\equiv b$$

记 $\omega\equiv\dot\theta$ 并视为 θ 的函数，则　　方程中不显含自变量

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

方程化为 $\omega\omega'+\sin\theta=0$ ⟹ $\omega^2=2\cos\theta-2\cos a+b^2$

给定初始条件 (a,b)，方程 $\omega^2=2\cos\theta-2\cos a+b^2$

给出了摆的运动在相平面 (θ,ω) 上的轨迹

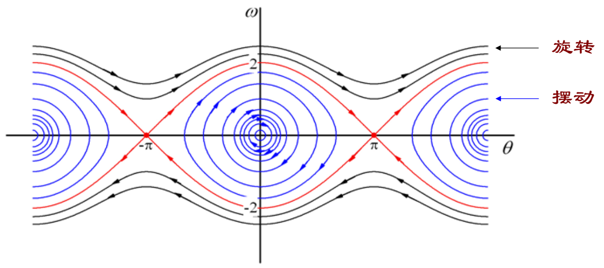
对不同的初始条件，方程构成了相平面上的曲线族

- 曲线关于 θ 轴和 ω 轴对称
- 关于 θ 的周期为 2π　　$\omega\omega'+\sin\theta=0$
- $\omega>0$ 时，在 $(0,\pi)$, $\omega'<0$，在 $(-\pi,0)$, $\omega'>0$
- 当 $\theta\neq 0,\pm\pi,\pm 2\pi\cdots$ 时，当 $\omega\to 0$, $|\omega'|\to\infty$

  而对 $(0,0),(\pi,0),\cdots$，ω' 不确定

相图

$\omega\omega'+\sin\theta=0$　　$\omega^2=2\cos\theta-2\cos a+b^2$

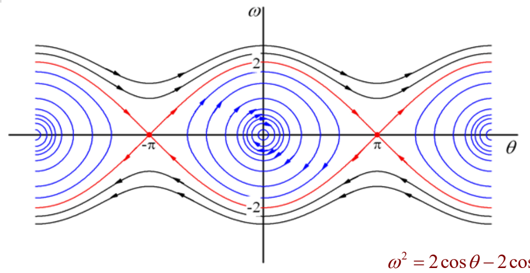


$(0,0)$: $\omega d\omega+\theta d\theta\approx 0$, $\omega^2+\theta^2=\text{const}$

$(\pi,0)$: $\omega d\omega-\bar\theta d\bar\theta\approx 0$, $\omega^2-\bar\theta^2=\text{const}$　　$\bar\theta=\theta-\pi$

退化曲线：$\omega=\pm(\theta-\pi)$

2. 分离线、临界点和极限环



$\omega^2=2\cos\theta-2\cos a+b^2$

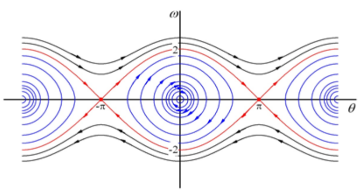
分离线：$a=\pi,\ b=0$ ⟹ $\omega^2=2\cos\theta+2$

$\theta=0$ ⟹ $\omega^2=4,\ \omega=\pm 2$

$\omega\omega'+\sin\theta=0$　　$\omega^2=2\cos\theta-2\cos a+b^2$

当 $(\theta,\omega)\neq(n\pi,0)$ 时

$$\omega'=-\frac{\sin\theta}{\omega}\ \text{确定}$$



临界点：$(n\pi,0)$

除临界点外，相轨迹的斜率单值，但在临界点，ω' 多值。因此，除临界点外，相轨迹不相交

临界点就是平衡点，平衡点的稳定性
可由临界点附近的相轨迹描述　　$\sin\theta=0$

自治系统 (autonomous system)

控制方程中不显含 t 的动力学系统称为自治系统

对可用单坐标描述位置的自治系统 $\ddot x=g(x,\dot x)$

可引入速度 $v\equiv\dot x$，得 $v\dfrac{dv}{dx}=g(x,v)$

因此，此系统在相平面 v-x 的轨迹固定

更一般地，考虑一阶方程 $f(x,y)\dfrac{dy}{dx}=g(x,y)$

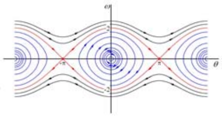
除了临界点（$f(x,y)=0,\ g(x,y)=0$）外，相平面轨迹的斜率 dy/dx 唯一确定

令轨迹以参数 t 给出，则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}$

于是，过 (x_0,y_0) 点的轨迹为　　*t 不一定是真实时间*

$$\frac{dx}{dt}=f(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=g(x,y),\quad x(t_0)=x_0,\ y(t_0)=y_0$$

极限环



过一点 (x_0,y_0) 的轨迹可分为三类：

1. 过 (x_0,y_0) 的轨迹就是 (x_0,y_0) 本身 → 平衡点
2. 过 (x_0,y_0) 的轨迹回到 (x_0,y_0)，得到一简单闭曲线 → 极限环，周期解
3. 过 (x_0,y_0) 的轨迹即不在原地，也不回来，而是或趋向无穷远，或到达其它平衡点，或趋近于一条闭曲线（极限环或通过几个临界点）

3. 临界点附近相轨迹的行为

$f(x,y)\dfrac{dy}{dx}=g(x,y)$　　$\dfrac{dx}{dt}=f(x,y),\ \dfrac{dy}{dt}=g(x,y),\ \ x(t_0)=x_0,\ y(t_0)=y_0$

如 (X,Y) 为临界点，则　　*平衡点*

$$f(X,Y)=0,\ \ g(X,Y)=0$$

引入偏差 $\bar{x},\bar{y}$：$x(t)=X+\bar{x}(t),\ \ y(t)=Y+\bar{y}(t)$ →

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=f(X+\bar{x},Y+\bar{y})=f(X,Y)+f_x(X,Y)\bar{x}+f_y(X,Y)\bar{y}+\cdots$$

$$\frac{d\bar{y}}{dt}=g(X+\bar{x},Y+\bar{y})=g(X,Y)+g_x(X,Y)\bar{x}+g_y(X,Y)\bar{y}+\cdots$$

$\dfrac{d\bar{x}}{dt}=f_x(X,Y)\bar{x}+f_y(X,Y)\bar{y}+\cdots$　　$\dfrac{d\bar{y}}{dt}=g_x(X,Y)\bar{x}+g_y(X,Y)\bar{y}+\cdots$

略去高阶项，得 $\dfrac{d\bar{x}}{dt}=a\bar{x}+b\bar{y},\quad \dfrac{d\bar{y}}{dt}=c\bar{x}+d\bar{y}$

$a=f_x(X,Y),\ b=f_y(X,Y),\ c=g_x(X,Y),\ d=g_y(X,Y)$

其解为 $\begin{bmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\end{bmatrix}e^{mt}$　　*$\hat{x},\hat{y}$ 为积分常数*

m 满足 $\begin{bmatrix}a-m & b\\ c & d-m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$　　*特征方程*

非平凡解：$m^2+\beta m+\gamma=0,\quad \beta=-(a+d),\ \gamma=ad-bc$

当 $\gamma\neq 0,\ \beta^2-4\gamma\neq 0$ 时有两个相异非零根

$\begin{bmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\end{bmatrix}e^{mt}$　　$m^2+\beta m+\gamma=0,\quad \beta=-(a+d),\ \gamma=ad-bc$

I：$\beta^2-4\gamma>0$ →

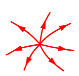
两个实根　$m_{1,2}=\left[-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\gamma}\right]/2$

I(a)：$\gamma<0$ → $m_1>0,\ m_2<0$

不稳定，鞍点

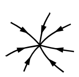
I(b)：$\gamma>0$　如 $\beta<0$ 则 $m_1,m_2>0$

不稳定，节点



如 $\beta>0$ 则 $m_1,m_2<0$

渐近稳定，节点



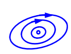
吸引子

$\begin{bmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\end{bmatrix}e^{mt}$　　$m^2+\beta m+\gamma=0,\quad \beta=-(a+d),\ \gamma=ad-bc$

II：$\beta^2-4\gamma<0$ →

两个共轭复根　$m_{1,2}=\left[-\beta\pm i\sqrt{4\gamma-\beta^2}\right]/2$

II(a)：$\beta=0$　周期性扰动，轨迹封闭



中性稳定，Liapunov 稳定，中心点

不发展，不衰减

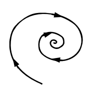
II(b)：$\beta\neq 0$　螺旋线，焦点

$\beta<0$

不稳定

$\beta>0$

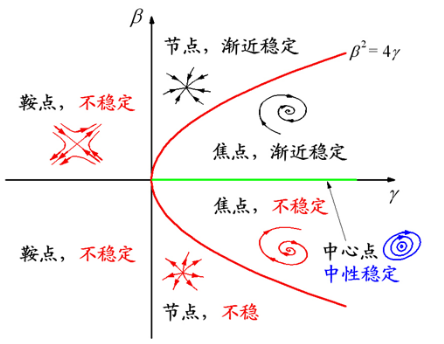
渐近稳定



吸引子

$\frac{d\bar{x}}{dt}=a\bar{x}+b\bar{y},\ \frac{d\bar{y}}{dt}=c\bar{x}+d\bar{y}$

$\beta=-(a+d),\ \gamma=ad-bc$



线化需满足一定条件，充分条件是 f, g 及其一阶导数在 (X, Y) 连续，但中心点并不满足此条件

中心点和 $\gamma=0$，$\beta^2-4\gamma=0$ 的情况需要进一步讨论

4. 阻尼摆

$\frac{d\bar{x}}{dt}=a\bar{x}+b\bar{y},\ \frac{d\bar{y}}{dt}=c\bar{x}+d\bar{y}$

$\beta=-(a+d),\ \gamma=ad-bc$

$$\ddot{\theta}+\nu\dot{\theta}+\sin\theta=0,\quad \nu>0$$

记 $x=\theta,\ \dot{x}=y$，则得 $\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-\nu y-\sin x\end{cases}$

平衡点：$y=0,\ \sin x=0$ ⟶ $x=n\pi,\ y=0$

$(0,0)$：$\dot{x}=y,\ \dot{y}=-\nu y-x$ ⟶

$a=0,\ b=1,\ c=-1,\ d=-\nu$

$\beta=\nu,\ \gamma=1,\ \beta^2-4\gamma=\nu^2-4$

$\nu>2$ 稳定节点 过阻尼

$\nu<2$ 稳定焦点 欠阻尼

$\frac{d\bar{x}}{dt}=a\bar{x}+b\bar{y},\ \frac{d\bar{y}}{dt}=c\bar{x}+d\bar{y}\quad \beta=-(a+d),\ \gamma=ad-bc$

$(\pi,0)$：引入 $\bar{x}=x-\pi,\ \bar{y}=y$ ⟶

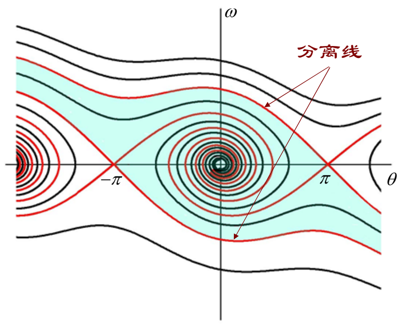
$\dot{\bar{x}}=\bar{y},\ \dot{\bar{y}}=-\nu\bar{y}+\bar{x}$ ⟶

$a=0,\ b=1,\ c=1,\ d=-\nu$

$\beta=\nu,\ \gamma=-1,\ \beta^2-4\gamma=\nu^2+4>0$ 鞍点

不稳定

小阻尼时的相图 $(0<\nu<2)$



无周期解

推广：

3 维空间，6 维相空间

N 个质点，$6N$ 个自由度的系统，$6N$ 维相空间

连续体，无限维相空间，Fourier 变换

附2：分岔现象和奇异吸引子

1. 分岔现象
2. 奇异吸引子

非线性问题常常出现多值解

何时出现多值解？ 这些解是否稳定？

1. 分岔现象

例 1：非线性振动方程

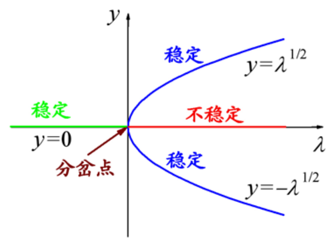
$$\ddot{y}+2\beta\dot{y}-\lambda y+y^3=0,\quad t>0$$

平衡态：

$\lambda y-y^3=0$ ⟶

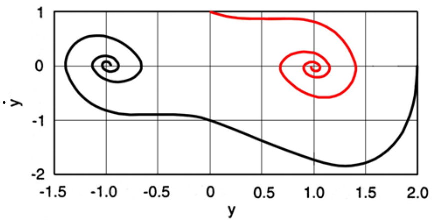
$y=0$

$y=\pm\sqrt{\lambda}$ if $\lambda\geq0$



相轨迹

$\ddot{y}+2\beta\dot{y}-\lambda y+y^3=0,\ t>0$



$\beta=1/4,\quad \lambda=1$

(i) $y(0)=0,\ \dot{y}(0)=1$

(ii) $y(0)=2,\ \dot{y}(0)=0$

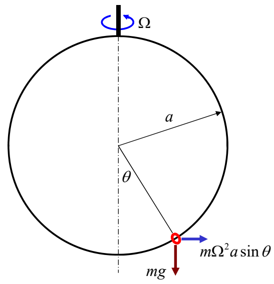
例 2：一个子环在旋转环上的运动

问题：

大环和子环光滑、无摩擦

大环以角速度 Ω 转动

当 Ω 变化时，子环如何运动？



控制方程：

$$ma\frac{d^2\theta}{dt^2}=m\Omega^2 a\sin\theta\cos\theta-mg\sin\theta$$

$ma\frac{d^2\theta}{dt^2}=m\Omega^2 a\sin\theta\cos\theta-mg\sin\theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=\Omega^2(\cos\theta-\lambda)\sin\theta,\quad \lambda=\frac{g}{\Omega^2 a}$$

$\lambda>0$

写成一阶方程组：
$$\begin{cases}\dfrac{d\theta}{dt}=\omega\\ \dfrac{d\omega}{dt}=\Omega^2(\cos\theta-\lambda)\sin\theta\end{cases}$$

平衡点： $\omega=0,$ (1) $\sin\theta=0,\ \theta=0,\pm\pi$

(2) $\cos\theta=\lambda$

(2) 仅当 $\lambda\le 1$ 时有实值解

Ω足够大时

$\frac{d^2\theta}{dt^2}=\Omega^2(\cos\theta-\lambda)\sin\theta,\quad \lambda=\frac{g}{\Omega^2 a}$

稳定性：

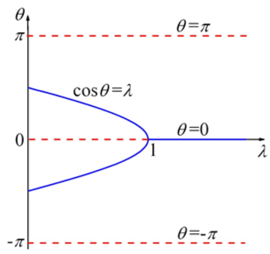
平衡点 (1) $\theta=0,\pm\pi$ (2) $\cos\theta=\lambda$

$\theta=\pm\pi$ 不稳定

$\theta=0,\ \lambda<1$ 不稳定

$\theta=0,\ \lambda>1$ 稳定

$0<\lambda<1,\ \cos\theta=\lambda$ 稳定



当 $\lambda<1$ 时出现分叉

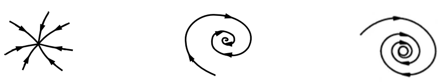
$\Omega\nearrow\ \rightarrow\lambda\searrow$

2. 奇异吸引子 (strange attractor)

吸引子： $\frac{dx}{dt}=f(x,y),\ \frac{dy}{dt}=g(x,y)$ 在 (x,y) 平面的稳定渐近轨道（当 $t\to\infty$ 时）

度量为零，集中

节点　焦点　极限环



奇异吸引子：非经典的吸引子

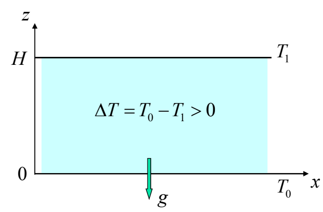
度量为零，覆盖范围广

例：Lorenz 方程

背景：温升引起的对流

定常状态：

$$T=T_0-\Delta T\frac{z}{H}$$



扰动可能引起对流

（考虑二维问题）

$$T=T_0-\Delta T\frac{z}{H}+\theta(x,z,t)$$

可引入速度势 ψ： $V_x=-\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad V_z=\frac{\partial\psi}{\partial x}$

控制方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi = -\frac{\partial(\psi,\nabla^2\psi)}{\partial(x,z)} + \nu\nabla^4\psi + g\alpha\frac{\partial\theta}{\partial x}$$ N-S 方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta = -\frac{\partial(\psi,\theta)}{\partial(x,z)} + \frac{\Delta T}{H}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \kappa\nabla^2\theta$$

ν 粘性系数

α 热膨胀系数

κ 热扩散系数

边界条件（自由边界）：

$$\psi = 0,\ \ \nabla^2\psi = 0,\ \ \text{at } z = 0 \text{ and } z = H$$

平凡解：$\psi = 0,\ \ \theta = 0$

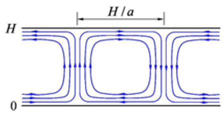
Rayleigh 讨论了线性问题：设解在 x 向为周期函数

令 $\psi = \psi_0 \sin\frac{\pi a x}{H}\sin\frac{\pi z}{H},\ \ \theta = \theta_0 \sin\frac{\pi a x}{H}\sin\frac{\pi z}{H}$

a 为参数

→ 当 $R_a > R_c = \frac{\pi}{a^2}(1+a^2)^3$ 时发生对流

其中 $R_a = \frac{g\alpha H^3\Delta T}{\nu\kappa}$ Rayleigh 数



而 $R_{c\min} = \frac{27\pi^4}{4}$ $a^2 = \frac{1}{2}$ 时

Lorenz 将问题扩展到非线性，设解为

$$\frac{a}{\kappa(1+a^2)}\psi = X\sqrt{2}\sin\frac{\pi a x}{H}\sin\frac{\pi z}{H}$$

$$\pi\frac{R_a}{R_c}\frac{\theta}{\Delta T} = Y\sqrt{2}\sin\frac{\pi a x}{H}\sin\frac{\pi z}{H} - Z\sin\frac{2\pi z}{H}$$

其中 $X = X(t),\ Y = Y(t),\ Z = Z(t)$

并令 $\tau = \frac{\pi^2(a^2+1)}{H^2}\kappa t$

得到一非线性方程组（Lorenz 方程）

$$\begin{cases}\dot{X} = -\sigma X + \sigma Y \\ \dot{Y} = rX - Y - XZ \\ \dot{Z} = -bZ + XY\end{cases}$$

其中 $\sigma = \frac{\nu}{\kappa},\ b = \frac{4}{1+a^2},\ r = \frac{R_a}{R_c}$

平衡解：当 $r<1$ 时，$X = Y = Z = 0$（O 解） 稳定 无对流

当 $r>1$ 时，另有两个解 $C,\ C'$：

$X = Y = \pm\sqrt{b(r-1)},\ Z = r-1$ 对流，定常

且 O 解不稳定，而 $C,\ C'$ 解当 $\sigma < b+1$ 时稳定

$\sigma = \frac{\nu}{\kappa},\ b = \frac{4}{1+a^2},\ r = \frac{R_a}{R_c}$

$C,\ C'$：$X = Y = \pm\sqrt{b(r-1)},\ Z = r-1$

如 $\sigma > b+1$，且 $r > r_c$，则 $C,\ C'$ 不稳定 对流，不定常

数值解：取 $\sigma = 10,\ b = \frac{8}{3},\ r = 28$ $(r_c \approx 24.74)$

发现 X, Y 平面上轨道是不规则的，一会儿绕 C，一会儿绕 C'，一会儿绕 两个点，不存在极限环，只是相当于两个吸引子，将轨道束缚在其周围。

非随机行为，称为奇异吸引子