

图论第六次作业

ch3

16.

若图 G 的每个顶点的度数都是偶数，则 G 中没有桥

证明：

设 G 中有桥，令其为 $e=uv$ ，删去 e 后 G 被分为 G_1, G_2 两个子图

此时， $\deg(u), \deg(v)$ 都为奇数， G_1 和 G_2 中其他顶点的度数均为偶数

对于 G_1 ，有 $\sum_{v \in V(G_1)} \deg(v)$ 为奇数，与欧拉定理 $\sum_{v \in V(G_1)} \deg(v) = 2\epsilon(G_1)$ 为偶数矛盾，因此假设不成立

综上， G 中没有桥

18.

3-正则图有割顶，当且仅当有桥

① $\Leftarrow$:

若图上有桥，由定理 3.5， $\kappa(G) \leq \kappa'(G) = 1$

且 $\kappa(G) > 0$ ，则有 $\kappa(G) = 1$

即该图也有割顶

② $\Rightarrow$:

对于有割顶 u 的 3-正则图 G ，假设其没有桥，

设 u 的三个邻顶为 v_1, v_2, v_3

删去 uv_1 ，由于没有桥，图仍然连通，即 v_2 和 v_3 之间存在一条不包含 u 的轨道，与 u 是割顶矛盾。

假设不成立，因此图中有桥。

由①②，命题成立。

20.

设 e 是 2-连通图 G 的一条边，若将边收缩后，得到的图 $G \cdot e$ 也 2-连通图，则称 e 是可收缩的。证明：每个 $v(G) \geq 3$ 的 2-连通图 G 都有一条可收缩边

证明：

假设对于满足 $v(G) \geq 3$ 的 2-连通图 G ，没有可收缩边，

则对 $\forall e \in E(G)$ ， $G \cdot e$ 都是 1-连通图，即 $G \cdot e$ 中存在割顶

不妨设 $e = uv$ ， uv 收缩后的点记为 w

若割顶不是 w ，则为 $V(G) - \{u, v\}$ 中的顶点，与图 G 是 2-连通图矛盾，因此 w 为割顶

所以在 G 中，删去 u, v 后成为非连通图

由 e 的任意性，即删去任意相连的两个顶点后， G 均不连通。 (i)

设删去 uv 之后产生的连通片之一为 G_1 ，设 t 是 u 在 G_1 中的一个邻顶

由于 t 不是 G 的割顶, 因此也不是 G_1 中割顶, 即 $G_1 - t$ 是连通的

则对 $\forall s \in v(G_1)$, s 可以通过 v 与 G_1 之外的其他连通片相连, 即 $G - \{v, s\}$ 是连通图, 与 (i) 矛盾。

假设不成立, 因此至少有一条可收缩边。

22.

证明扇形引理

与推论 3.2 证明类似, 增加顶点 y 与 Y 中每个顶点连一条边即可。

ch4

3.

(1) 证明: 若 G 是 $v > 11$ 的简单平面图, 则 G^c 不是平面图

(2) 试给出一个 $v = 8$ 的简单平面图, 使得 G^c 是平面图

(1)

证明:

G 是简单平面图, 不连通时相对连通图边更少, 则由推论 4.2 得: $\epsilon(G) \leq 3v - 6$

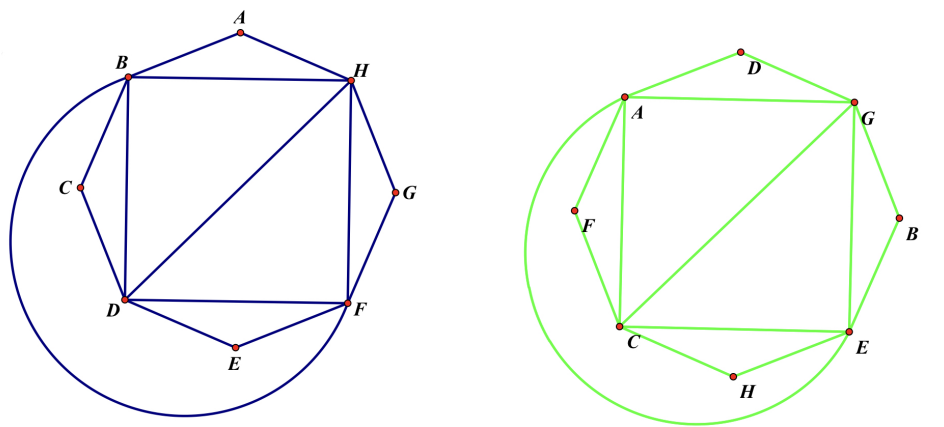
设 G^c 是平面图, 则同理可得 $\epsilon(G^c) \leq 3v - 6$

又因为 $\epsilon(G^c) + \epsilon(G) = \frac{v(v-1)}{2}$

故 $\frac{v(v-1)}{2} \leq 3v - 6 + 3v - 6$, 进而得 $v^2 - 13v + 24 \leq 0$

与 $v > 11$ 矛盾, 故 G^c 不是平面图

(2)



7.

设 G 是 v 个顶点 ϵ 条边的简单平面图, $\epsilon < 30$, 证明存在顶点 $v \in V(G)$, 使得 $\deg(v) \leq 4$

证明:

假设 $\delta \leq 5$, 则有 $\frac{5}{2}v \leq \epsilon$ (i)

由推论 4.2, $\epsilon \leq 3v - 6$ (ii)

由 (i), (ii) 得, $v \geq 12$

则 $\epsilon \geq \frac{5}{2}v \geq 30$, 与题设矛盾

则存在顶点 $v \in V(G)$, 使得 $\deg(v) \leq 4$

12.

证明：在 $v \geq 7$ 的连通平面图上可以选取不超过 5 个顶点，把他们删除后得到的图不连通

证明：

由推论 4.3, 在连通平面图 G 中有 $\delta \leq 5$

由定理 3.5, $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G) \leq 5$

设 G 的最小割集为 s , 则 $|s| \leq 5$

将 s 中的全部顶点删除后, 且 $G-s$ 中至少有两个顶点, 且是非连通图