

图论第三次作业参考答案

2.2

一棵树 T 有 n_i 个度数为 i 的顶点, $i=2,3,\dots,k$, 其余顶点都是树叶, 则 T 有几片树叶?

$$2\varepsilon(T) = \sum_{v \in V(T)} \deg(v) = \sum_{i=2}^k i n_i + n_1$$

$$\varepsilon(T) = v(T) - 1 = \sum_{i=1}^k n_i - 1$$

$$\text{联立上面两式可得 } n_1 = \sum_{i=2}^k n_i(i-2) + 2$$

2.4

证明: 如果 T 是树, 且 $\Delta(T) \geq n$, 则 T 至少有 n 片树叶

方法一:

设树 T 有 s 片树叶

$$\text{由于 } 2(v(T) - 1) = 2\varepsilon(T) = \sum_{v \in V(T)} \deg(v)$$

$$\geq 2(v(T) - 1 - s) + 1 \times n + s \times 1 = 2(v(T) - 1) + (n - s)$$

则得到 $n \geq s$

方法二:

取度数最大的顶点 v , 则 $\deg(v) \geq n$, 即至少有 n 个顶点和 v 相连, 设为 $v_1, v_2, \dots, v_n$, 反设叶子树为 s , 且 $s < n$, 则由抽屉原理, $v_1, v_2, \dots, v_n$ 中至少有2个顶点连接到同一片叶子 u , 不妨设这2个顶点为 v_1, v_2 , 于是存在轨道 $vv_1 \dots m$ 和 $vv_2 \dots m$, 于是存在圈, 与 T 是树矛盾。

方法三:

$$\text{由2.2知, 设叶子数为 } s, \text{ 则 } s = \sum_{i=2}^k n_i \cdot (i-2) + 2。$$

$$\text{由 } \Delta(T) \geq n, \text{ 则 } s = \sum_{i=2}^k n_i \cdot (i-2) + 2 \geq 1 \cdot (n-2) + 2 = n$$

2.6

证明: 树有一个中心或两个中心, 且有两个中心时, 这两个中心相邻

对于树 K_1, K_2 上述结论显然成立。对于其他度数大于等于3的树 T , 可以证明删去 T 的所有叶子节点后得到的树 T' 有同样的中心。又因为 T 有限, 经过有限步上述操作后将会得到树 K_1, K_2 , 且最后得到的 K_1, K_2 的中心即为 T 的原来的中心, 所以树有一个或两个中心, 且有两个中心时, 这两个中心相邻。

2.7

证明: 若 G 是森林, 且有 $2k$ 个度数为奇数的顶点, 则 G 中有 k 条无公共边的轨道, 使得 G 的每条边都在这些轨道上

用归纳法证明。

当 $k = 1$ 时, 显然成立。

假设 $k = n - 1$ ($n \geq 2$) 时成立, 则当 $k = n$ 时, 由于 G 是森林, 取其中一颗树上的两片树叶 u, v (或任意两个奇度顶点), 则 u, v 之间存在轨道 $P(u, v)$, 删掉该轨道上所有的边, 则该轨道上除了 u, v 两点度数减1, 其余点度数均减2, 则可知经过这样的操作后得到的 G' 中奇度顶点树变为 $2n - 2$, 则有归纳假设知 G' 中存在 $n - 1$ 条无公共边的轨道, 又 $P(u, v)$ 与这 $n - 1$ 条轨道无公共边, 则再加上 $P(u, v)$, 就找到了 G 中的 n 条无公共边的轨道且每条边都在这些轨道上, 则当 $k = n$ 时结论成立。

由归纳法知, 上述结论对 $\forall k \in N$ 都成立。