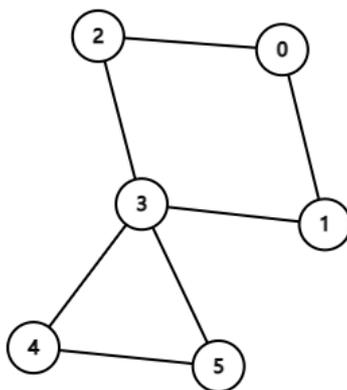


图论第九次作业答案

ch6

1.

如果可能，画出一个 ν 为偶数 ϵ 为奇数的Euler图 G ，否则说明为什么不存在这样的图。



3.

设 G 是恰有 $2k$ 个奇数顶点的连通图，证明： G 中存在 k 条边不重的行迹 P_1, P_2, \dots, P_k ，使得 $E(G) = \cup_{i=1}^k E(P_i)$ 。

将 $2k$ 个奇度顶点两两配对，在 k 对顶点之间连一条边，共增加 k 条边 $e_i (i = 1, \dots, k)$ ，记为图 G' 。在图 G' 中，每个顶点度数均为偶数，因此是Euler图。另外，在图 G' 的Euler回路上，不可能有两条添加的边 e_i, e_j 有公共顶点。因此删去这 k 条边会将Euler回路分割成 k 条边不重的行迹，得证。

6.

证明或否定：(1)每个Euler二分图都有偶数条边；(2)有偶数个顶点的每个Euler简单图有偶数条边。

(1) 正确，因为 G 是Euler图， G 可以表示为无公共边的圈的并，因为 G 是二分图， G 中无奇圈，所以 G 被表示为无公共边的偶圈的并，所以 G 有偶数条边。

(2) 错误，反例如题1所示。

7.

给出一个算法，在有Euler迹的图中求出一条Euler迹。

解1：将Fleury算法第一步改为(1)若存在 $v_0 \in V(G)$ 使得 $\deg(v_0)$ 为奇数，令 $P_0 = v_0$ ；否则，任取 $v_0 \in V(G)$ ，令 $P_0 = v_0$ 。

解2：找到一对奇数顶点，在其之间添边，调用Fleury算法，得到一条Euler回路，在该回路上删除添边则得到Euler迹。

10.

证明图6.29所示的两个图都不是Hamilton图。

(1) 取图中度为4的4个顶点作为 S , $|S|=5$, $\omega(G-S)=7$, 则 $\omega(G-S) > |S|$, 故不是Hamilton图。

(2) 取图中度为4的3个顶点, 再取度为3的与之不相邻的3个顶点作为 S , $|S|=6$, $\omega(G-S)=7$, 则 $\omega(G-S) > |S|$, 故不是Hamilton图。

14.

证明: $2k-1$ 阶的 k 次正则图是Hamilton图($k \geq 2$)。

$v(G) = 2k-1$, $\deg(v) = k$, 则 $\delta(G) = k \geq \frac{2k-1}{2} = \frac{v(G)}{2}$, 由Dirac定理, 为Hamilton图。

18.

设 G 是无向连通图, C 是 G 的一个圈, 若删除 C 上任何一条边后, C 上剩下边的导出子图均是 G 中最长轨, 则 C 是 G 中Hamilton圈, 从而 G 是Hamilton图。

若存在 G 中顶点 $u \in V(G)$ 不在圈 C 上, 而 G 是连通图, 存在从 u 到 C 的轨道 $P(u, v)$, $v \in C$, 设 v_1, v_2 是 C 中 v 的相邻点, 删除边 v_1v 后, C 上剩下边的导出子图轨道为 $Q(v_1, v) = v_1 \dots v_2v$, 但存在轨道 $P(u, v) \cup Q(v_1, v)$ 比轨道 Q 更长, 矛盾!

故 G 中顶点均在圈 C 上, C 是 G 中Hamilton圈, 从而 G 是Hamilton图。

21.

证明: 设 G 是一个简单图, $v = |V(G)| \geq 3$, 如果对满足 $1 \leq m \leq \frac{v}{2}$ 的任意正整数 m , 度数不超过 m 的顶点个数小于 m , 则 G 是Hamilton图。

设度序列为 (d_1, d_2, \dots, d_v) , 这里 $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_v$ 。

若存在小于 $\frac{v}{2}$ 的 m 使得 $d_m \leq m$ 和 $d_{v-m} \leq v-m$ 同时成立, 则对 $1 \leq i \leq m$, $d_i \leq m$, 则度数不超过 m 的顶点数至少有 m 个, 与题目条件矛盾。

故不存在小于 $\frac{v}{2}$ 的 m 使得 $d_m \leq m$ 和 $d_{v-m} \leq v-m$ 同时成立, 由Chvátal定理, G 是Hamilton图。

定理(Chvátal, 1972) 设 G 至少含有3个顶点的简单图, 其度序列为 (d_1, d_2, \dots, d_v) , 这里 $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_v$ 。若不存在小于 $\frac{v}{2}$ 的 m 使得 $d_m \leq m$ 和 $d_{v-m} \leq v-m$ 同时成立, 则 G 是Hamilton图。