

# 高等应用数学

主讲：梁海弋教授  
虞吉林教授  
辅导：冯硕，朱长锋，常白雪

## Part A

### 数学与自然科学相互作用总览

#### An Overview of the Interaction of Mathematics and Natural Science

### Ch. 1 什么是应用数学

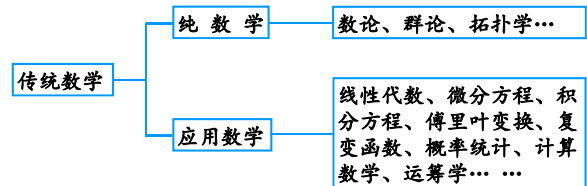
- 1.1 应用数学的本质
- 1.2 星系结构分析导论
- 1.3 粘菌阿米巴的聚集

3

### 1.1 应用数学的本质

应用数学：

- 与应用有关的数学



关注问题的数学内容，用数学的标准衡量研究成果

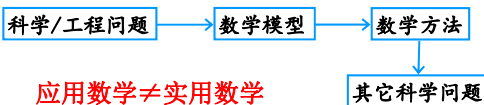
4

#### ■ 数学的应用

解决科学、工程学、经济学、社会学等问题

发展新的数学方法，依赖实验和经验直觉判断结果

天文学、物理学、航空航天、计算机、通讯、生物学、经济学、医学、社会学、管理科学、语言学……



应用数学 ≠ 实用数学

5

### 应用数学与纯数学

	纯数学	应用数学
对象	抽象概念	实际问题
分类	数学形式 (以偏微分方程为例)	现象
	椭圆型	平衡、波动、弥散
	双曲型	稳定性、随机性、最优化
	抛物型	分岔、突变、混沌、孤立子
验证	逻辑判断	经验

6

## 数学与自然科学

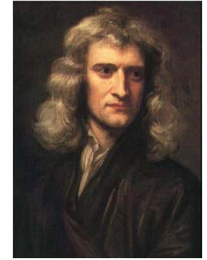
	自然科学	数学
证明	观察、实验	逻辑推理
	<b>经验科学</b>	<b>绝对真理</b>
目的	发现新现象、 规律、原理	共性、数学描述、 推论
	<b>应用数学：利用数学方法发展经验科学</b>	
	数学 ↔ 应用数学 ↔ 自然科学（工程、经济）	

7

## 应用数学的发展历史

19世纪前：

**牛顿—应用数学的真祖**  
《自然哲学的数学原理》  
三大力学定律  
万有引力定律  
微积分（与莱布尼茨独立发展）



Sir Isaac Newton

8

**爱因斯坦：**

牛顿才第一个成功地找到了一个用公式清楚表述的基础，从这个基础出发他用数学的思维，逻辑地、定量地演绎出范围很广的现象并且同经验相符合。

只有微分定律的形式才能完全满足近代物理学家对因果性的要求，微分定律的明晰概念是牛顿最伟大的理智成就之一。

9

## 应用数学的发展历史（续）

20世纪40，50年代：（二次大战前后）

**应用数学的独立发展**

战争引起一系列科学技术竞争：  
航空航天、通讯、控制、管理、设计试验……

**应用数学和计算机科学成为科学技术取得重大进步的重要因素，它奠定了现代科学和工业技术时代发展的基础**

10

20世纪最杰出的数学家之一  
“博弈论之父”  
《博弈论与经济行为》  
“计算机之父”



冯·诺伊曼  
John von Neumann

J. F. 纳什证明了“均衡定理”，成功地打开了将博弈论应用到经济学、政治学、社会学乃至进化生物学的大门，1994年获诺贝尔经济学奖

11

## Von Karman和哥廷根学派



克莱因  
Felix Klein



冯·卡门  
Theodore von Karman



林家翘



钱学森



郑哲敏  
获2012年度国家最高科技奖



普朗特  
Ludwig Prandtl



郭永怀



冯元桢

12

## 工程科学

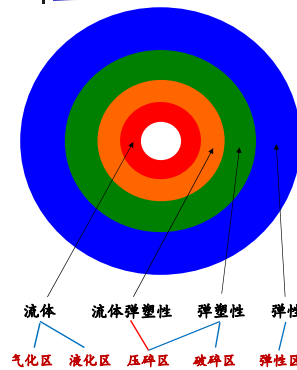
复杂物理过程 → 关键因素

→ 数学模型 (量纲分析和尺度化)

技术科学从工程技术或其他应用所需解决的问题中提炼科学问题，通过研究并解决这些问题来促成实际问题的解决，还要不断总结经验，提高和完善。概括地说就是从应用中来又回到应用中去。在这个过程中实现技术科学本身的发展。

13

## 流体弹塑性模型 (郑哲敏)



国家需求: 地下核爆炸威力评估

科学问题: 岩石介质模型

数学模型: 流体弹塑性模型

求解: 预测与实测

扩展应用: 穿破甲、爆炸复合...

14

## 应用数学的发展历史 (续)

20世纪80年代后:

蓬勃发展的新时期: 新概念、新领域

混沌、分形、小波分析.....

处理强非线性/稳定性问题

15

## 例1: 单摆

$$\theta = \theta(t; m, l, g, \theta_0)$$

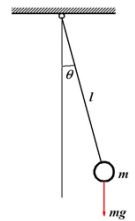
周期:  $T = f(m, l, g, \theta_0)$

3个独立的基本尺度, 取为  $m, l, g$

则周期(时间)的度量单位为  $(l/g)^{1/2}$

$$\longrightarrow T/(l/g)^{1/2} = f(1, 1, 1, \theta_0)$$

$$\longrightarrow T = (l/g)^{1/2} F(\theta_0) \quad \text{与 } m \text{ 无关!}$$



16

## 例2: 虫口变化

$$t_{n+1} = at_n \quad a: \text{每个成虫年均产卵}$$

$$\longrightarrow t_n = t_0 a^n \quad a > 1: \text{虫满为患}; a < 1: \text{灭绝}$$

改进: 考虑虫口增加导致的争斗和传染病

$$\text{事件数} \propto \frac{1}{2} t_n (t_n - 1)$$

$$\longrightarrow t_{n+1} = at_n - bt_n^2 \quad \text{鼓励 vs. 抑制}$$

$$x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2 \quad \text{如何演化?}$$

17

写为标准形式:

$$\text{令 } t_n = cx_n + d \quad t_{n+1} = cx_{n+1} + d$$

$$\text{其中 } c = \frac{a(a-2)}{4b}, \quad d = \frac{a}{2b}$$

$$\text{则 } x_{n+1} = f(\mu, x_n) = 1 - \mu x_n^2$$

$$\mu = \frac{a(a-2)}{4} = bc$$

18

**抛物线函数的迭代:**

$$y = 1 - \mu x^2$$

$\mu \in (0, 2), x_n \in [-1, 1]$

**非线性!**  
**长期行为?**

19

**长期行为**

1. 不动点
2. 周期p轨道

不动点      周期2轨道      周期3轨道

20

**长期行为**

1. 不动点
2. 周期p轨道
3. 轨道点永不重复, 无周期
  - 准周期轨道: 每迭代一定次数可回到某一点附近, 次数越多可越靠近
  - 随机轨道: 可靠近但间隔无规律
  - 混沌轨道: 随机但可发现某些近似的重复图式或“结构”

21

**本课程的特点**

- 内容局限于自然科学 (物理学、化学、生物学, 非社会科学和管理科学), 确定性问题 (概率性与确定性关系)
- 主要方法: 渐近展开、Fourier级数和Fourier分析、量纲分析和尺度化、摄动法
- 强调物理概念 (idea)
- 实例研究 (case study) —— 科学背景 - 数学问题 - 新的技巧 - 结果分析 (formulation - solution - interpretation) **涉及领域广!**

22

**关于能力和创新**

**知识 — 方法 — 能力**

- 注重科学研究能力的培养
  - 科研方法入门
  - 富有启发性的习题
- 科学创新的重要工具
  - 原创性 **发现新现象, 提出新概念**  
**建立新方法, 解决新问题**
  - 选题 **作为科学工作者, 保持自主性非常重要, 没有自主性就必然没有创造性**

23

**1.2 星系结构分析导论**

1. 宇宙的构造和控制星系行为的物理规律
2. 星系动力学
3. 穿过一个盘形星系的星球分布

24

## 1. 宇宙的构造和控制星系行为的物理规律

当前盛行的宇宙学观点认为：宇宙起源于大约150亿年前一次大爆炸。当时所有物质高度密集于硬币大小的一点，因为温度极高发生大爆炸。爆炸发生后，物质向外膨胀形成宇宙，先后诞生星系团、星系、银河系、恒星和太阳系，以及包括地球和人类在内的一切。



银河系

25

### ■ 膨胀的宇宙

历史： $10^{10}$  年

星系： $10^{10}$  个

恒星： $10^9$ - $10^{10}$  个/星系

宇宙 — 星团 — 星系 — 恒星 — 行星 — 卫星

26

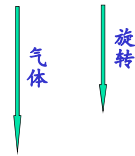
### ■ 星系的分类：

椭圆形

正常螺旋状

棒状螺旋

不规则



物理参数不同：气体含量，旋转

27



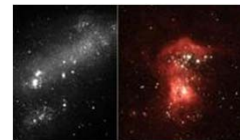
椭圆形



正常螺旋状



棒状螺旋



不规则

28

### ■ 银河系

位于17个星系组成的星团内  
薄圆盘+中心核

太阳距中心2.6万光年

太阳附近的线速度250km/s

太阳系直径 $\sim 10^{-3}$ 光年

距太阳最近的恒星4光年

(稀薄气体)



29

### ■ 控制星系行为的物理规律

牛顿运动定律和万有引力定律

电动力学规律 (Maxwell方程)

热力学定律

30

## 2. 星系动力学

- 银河系的能量密度 ( $10^{-12} \text{ J m}^{-3}$ )

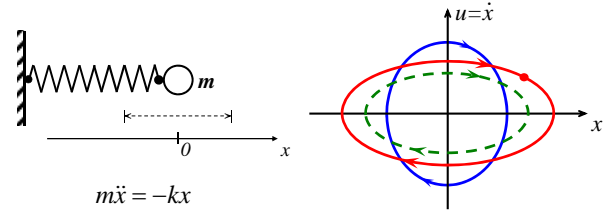
总转动能	130
磁场 ( $10^{-5}$ 高斯)	0.4
宇宙线	0.1
总辐射 (星光)	0.07
气体的湍流运动	0.05

首先可仅考虑星球系统的动力学

31

- 质点运动学状态的描述 — 相空间

相空间：以位置和速度分量构成的多维空间



每个质点在任一时刻的状态及其变化可用相空间中的点及其运动轨迹来描述

32

## 星系的相空间描述

- 简化 (基本假设)：恒星具有相同的质量

六维相空间  $(x, y, z; u, v, w)$

相空间数密度  $\psi(x, y, z; u, v, w; t)$

→  $t$  时刻位置在  $(x, x+\Delta x), (y, y+\Delta y), (z, z+\Delta z)$ ,  
速度范围在  $(u, u+\Delta u), (v, v+\Delta v), (w, w+\Delta w)$   
的恒星数:

$$\psi(x, y, z; u, v, w; t) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta u \Delta v \Delta w$$

33

- 质量密度

$$\rho(x, y, z, t) = m_* \iiint_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y, z; u, v, w; t) du dv dw$$

- 引力势能 (万有引力定律)

$$V(x, y, z, t) = -G \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(x_0, y_0, z_0, t) dx_0 dy_0 dz_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$$

34

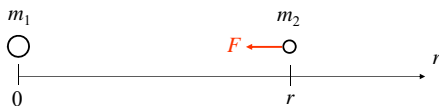
## 万有引力定律和引力势能

- 万有引力定律  $F = -G \frac{m_1 m_2}{r^2}$

保守体系, 可引入引力势能 ( $\infty$  处为势能零点)

$$V = -G \frac{m_1}{r} \quad m_1 \text{ 的引力场}$$

则质点  $m_2$  在引力场中的加速度为  $a = -\frac{dV}{dr} = -G \frac{m_1}{r^2}$



35

- 运动方程 (牛顿定律, 单个星球)

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w, \quad \frac{du}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

- 质量守恒 (总体行为)

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + w \frac{\partial \psi}{\partial z} - \left( \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial w} \right) = 0$$

36

一维情况  
 $\psi = \psi(x, u; t)$

$$[\psi(x + \frac{1}{2}\Delta x, u + \frac{1}{2}\Delta u, t + \Delta t) - \psi(x + \frac{1}{2}\Delta x, u + \frac{1}{2}\Delta u, t)]\Delta x\Delta u \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$= [\psi(x, u + \frac{1}{2}\Delta u, t) - \psi(x + \Delta x, u + \frac{1}{2}\Delta u, t)](u + \frac{1}{2}\Delta u)\Delta u\Delta t + -u \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$[\psi(x + \frac{1}{2}\Delta x, u, t) - \psi(x + \frac{1}{2}\Delta x, u + \Delta u, t)]\frac{du}{dt}\Delta x\Delta t - \frac{du}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial u}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{du}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{d\psi}{dt} = 0$$

37

t 时刻的状态  $\psi(x, y, z; u, v, w; t)$   $\rightarrow$

$\rho(x, y, z, t)$  和  $V(x, y, z, t)$   $\rightarrow$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + w \frac{\partial \psi}{\partial z} - \left( \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial w} \right) = 0$$

$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x, y, z; u, v, w; t)$   $\rightarrow$

t+Δt 时刻的状态  $\psi(x, y, z; u, v, w; t+\Delta t)$

38

### 3. 横越银盘的恒星分布

- 简化近似
  - 厚度  $\ll$  半径, 变化仅沿厚度方向 (一维)
  - 整个星系变化缓慢 (定常, Stationary)

$\rightarrow \psi = \psi(z, w)$

质量密度  $\rho(z) = m_* \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z, w) dw$

引力势能  $V = V(z)$

质量守恒  $w \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{dV}{dz} \frac{\partial \psi}{\partial w} = 0$

39

### 质量守恒 — 特征线法

质量守恒  $w \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{dV}{dz} \frac{\partial \psi}{\partial w} = 0$

全微分  $d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} dz + \frac{\partial \psi}{\partial w} dw$  特征线: 沿该曲线偏微分方程可以表示为全微分形式

$\frac{dz}{w} = \frac{dw}{-\frac{dV}{dz}}$   $\rightarrow d\psi = \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{1}{w} \frac{dV}{dz} \frac{\partial \psi}{\partial w} \right) dz = 0$

特征方程

40

$\frac{dz}{w} = \frac{dw}{-\frac{dV}{dz}} \rightarrow w dw + \frac{dV}{dz} dz = 0$

$\rightarrow \frac{1}{2} w^2 + V(z) = E$  特征线方程 (相平面上)

与该特征线对应的积分常数 (能量密度)

沿特征线  $\psi = \text{const} = f\left[\frac{1}{2} w^2 + V(z)\right]$

41

### 质量密度

实验观察星球的速度分布: Gauss 分布

$\psi = A_0 e^{-\beta E} = A_0 e^{-\beta[\frac{1}{2}w^2 + V(z)]}$

$\rho(z) = \rho_0 e^{-\beta V(z)}$   $\rho_0$ : V(z)=0 处的质量密度

$\rho(z) = m_* \int_{-\infty}^{\infty} A_0 e^{-\beta[\frac{1}{2}w^2 + V(z)]} dw = A_0 m_* \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}} e^{-\beta V(z)} = \rho_0 e^{-\beta V(z)}$

42

## 引力势能

按偏微分方程理论，引力势能

$$V(x, y, z, t) = -G \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(x_0, y_0, z_0, t) dx_0 dy_0 dz_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$$

为 Poisson 方程  $\nabla^2 V = 4\pi G\rho$  的解  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

一维: 
$$\frac{d^2 V}{dz^2} = 4\pi G\rho(z)$$

43

$$\psi(w, z) = A_0 e^{-\beta[\frac{1}{2}w^2 + V(z)]} \rightarrow \text{由观察确定 } \beta$$

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-\beta V(z)} \rightarrow \frac{d^2 V}{dz^2} = -\frac{1}{\beta} \frac{d^2}{dz^2} \ln \left( \frac{\rho(z)}{\rho_0} \right)$$

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = 4\pi G\rho(z)$$

④  $\rightarrow$  全部恒星的总质量 为实际观察值的2.7倍!

44

## 模型所作简化假定

1. 仅考虑引力，忽略其它作用
2. 恒星质量相同
3. 星球间无碰撞
4. 稳态过程
5. 一维简化
6. Gauss 速度分布



原因：存在暗物质、黑洞！

银河系中心的巨型黑洞人马座A\*，质量是太阳的400万倍

45

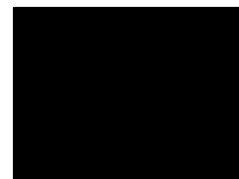
## 黑洞合并，引力波

爱因斯坦：广义相对论，时空扭曲，引力波



美国激光干涉引力波天文台(LIGO)

两个黑洞不断靠近，旋转，并最终合并成一个黑洞。合并过程中大约三倍于太阳质量的物质转化成了引力波，经过13亿年到达地球，被LIGO装置观测并记录(2015/9/14)。



46

## 星系螺旋的密度波理论

靠近中心的星球旋转更快，但星系的旋臂并没有因此卷绕得越来越紧

- 星系旋臂：“物质的”？
- B. Lindblad：提出“密度波”猜测
- 林家翘：创立了星系螺旋结构的密度波理论，成功地解释了盘状星系螺旋结构的主要特征，确认所观察到的旋臂是波而不是物质臂，克服了困扰天文界数十年的“缠卷疑难”，并进而发展了星系旋臂长期维持的动力学理论。

47



左：漩涡星系的照片。右：漩涡密度波的概念示意图。在一个以固定（角）速度旋转的参照系里，物质的流线以各自的速度在封闭的椭圆轨道上旋转，但椭圆长轴随角度快速变化产生了表面密度的集中区域，其产生的引力偏转反之能自洽地解释流线和圆周运动的偏离。

48

### 1.3 粘菌阿米巴的聚集

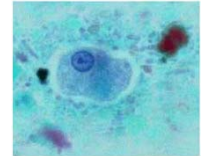
1. 关于粘菌阿米巴的一些事实
2. 数学模型
3. 阿米巴的聚集 — 失稳分析

发育生物学问题, 稳定性

49

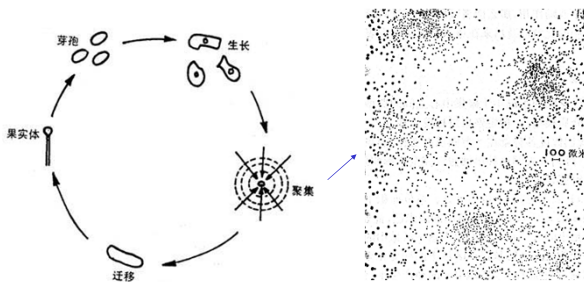
### 1. 关于粘菌阿米巴的一些事实

- ◆ 无定形单细胞原虫 (变形虫)
- ◆ 直径为10微米量级
- ◆ 生活于水、泥土或腐败有机物中
- ◆ 食物以细菌为主
- ◆ 二分裂方式增殖 (有丝分裂)
- ◆ 可引发痢疾、肝脓肿、脑膜脑炎、角膜炎、口腔感染和皮肤损伤等



50

### 生活史



51

### 聚集的机理?

- 已发现阿米巴优先向“诱饵物”浓度高的方向移动

cAMP - 环状3',5'-腺一磷  
Cyclic 3',5'-adenosine monophosphate

- “诱饵物”在一种酶的作用下会很快失效
- 开始时刻?
- 中心间距?

52

### 2. 数学模型

活动性 → 分散      趋药性 → 聚集

假设和简化: 1. 连续模型      2. 一维

#### ■ 变量

$a$	阿米巴密度	density of amoebae
$\rho$	诱饵物密度	density of attractant
$J, J_a$	通量密度	flux density
$Q, Q_a$	净产生率	net rate of creation

53

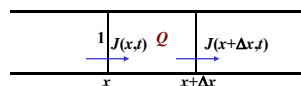
### 阿米巴密度变化

- $(x, x+\Delta x)$ 内阿米巴的变化速率

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_x^{x+\Delta x} a(x,t) dx = J(x,t) - J(x+\Delta x,t) + \int_x^{x+\Delta x} Q(x,t) dx$$

$$\text{微分形式} \quad \frac{\partial a(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial J(x,t)}{\partial x} + Q(x,t)$$

假设失稳时阿米巴的增值和死亡均可忽略



54

**流动**

- 随机流动

$$J_r(x,t) = F\left(\frac{\partial a(x,t)}{\partial x}\right) \xrightarrow{\text{线性化}} J_r(x,t) = \mu \frac{\partial a(x,t)}{\partial x}$$

$\mu$  游动性 motility

- 定向流动

$$J_c(x,t) = \chi a \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$\chi$  趋药性强度 strength of chemotaxis

55

$$\frac{\partial a(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial J(x,t)}{\partial x} \quad J = J_r + J_c$$

$$\xrightarrow{\text{线性化}} \frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial a}{\partial x} - \chi a \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \quad (10)$$

非线性

56

**诱饵物变化**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial J_a}{\partial x} + Q_a$$

$$J_a = -D \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad D \text{ 扩散率 } \text{diffusivity}$$

$$Q_a = fa - k\rho \quad f \text{ 分泌率 } \text{rate of secretion}$$

$$\quad \quad \quad k \text{ 衰减率 } \text{rate of decay}$$

$$\xrightarrow{\text{线性化}} \frac{\partial \rho}{\partial t} = fa - k\rho + D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad (11)$$

57

**3. 阿米巴的聚集 — 失稳分析**

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial a}{\partial x} - \chi a \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = fa - k\rho + D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

- 精确解: 均匀态

当  $fa_0 = k\rho_0$  时, 有  $a = a_0, \rho = \rho_0$

- 失稳

原因: 参数变化

58

食物减少  $\rightarrow \mu$  减小  $\rightarrow \rho$  增大

$f$  增大  $\rightarrow \rho$  增大

$\chi$  增大  $\rightarrow \rho$  增大

( $k, D$  不变)

新的平衡状态

问题: 平衡态的稳定性?

方法: 小扰动, 发展趋势

59

引入  $a'$  和  $\rho'$  描述对均匀态的偏离

$$a(x,t) = a_0 + a'(x,t) \quad \rho(x,t) = \rho_0 + \rho'(x,t)$$

代入式(10)  $\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial a}{\partial x} - \chi a \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)$

$$\frac{\partial a'}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 a'}{\partial x^2} - \chi \left[ (a_0 + a') \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} + \frac{\partial a'}{\partial x} \frac{\partial \rho'}{\partial x} \right]$$

非线性 高阶小量

60

