

图论第五次作业参考答案

3.1 G 是 k -边连通图, E' 是 G 的 k 条边的集合, 则 $\omega(G - E') \leq 2$ 。

考虑 G 的任意 k -边割集 (同时也是最小边割集), 去掉 $k - 1$ 条边后仍是连通图, 在此基础上再去掉一条边后连通分支数量至多是 2。

3.3 G 是简单图, $\delta(G) \geq v(G) - 2$, 则有 $\kappa(G) = \delta(G)$ 。

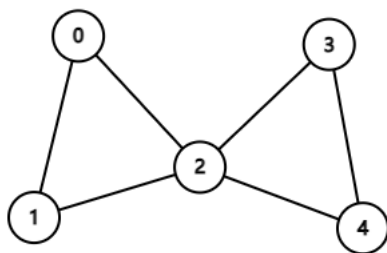
由于 G 是简单图, 有 $\delta(G) \leq v(G) - 1$ 。

(1) $\delta(G) = v(G) - 1$ 。此时 G 是完全图, $\kappa(G) = v(G) - 1 = \delta(G)$ 。

(2) $\delta(G) = v(G) - 2$ 。 $\forall u, v \in V(G)$, 若 u, v 不相邻, 因为 $\deg(u) \geq \delta(G) = v(G) - 2$, 故 $\deg(u) = v(G) - 2$, 同理, $\deg(v) = v(G) - 2$ 。即 u, v 分别和剩下所有顶点相邻, 则 $\forall u, v \in V(G), uv \notin E(G)$, 有 $c(u, v) = v(G) - 2$ 。故 $\kappa(G) = \min\{c(u, v) \in V(G), u \neq v, uv \notin E(G)\} = v(G) - 2 = \delta(G)$ 。

3.4 给出一个简单图 G , 满足 $\delta(G) = v(G) - 3$ 且 $\kappa(G) < \delta(G)$ 。

给出下图一个例子, 图中 $\delta(G) = 2 = v(G) - 3$ 且 $\kappa(G) = 1 < \delta(G) = 2$ 。



3.5 G 是简单图, $\delta(G) \geq v(G)/2$, 则有 $\kappa'(G) = \delta(G)$ 。

由定理 3.5 知 $\kappa'(G) \leq \delta(G)$, 下证: $\kappa'(G) \geq \delta(G)$ 。

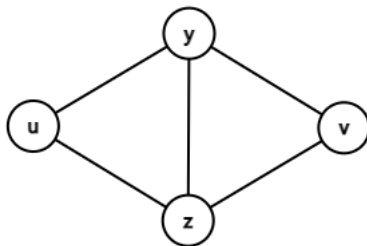
存在 $\kappa'(G)$ 条边, 删除后 G 不再连通, 设删除后为两连通片 G_1, G_2 , 且不妨设 $v(G_1) \leq \frac{v(G)}{2}$ 。

在原图 G 中考虑 G_1, G_2 之间的连边数量 S , 有 $\kappa'(G) = S$ 。在图 G 中考虑 G_1 中顶点的度数之和 $S_1 \geq v(G_1) * \delta(G)$, 而在 G_1 顶点生成子图中, 各顶点度数之和 $S_2 \leq v(G_1) * (v(G_1) - 1)$, 故 $\kappa'(G) = S \geq v(G_1) * \delta(G) - v(G_1) * (v(G_1) - 1)$ 。现在要证明 $v(G_1) * \delta(G) - v(G_1) * (v(G_1) - 1) \geq \delta(G)$, 即证明 $\delta(G) \geq v(G_1)$, 而已有 $\delta(G) \geq \frac{v(G)}{2} \geq v(G_1)$, 故原式成立。所以 $\kappa'(G) \geq \delta(G)$ 。

综上, $\kappa'(G) = \delta(G)$ 。

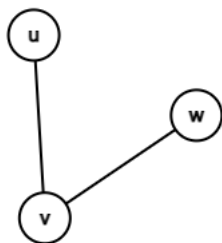
3.8 设 $P(u, v)$ 是 2-连通图 G 中的一条轨道, G 中是否一定存在另一条轨道 $Q(u, v)$, 使得 $P(u, v)$ 与 $Q(u, v)$ 没有公共内顶?

不一定存在, 反例如下图所示。令 $P(u, v) = uyzv$, 则此时不存在无公共内顶的 $Q(u, v)$ 。



3.11 设 G 是连通图, 且不是块, 在 G 中至少存在两个块, 每个块仅含 G 的一个割顶。对 G 的顶点数 k 进行归纳。

1° $k = 3$ 时, G 只可能如下图所示, v 是割顶, 则 vu 和 vw 顶点生成子图均是块, 且只含 G 的一个割顶。



2° 设 $k \leq n - 1$ 时命题成立。若 u 是 G 中割顶, 则 $G - u$ 有至少两个连通片, 设为 G_1, G_2 。

若 G_1, G_2 中无割顶, 则 G_1, G_2 是块, 取 $G'_1 = G_1 + u, G'_2 = G_2 + u$ 即满足要求。若 G_1, G_2 中有割顶, 不妨设 G_1 中有割顶, 由归纳假设 G_1 中有 2 个块, 每个块仅含 G_1 的一个割顶。其中 G_1 中的块也是 G 中的块, G_1 的割顶也是 G 的割顶。综上, $\forall k \geq 3$, 原命题成立。

3.15 证明：只有两个顶点不是割顶的连通图是一条轨道。

设 G 为满足条件的简单图，有 $v(G) - 2$ 个割顶。于是 G 的任一生成树 T 也至少有 $v(G) - 2$ 个割顶 (因为 G 中的割顶在 T 中一定为割顶)，则 T 至多有 2 个非割顶。由于树中的非割顶只能为树叶，而树有至少 2 个树叶。于是 T 恰有 2 个非割顶 (树叶)。这两个非割顶的度数为 1，其它割顶的度数大于 1。若 T 中有度数大于 2 的顶点，则 $\sum_{v \in T} \deg(v) > 2 + 2(v(G) - 2) = 2v(G) - 2$ ，而 $\sum_{v \in T} \deg(v) = 2e(T) = 2v(G) - 2$ ，矛盾。于是树 T 的割顶度数均为 2。所以 T 是轨道。因为 G 的任意生成树均为轨道且 G 不可能是一个圈，所以 G 是轨道。