图论第八次作业

2021年11月
助教刘佳薇

3

对于$k > 1$，给出没有完备匹配的k度正则图的例子。

> 本题找到一个例子即可，不需要证明所有k度正则图都存在没有完备匹配的情况

最简单的例子是顶点数为奇数的k度正则图，如k_3

7

7. 证明：二分图G有完备匹配的充要条件是，对任何$S \subseteq V(G)$，都满足$|N(S)| \geq |S|$。这个命题对一般图成立吗?

> 这题有两问，一问是证明这个命题对二分图成立，一问是说明这个命题对一般图是否成立

证明：

设二分图G的顶点划分集$V(G) = X \cup Y, X \cap Y = \phi$

充分性：取S = X，则|X|=|S|<=|N(S)|<=|Y|；同理|Y|<=|X|，故|X|=|Y|。

又对任何$S \subseteq X$，有$|N(S)| >= |S|$，由Hall定理知，G存在将X中顶点都许配的匹配。

故G存在完备匹配。

必要性：若G存在完备匹配，则|X|=|Y|。

由于存在完备匹配将X中所有顶点许配，所以任给$S \subseteq X$，都有|N(S)|>=|S|；

同理任给$S \subseteq Y$，都有|N(S)|>=|S|。故任给$S \subseteq G$，都有|N(S)|>=|S|。

对一般图不成立，反例：K_3

11

11. 设G是顶点集合划分为X与Y的二分图，则G的最大匹配中的边数等于$|X| - max_{S \subset X}(|S| - |N(s)|)$。

> 这题可以利用结论：取$B \subseteq X$，则$B \cup N(X - B)$是G的一个覆盖

证明：

因为对$S \subseteq X$，$S \cup N(X - S)$是G的一个覆盖

故对$(X - S) \subseteq X$，$(X - S) \cup N(S)$是G的一个覆盖，$min_{S \subset X}(|X - S| + |N(S)|)$是最小覆盖数。

又因为最小覆盖数等于最大匹配数，故最大匹配中的边数 $= min_{S \subset X}(|X - S| + |N(S)|)$

$$= min_{S \subset X}(|X| - |S| + |N(S)|)$$

$$= |X| - max_{S \subset X}(|S| - |N(S)|).$$

12

12. 用König定理来证明Hall定理。

充分性：显然X是二分图G的一个覆盖。

因为任给$S \subseteq X$，都有|N(S)|>=|S|，故|N(X)|>=|X|，故X即为最小覆盖。

否则若存在$B \subset X, B \neq \phi$，（X-B）是最小覆盖，则N(B)=0，与|N(B)|>=|B|矛盾。

所以最大匹配数=最小覆盖数=|X|，

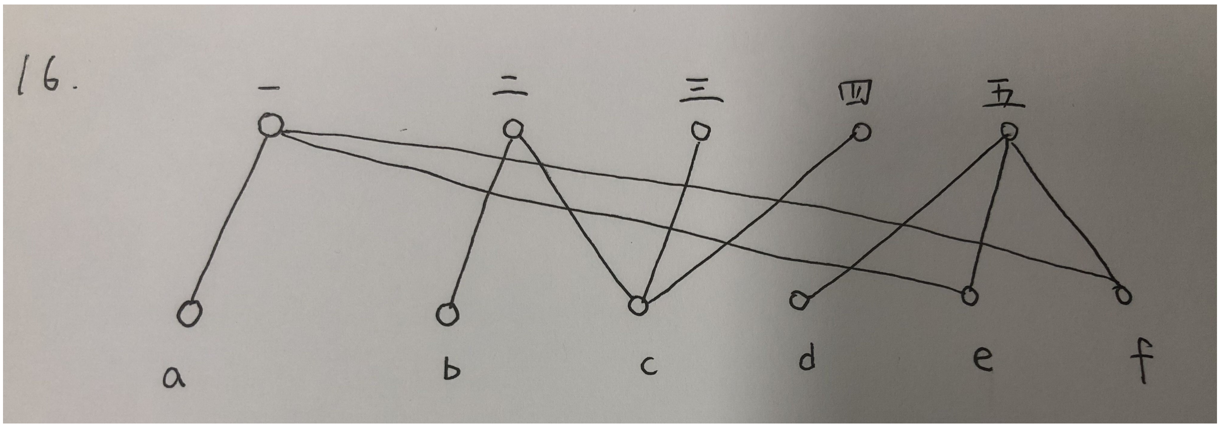
所以存在将X中顶点都许配的匹配。

必要性：证明同教材Hall定理证明。

16

16. 由a,b,c,d,e,f六个人组成检查团，检查5个单位的工作。若某单位与某人有过工作联系，则不能选派此人到该单位去检查工作。已知第一单位与b,c,d有过联系，第二单位与a,e,f，第三单位与a,b,e,f，第四单位与a,b,d,f，第五单位与a,b,c有过联系，请列出去各个单位进行检查的人员名单。

> 构造二分图，找到一个将单位完全许配的匹配
>
> 单位有联系表示不能派此人去该单位，故二分图中的边表示人与单位无联系



名单：

一	二	三	四	五
a	b	c	e	d, f
a	b	c, d	e	f
a	b	d	c	e, f
a	b	d	c, e	f
a, f	b	c	e	d
a	b, d	c	e	f
a	b, c	d	e	f
a, f	b	d	c	e
a, e	b	d	c	f

19

19. 证明：Kuhn-Munkreas算法中修改顶标后，$\hat{l}$仍然是可行顶标。

> 分4种情况依次分析

取$x_i \in X, y_j \in Y$:

1.$x_i \in S, y_j \in T$，$\hat{l}(x_i)+\hat{l}(y_j)=l(x_i)+l(y_j)>=w(x_iy_j)$

2.$x_i \in S, y_j \notin T$，$\hat{l}(x_i)+\hat{l}(y_j)$
$$\begin{aligned}&=l(x_i)-\alpha_l+l(y_j)\\&=l(x_i)+l(y_j)-min_{x\in X,y\in T}(l(x)+l(y)-w(xy))\\&>=l(x_i)+l(y_j)-(l(x_i)+l(y_j)-w(x_iy_j))\\&=w(x_iy_j)\end{aligned}$$

3.$x_i \notin S, y_j \in T$，$\hat{l}(x_i)+\hat{l}(y_j)=l(x_i)+l(y_j)+\alpha_l>=w(x_iy_j)$

4.$x_i \notin S, y_j \notin T$，$\hat{l}(x_i)+\hat{l}(y_j)=l(x_i)+l(y_j)>=w(x_iy_j)$

综上，$K-M$算法修改顶标后，$\hat{l}$仍是可行顶标。

20

20. Kuhn-Munkreas算法中修改顶标后，由可行顶标$\hat{l}$得到相等子图$G_{\hat{l}}$。证明：在算法的第(3)步，在$G_{\hat{l}}$上找到的顶点子集"T"包含了在G_l上找到的顶点子集"T"，且至少多一个顶点。由此可知，Kuhn-Munkreas算法最终能够找到某个相等子图，该相等子图有完备匹配，从而说明Kuhn-Munkreas算法的正确性。

> 多的顶点是修改前不满足$l(x_i)+l(y_j)>=w(x_iy_j)$修改后满足的

取$x_i \in X, y_j \in Y$:

1.$x_i \in S, y_j \in T$，$\hat{l}(x_i)+\hat{l}(y_j)=l(x_i)+l(y_j)$，修改前后顶点子集不变

2.$x_i \in S, y_j \notin T$，$\hat{l}(x_i)+\hat{l}(y_j)$
$$\begin{aligned}&=l(x_i)-\alpha_l+l(y_j)\\&=l(x_i)+l(y_j)-min_{x\in X,y\in T}(l(x)+l(y)-w(xy))\\&>=l(x_i)+l(y_j)-(l(x_i)+l(y_j)-w(x_iy_j))\\&=w(x_iy_j)\text{，且至少存在一对}(x_i,y_j)\text{使等号成立，故把}Y-T\text{中至少1个顶点移入}T\text{中.}\end{aligned}$$

3.$x_i \notin S, y_j \in T$，$\hat{l}(x_i)+\hat{l}(y_j)=l(x_i)+l(y_j)+\alpha_l>=w(x_iy_j)$，修改前后顶点子集不变

4.$x_i \notin S, y_j \notin T$，$\hat{l}(x_i)+\hat{l}(y_j)=l(x_i)+l(y_j)$，修改前后顶点子集不变

综上，$K-M$算法修改顶标后，顶点子集至少加1。