Ch. 10 奇异摄动理论在生化动力学问题中的应用

10.1 单酶-单底物化学反应初值问题的表述

10.2 用奇异摄动法求得的近似解

匹配法，外解为隐函数出现待定常数

高阶解的匹配方法

10.1 单酶-单底物化学反应初值问题的表述

1. 质量作用定律
2. 酶的催化作用
3. 尺度化和最后公式

---

1. 质量作用定律

考虑分子 a 和 b 结合成分子 c 的情况：$a+b\to c$

如其它外部条件（温度等）固定，在浓度不太高的情况下，可假设有效碰撞的机会与浓度成正比

因此，$\dfrac{dc}{dt}=k_1ab$　　其中 k_1 为速率常数

记为　$a+b\xrightarrow{k_1}c$

同样，有　$\dfrac{da}{dt}=\dfrac{db}{dt}=-k_1ab$

当 a, b 相同时，为　$a+a\xrightarrow{k_1}a_2$，$\dfrac{da_2}{dt}=k_1a^2$

对可逆反应：　$a+b\underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}}c$　→

$$\frac{da}{dt}=-k_1ab+k_{-1}c,\quad \frac{db}{dt}=-k_1ab+k_{-1}c,\quad \frac{dc}{dt}=k_1ab-k_{-1}c$$

由此可得　$\dfrac{d(a+c)}{dt}=\dfrac{d(b+c)}{dt}=0$

$$a+c=\text{const},\ \ b+c=\text{const}$$

这是必然的

---

2. 酶的催化作用

瑞典化学家 S. Arrhenius 提出：酶催化作用的本质是酶与底物结合产生“酶一底物”分子（复合物），底物分子受酶分子束缚后被活化，很容易形成产物

$$s^*+e^*\underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}}c^*\xrightarrow{k_2}p^*+e^*$$

s^*　底物 substrate

e^*　酶 enzyme

c^*　复合物 complex

p^*　产物 product

也表示它们的浓度

$s^*+e^*\underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}}c^*\xrightarrow{k_2}p^*+e^*$

假定一开始只有底物和酶，浓度分别为 $\overline{s}$ 和 $\overline{e}$　→

$$\begin{cases}\dfrac{ds^*}{dt^*}=-k_1s^*e^*+k_{-1}c^*, & s^*(0)=\overline{s}\\[2mm] \dfrac{de^*}{dt^*}=-k_1s^*e^*+k_{-1}c^*+k_2c^*, & e^*(0)=\overline{e}\\[2mm] \dfrac{dc^*}{dt^*}=k_1s^*e^*-k_{-1}c^*-k_2c^*, & c^*(0)=0\\[2mm] \dfrac{dp^*}{dt^*}=k_2c^*, & p^*(0)=0\end{cases}$$

可消去 e^*, p^*

→ $e^*+c^*=\text{const}=\overline{e}$，$s^*+c^*+p^*=\text{const}=\overline{s}$

$$s^* + e^* \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} c^* \xrightarrow{k_2} p^* + e^*$$

$$\begin{cases} \dfrac{ds^*}{dt^*} = -k_1\bar{e}s^* + (k_1 s^* + k_{-1})c^*, & s^*(0) = \bar{s} \\ \dfrac{dc^*}{dt^*} = k_1\bar{e}s^* - (k_1 s^* + k_{-1} + k_2)c^*, & c^*(0) = 0 \end{cases}$$

$$e^* = \bar{e} - c^*, \quad p^* = \bar{s} - s^* - c^*$$

通常底物的初始浓度远大于酶的初始浓度，此时在极短时间内酶就“满载”，复合物浓度急剧上升，以后的大部分时间里，复合物浓度几乎保持不变，反应速度仅受酶的工作快慢限制，直至底物将近用完，反应越来越慢，复合物浓度显著减小，最后所有底物转化为产物，酶重获“自由”

---

3. 尺度化和最后公式

$$\begin{cases} \dfrac{ds^*}{dt^*} = -k_1\bar{e}s^* + (k_1 s^* + k_{-1})c^*, & s^*(0) = \bar{s} \\ \dfrac{dc^*}{dt^*} = k_1\bar{e}s^* - (k_1 s^* + k_{-1} + k_2)c^*, & c^*(0) = 0 \end{cases}$$

考虑中间阶段，此时可以$\bar{s}$和$\bar{e}$分别作为s^*和c^*的尺度，时间尺度暂难确定，记为$\bar{t}$，即引入

$$s = \frac{s^*}{\bar{s}}, \quad c = \frac{c^*}{\bar{e}}, \quad t = \frac{t^*}{\bar{t}}$$

则得 $\dfrac{\bar{s}}{\bar{t}}\dfrac{ds}{dt} = -k_1\bar{e}\,\bar{s}\,s(1-c) + k_{-1}\bar{e}c \longrightarrow \bar{t} = \dfrac{1}{k_1\bar{e}}$

正向反应主导

$$\frac{ds^*}{dt^*} = -k_1\bar{e}s^* + (k_1 s^* + k_{-1})c^*, \quad \frac{dc^*}{dt^*} = k_1\bar{e}s^* - (k_1 s^* + k_{-1} + k_2)c^*$$

$$s = \frac{s^*}{\bar{s}}, \quad c = \frac{c^*}{\bar{e}}, \quad t = \frac{t^*}{\bar{t}}, \quad \bar{t} = \frac{1}{k_1\bar{e}}$$

最后公式：
$$\begin{cases} \dot{s} = -s + (s + \kappa - \lambda)c \\ \varepsilon\dot{c} = s - (s + \kappa)c \\ s(0) = 1, \quad c(0) = 0 \end{cases}$$

其中 $\varepsilon = \dfrac{\bar{e}}{\bar{s}}, \quad \kappa = \dfrac{k_{-1} + k_2}{k_1\bar{s}}, \quad \lambda = \dfrac{k_2}{k_1\bar{s}}$

$\bar{t}$ 的物理意义： $\dfrac{ds^*}{dt^*} = -k_1 s^* e^* + k_{-1}c^*$

忽略逆反应，得： $\dfrac{ds^*}{dt^*} = -k_1 s^* e^* \longrightarrow \dfrac{ds^*}{s^*} = -k_1 e^* dt^*$

故 $\bar{t}$ 为只考虑正向反应，初始时刻 s^* 的衰减时间常数

10.2 用奇异摄动法求得的近似解

1. 外解，Michaelis-Menten 近似
2. 内解
3. 一致近似
4. 高阶近似
5. 讨论

---

1. 外解，Michaelis-Menten 近似

$$\begin{cases} \dot{s} = -s + (s + \kappa - \lambda)c \\ \varepsilon\dot{c} = s - (s + \kappa)c \\ s(0) = 1, \quad c(0) = 0 \end{cases}$$

设 $\begin{cases} s(t) = s_0(t) + \varepsilon s_1(t) + \varepsilon^2 s_2(t) + \cdots \\ c(t) = c_0(t) + \varepsilon c_1(t) + \varepsilon^2 c_2(t) + \cdots \end{cases} \longrightarrow$

$\begin{cases} \dot{s}_0 = -s_0 + (s_0 + \kappa - \lambda)c_0 \\ s_0 - (s_0 + \kappa)c_0 = 0 \end{cases} \longrightarrow c_0 = \dfrac{s_0}{s_0 + \kappa}$ Michaelis-Menten 近似 $\longrightarrow$

$\dot{s}_0 = -\dfrac{\lambda s_0}{s_0 + \kappa} \longrightarrow s_0 + \kappa \ln s_0 = -\lambda t + Q$ 待定常数由匹配确定

$t = 0$ 为边界层（初始层）

---

2. 内解

$$\dot{s} = -s + (s + \kappa - \lambda)c$$
$$\varepsilon\dot{c} = s - (s + \kappa)c$$
$$s(0) = 1, \quad c(0) = 0$$

假设一宽为$\delta(\varepsilon)$的内层或称初始层，引入$\tau = \dfrac{t}{\delta(\varepsilon)}$

$S(\tau, \varepsilon) = s(\delta\tau, \varepsilon), \quad C(\tau, \varepsilon) = c(\delta\tau, \varepsilon) \longrightarrow$

$$\begin{cases} \delta^{-1}\dfrac{dS}{d\tau} = -S + (S + \kappa - \lambda)C \\ \varepsilon\delta^{-1}\dfrac{dC}{d\tau} = S - (S + \kappa)C \end{cases}$$

$\longrightarrow \delta = \varepsilon, \quad \tau = \dfrac{t}{\varepsilon}$

$\dot{s}=-s+(s+\kappa-\lambda)c$

$\varepsilon\dot{c}=s-(s+\kappa)c$

$s(0)=1,\ \ c(0)=0$

$$\xrightarrow{\quad}\begin{cases}S'=\varepsilon[-S+(S+\kappa-\lambda)C]\\ C'=S-(S+\kappa)C\\ S(0,\varepsilon)=1,\ \ C(0,\varepsilon)=0\end{cases}$$

$$O(1):\ \begin{cases}S_0'=0\\ C_0'=S_0-(S_0+\kappa)C_0\\ S_0(0)=1,\ C_0(0)=0\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\quad}\ S_0(\tau)\equiv 1,\ \ C_0(\tau)=(\kappa+1)^{-1}[1-e^{-(\kappa+1)\tau}]$$

$s_0+\kappa\ln s_0=-\lambda t+Q,\ c_0=\dfrac{s_0}{s_0+\kappa}$

$S_0(\tau)=1,\ \ C_0(\tau)=(\kappa+1)^{-1}[1-e^{-(\kappa+1)\tau}]$

匹配：引入中间区尺度$\psi(\varepsilon)$和中间变量 $\tau_i\equiv\dfrac{t}{\psi(\varepsilon)}$

使 $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\psi(\varepsilon)=0,\ \ \lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\dfrac{\psi(\varepsilon)}{\delta(\varepsilon)}=\infty$，则要求

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left[s_0(t)\big|_{t=\psi\tau_i}\right]=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left[S_0(\tau)\big|_{\tau=\psi\tau_i/\delta}\right]\xrightarrow{\quad} s_0(0)=1,\ \ Q=1$$

$$\boxed{s_0+\kappa\ln s_0=-\lambda t+1}$$

解以隐函数表示

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left[c_0(t)\big|_{t=\psi\tau_i}\right]=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left[C_0(\tau)\big|_{\tau=\psi\tau_i/\delta}\right]\xrightarrow{\quad}$$

$s_0(0)=1$

$$c_0(0)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\{(\kappa+1)^{-1}[1-e^{-(\kappa+1)\tau_i\psi/\delta}]\}=(\kappa+1)^{-1}$$

自然满足

---

3. 一致近似

$s_0+\kappa\ln s_0=-\lambda t+1,\ c_0=\dfrac{s_0}{s_0+\kappa}$

$S_0(\tau)=1,\ \ C_0(\tau)=(\kappa+1)^{-1}[1-e^{-(\kappa+1)\tau}]$

$$s_0^{(u)}(t)=s_0(t)+S_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)-1=s_0(t)$$

s 的 0 阶解无初始层

$$c_0^{(u)}(t)=c_0(t)+C_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)-\frac{1}{\kappa+1}=\frac{s_0(t)}{s_0(t)+\kappa}-\frac{e^{-(\kappa+1)t/\varepsilon}}{\kappa+1}$$

其中 $s_0(t)$ 由 $s_0(t)+\kappa\ln s_0(t)=-\lambda t+1$ 给出

- 比 Michaelis-Menten 近似多一项
- 仅当 t 大于 $\varepsilon(\kappa+1)^{-1}$ 的几倍后 M-M 近似才较准确

$s_0^{(u)}(t)=s_0(t)$

$s_0(t)+\kappa\ln s_0(t)=-\lambda t+1$

$c_0^{(u)}(t)=\dfrac{s_0(t)}{s_0(t)+\kappa}-\dfrac{e^{-(\kappa+1)t/\varepsilon}}{\kappa+1}$

$\dot{s}_0=-\dfrac{\lambda s_0}{s_0+\kappa},\quad s_0(0)=1$

早期和后期行为：

1. 当 t 很小时，将解在$t=0$ 点展开，得

$$s_0(t)=1+\dot{s}_0(0)t+O(t^2)=1-(\kappa+1)^{-1}\lambda t+O(t^2)$$

2. 当 t 很大时，$s_0<<1\xrightarrow{\quad}\kappa\ln s_0(t)\approx-\lambda t$

$\cancel{s_0(t)}+\kappa\ln s_0(t)=-\lambda t+\cancel{1}$

$$\xrightarrow{\quad} s_0(t)\approx e^{-\frac{\lambda t}{\kappa}}$$

要求：$|\ln s_0|>>s_0\xrightarrow{\quad} s_0<e^{-2},\ \ t>\dfrac{2\kappa}{\lambda}$

$\lambda,\ \kappa$ 的典型数量级为 1

$$t>>\lambda^{-1}\xrightarrow{\quad} t>>1,\ \ t^*=\frac{t}{k_1\overline{e}}>>\frac{1}{k_1\overline{e}}$$

---

4. 高阶近似

$S'=\varepsilon[-S+(S+\kappa-\lambda)C]$

$C'=S-(S+\kappa)C$

$S(0,\varepsilon)=1,\ \ C(0,\varepsilon)=0$

内解：设 $S(\tau,\varepsilon)=S_0(\tau)+\varepsilon S_1(\tau)+\cdots$

$C(\tau,\varepsilon)=C_0(\tau)+\varepsilon C_1(\tau)+\cdots\ \xrightarrow{\quad}$

$S_1'=-S_0+(S_0+\kappa-\lambda)C_0,\qquad S_1(0)=0$

$C_1'=-(S_0+\kappa)C_1+(1-C_0)S_1,\quad C_1(0)=0\ \xrightarrow{\quad}$

线性 $S_0(\tau)=1,\ \ C_0(\tau)=(\kappa+1)^{-1}[1-e^{-(\kappa+1)\tau}]$

$$S_1=-(\kappa+1)^{-2}[\lambda\tau_1+(1+\kappa-\lambda)(1-e^{-\tau_1})]$$

$$C_1=-(\kappa+1)^{-4}\{\lambda\kappa\tau_1+\kappa(1+\kappa-2\lambda)+(1+\kappa-\lambda)e^{-2\tau_1}$$

$$+[\tfrac{1}{2}\lambda\tau_1^2+(1+\kappa-\lambda)(1-\kappa)\tau_1-(1+2\kappa+\kappa^2-\lambda-2\kappa\lambda)]e^{-\tau_1}\}$$

其中 $\tau_1\equiv(\kappa+1)\tau$

外解

$\dot{s}=-s+(s+\kappa-\lambda)c$

$\varepsilon\dot{c}=s-(s+\kappa)c$

$\dot{s}_1=(c_0-1)s_1+(s_0+\kappa-\lambda)c_1$

$\dot{c}_0=s_1(1-c_0)-(s_0+\kappa)c_1$

$s_0+\kappa\ln s_0=-\lambda t+1,\ \ c_0=\dfrac{s_0}{s_0+\kappa}$

初始条件需匹配确定

匹配：引入中间变量 $\tau_i=t/\psi$，先将内解以τ_i表示：

$$S\left(\frac{\tau_i\psi}{\varepsilon}\right)=S_0\left(\frac{\tau_i\psi}{\varepsilon}\right)+\varepsilon S_1\left(\frac{\tau_i\psi}{\varepsilon}\right)+\cdots$$

$$=1-\frac{\lambda}{\kappa+1}\tau_i\psi-\frac{1+\kappa-\lambda}{(\kappa+1)^2}\varepsilon+\mathrm{TST}+\cdots$$

超越函数小项

$$S\left(\frac{\tau_i\psi}{\varepsilon}\right)=S_0\left(\frac{\tau_i\psi}{\varepsilon}\right)+\varepsilon S_1\left(\frac{\tau_i\psi}{\varepsilon}\right)+\cdots$$

$S_0(\tau)=1 \quad S_1=-(\kappa+1)^{-2}[\lambda\tau_1+(1+\kappa-\lambda)(1-e^{-\tau_1})] \quad \tau_1=(\kappa+1)\tau$

$$\varepsilon S_1=-\frac{\varepsilon}{(\kappa+1)^2}\left[\lambda(\kappa+1)\tau+(1+\kappa-\lambda)(1-e^{-(\kappa+1)\tau})\right]$$

$$=-\frac{\varepsilon}{(\kappa+1)^2}\left[\lambda(\kappa+1)\frac{\psi}{\varepsilon}\tau_i+(1+\kappa-\lambda)(1-e^{-\frac{(\kappa+1)\psi}{\varepsilon}\tau_i})\right]$$

$$=-\frac{\lambda\psi\tau_i}{\kappa+1}-\frac{1+\kappa-\lambda}{(\kappa+1)^2}\varepsilon+\frac{1+\kappa-\lambda}{(\kappa+1)^2}\varepsilon e^{-\frac{(\kappa+1)\psi}{\varepsilon}\tau_i}$$

TST

$$\sim-\frac{\lambda\psi\tau_i}{\underline{\kappa+1}}-\frac{1+\kappa-\lambda}{(\kappa+1)^2}\varepsilon$$

不要简单认为 $\varepsilon S_1=O(\varepsilon)$

中间区： $O(\psi)$ $\quad O(\varepsilon)$

$$S\left(\frac{\tau_i\psi}{\varepsilon}\right)=1-\frac{\lambda}{\kappa+1}\tau_i\psi-\frac{1+\kappa-\lambda}{(\kappa+1)^2}\varepsilon+\underline{O(\varepsilon^2)}$$

外解在 $t=0$ 展开，并以τ_i 表示：

$$\dot{s}_0=-\frac{\lambda s_0}{s_0+\kappa}$$

$$s_0(t)=1+\dot{s}_0(0)t+O(t^2)=1-\frac{\lambda}{\kappa+1}t+O(t^2)$$ ⟹

$$s_0(\tau_i\psi)=1-\frac{\lambda}{\kappa+1}\tau_i\psi+\underline{O(\psi^2)}$$

$$\frac{\psi^2}{\varepsilon}\to 0$$

$$\varepsilon s_1(\tau_i\psi)=\varepsilon s_1(0)+\underline{O(\varepsilon\psi)}$$

可见，$O(\varepsilon)$ 匹配要求 $s_1(0)=-\dfrac{1+\kappa-\lambda}{(\kappa+1)^2}$ $\quad$ **s_1 的初始条件**

因此 $\left[S_0(\tau)+\varepsilon S_1(\tau)\right]_{\tau=\tau_i\psi/\varepsilon}-\left[s_0(0)+ts_0'(0)+\varepsilon s_1(0)\right]_{t=\psi\tau_i}$

$$=O(\psi^2)+O(\varepsilon\psi)+O(\varepsilon^2) \qquad o(\varepsilon)$$

匹配条件：

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\left\{\left[S_0(\tau)+\varepsilon S_1(\tau)\right]_{\tau=\tau_i\psi/\varepsilon}-\left[\overbrace{s_0(0)+ts_0'(0)}^{S_0(t)\text{ 在 0 点的展开}}+\varepsilon s_1(0)\right]_{t=\psi\tau_i}\right\}=0$$

$t\to 0$ $\quad$ **内解展开到ε^1 并** $\quad$ **外解展开到ε^1 并**

$\tau\to\infty$ $\quad$ **以中间变量表示** $\quad$ **以中间变量表示**

并要求 $\dfrac{\psi^2}{\varepsilon}\to 0$ $\qquad$ 量阶： $1 \quad \sqrt{\varepsilon} \quad \psi \quad \varepsilon \quad \psi^2 \quad \psi\varepsilon \quad \varepsilon^2$

（由低到高）

$\dot{s}_1=(c_0-1)s_1+(s_0+\kappa-\lambda)c_1$

$\dot{c}_0=s_1(1-c_0)-(s_0+\kappa)c_1$

$c_0=\dfrac{s_0}{s_0+\kappa} \qquad \dot{s}_0=-\dfrac{\lambda s_0}{s_0+\kappa}$

↓

$$c_1=\frac{s_1-s_1c_0-\dot{c}_0}{s_0+\kappa} \Longrightarrow \dot{s}_1+\frac{\lambda(1-c_0)}{s_0+\kappa}s_1=-\frac{(s_0+\kappa-\lambda)\dot{c}_0}{s_0+\kappa}$$

齐次方程的解：

$$\frac{\dot{s}_1}{s_1}=-\frac{\lambda(1-c_0)}{s_0+\kappa}=-\frac{\lambda\kappa}{\left(s_0+\kappa\right)^2}=\frac{\kappa\dot{s}_0}{\left(s_0+\kappa\right)s_0}=\frac{\dot{s}_0}{s_0}-\frac{\dot{s}_0}{s_0+\kappa}$$

$$s_1=C\frac{s_0}{\kappa+s_0}$$

$\dot{s}_1=(c_0-1)s_1+(s_0+\kappa-\lambda)c_1$

$\dot{c}_0=s_1(1-c_0)-(s_0+\kappa)c_1$

$s_1(0)=-\dfrac{1+\kappa-\lambda}{(\kappa+1)^2}$

令 $s_1=C(t)\dfrac{s_0}{\kappa+s_0}$ $\quad$ 代入 $\dot{s}_1+\dfrac{\lambda(1-c_0)}{s_0+\kappa}s_1=-\dfrac{(s_0+\kappa-\lambda)\dot{c}_0}{s_0+\kappa}$

$$\Longrightarrow \quad s_1=\frac{s_0}{\kappa+s_0}\left[\frac{\kappa-\lambda}{\kappa}\ln\frac{\kappa+s_0}{(1+\kappa)s_0}-\frac{\kappa-\lambda+s_0}{\kappa+s_0}\right]$$

$$c_1=\frac{s_0}{(\kappa+s_0)^3}\left[\frac{2\kappa\lambda}{\kappa+s_0}-\kappa+(\kappa-\lambda)\ln\frac{\kappa+s_0}{(1+\kappa)s_0}\right]$$

一致有效解

$$s_1^{(u)}(t,\varepsilon)=[s_0(t)+\varepsilon s_1(t)]+\left[S_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)+\varepsilon S_1\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right]$$

$$-\left[1-\frac{\lambda t}{\kappa+1}-\frac{\varepsilon(1+\kappa-\lambda)}{(\kappa+1)^2}\right]$$

$$=s_0(t)+\frac{\varepsilon s_0(t)}{\kappa+s_0(t)}\left[\frac{\kappa-\lambda}{\kappa}\ln\frac{\kappa+s_0(t)}{(\kappa+1)s_0(t)}-\frac{\kappa-\lambda+s_0(t)}{\kappa+s_0(t)}\right]$$

$$+\frac{\varepsilon(1+\kappa-\lambda)}{(\kappa+1)^2}e^{-(\kappa+1)t/\varepsilon}$$

5. 讨论

$$s_1 = \frac{s_0}{\kappa + s_0}\left[\frac{\kappa-\lambda}{\kappa}\ln\frac{\kappa+s_0}{(1+\kappa)s_0} - \frac{\kappa-\lambda+s_0}{\kappa+s_0}\right]$$

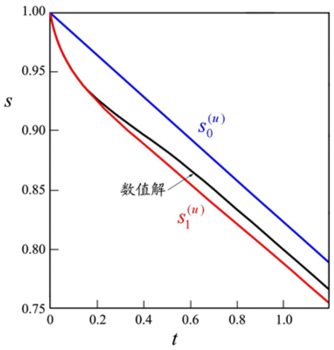
长时间后 $s_0(t) \approx e^{-\lambda t/\kappa}$ ⟶

$$\frac{s_1(t)}{s_0(t)} \approx \frac{1}{\kappa}\left[\frac{\kappa-\lambda}{\kappa}\ln\frac{\kappa}{(\kappa+1)\exp(-\lambda t/\kappa)} - \frac{\kappa-\lambda}{\kappa}\right] \approx \frac{\lambda(\kappa-\lambda)t}{\kappa^3}$$

可见除非 $\varepsilon t = O(1)$，近似解是表观一致的 $t < \varepsilon^{-1}$

但当 $t = O(\varepsilon^{-1})$ 时，s_0 也非常小了，因此近似解实际上一直有效

与数值解的比较



底物

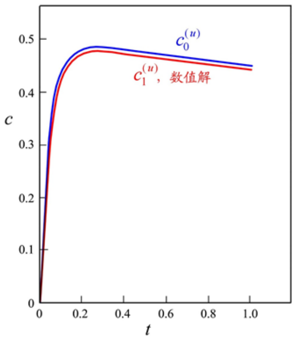
$\kappa = 1$

$\lambda = 0.375$

$\varepsilon = 0.1$

从一阶近似可见

s 的初始层效应

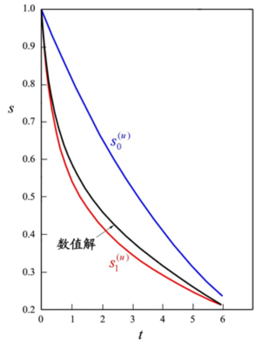


复合物

$\kappa = 1$

$\lambda = 0.375$

$\varepsilon = 0.1$



底物

$\kappa = 1$

$\lambda = 0.375$

$\varepsilon = 1$

本课程主要内容

- 渐近级数和渐近展开
  渐近级数 vs 收敛级数　　分部积分法
  函数的量阶，数量级
- 随机过程—差分方程—偏微分方程
- Fourier 级数和 Fourier 变换
  线性，迭加原理　　本征值问题　　广义调和分析
- 基本方法：简化，建模，求解，分析
- 量纲分析和尺度化
  π 定理　　病态　　尺度化

- 摄动法
  正则摄动法，**PLK方法**
  匹配法：边界层，外解，内解，匹配
  多重尺度法
  WKB方法，均匀化方法
- 稳定性
  摄动　　相空间　　临界点　　相空间轨迹
- 其它方法
  特征线法　　最速下降法　　自相似法