图论第七次作业参考答案

5.2

> 证明：树至多有一个完备匹配

方法一：

反设存在两个不同的完备匹配M_1和M_2，考虑它们的对称差$M_1 \oplus M_2$，由于对称差非空且对称差中非孤立点的度数为2，则其中会有交错圈，与树没有圈矛盾。

方法二：

利用叶子节点在完备匹配中的唯一性。对于每个叶子节点，它只能和唯一与它相邻的点匹配，如果有一个结点连接了两个及以上的叶子节点，那么其中至少会有一个叶子节点不能匹配，则此时不存在完美匹配。所以，只有每个结点最多只与一个叶子结点相连时，才有可能存在完美匹配。于是在这种情况下，可以去掉叶子结点和与它相邻的结点会得到森林，对森林中的每棵树不断重复上面过程，直到所有的结点都被匹配或者有点不能被匹配。在这个过程中，如果存在完美匹配，匹配的方法都是唯一确定下来的。

5.4

> 两个人在图G上博弈，交替选择不同的顶点v_0,v_1,v_2,...，使得当 $i > 0$ 时,v_i与v_{i-1}相邻，直到不能选到顶点为止，谁最后能选到一个顶点谁赢。证明：第一个选顶点的人有必胜策略，当且仅当G中无完备匹配，并给出一个必胜的策略

$\Rightarrow$:

反设G有完备匹配M，则第一个人每选择一个顶点u，第二个人都可以选择在M中与u相匹配的点，所以由匹配中边不相邻的性质，无论第一个人如何选择，第二个人永远有点可以选且不会重复，故第二个选点的人有必胜策略，矛盾，则假设不成立，即当第一个选顶点的人有必胜策略时，G中无完备匹配。

$\Leftarrow$:

当G没有完备匹配时，找到G的最大匹配M，则存在不被M许配的点。第一个人选择G中任一未被M许配的点u，如果第二个人能选到不被M许配的另一个点v，则$M \cup \{uv\}$是比M更大的匹配，这与M是最大匹配矛盾，故第二个人只能选到被M许配的点v。之后第一个人可以选到在M中与v相匹配的那个点，记为u_1，如果第二个人能选到不被M许配的点v_1，则存在可增广轨道uvu_1v_1，与M是最大匹配矛盾，则以此类推，只要之后第一个人选择在M中与第二个人选择的点匹配的点，第二个人只要有点可选一定只能选到被M许配的点，所以无论第二个人如何选择，第一个人永远有点可以选且不会重复，故第一个人有必胜策略。