

图论第二次作业参考解答

13.

任给图 G ，都满足 $\delta(G) \leq 2\epsilon(G)/\nu(G) \leq \Delta(G)$

证明：

由欧拉定理， $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2\epsilon(G)$ ，

对于 $\forall v \in V(G)$ ，有 $\delta \leq \deg(v) \leq \Delta$ ，求和得： $\nu(G)\delta(G) \leq \sum_{v \in V(G)} \deg(v) \leq \nu(G)\Delta(G)$

同除 $\nu(G)$ 即得证

16.

假设 G 是简单图，且 $\delta(G) \geq k$ ，则 G 中有长为 k 的轨道

证明：

不妨设 G 是连通图，否则只需对每个联通片单独考虑

设 $P(v_0, v_m) = v_0 \dots v_m$ 是该图的最长轨，假设它的长度小于 k ，则有 $m < k$ 。

对于 v_0 ，因为 $\delta(G) \geq k$ ，除去与轨道 $P(v_0, v_m)$ 上 v_0 之外的 m 个顶点相联通外，至少与轨道外的一个顶点 w 相连，则 $P(w, v_m) = wv_0 \dots v_m$ 是一条更长的轨道，与假设矛盾

综上， G 的最长轨长度至少为 k ，所以存在长为 k 的轨道。

20.

设 G 是连通图，且每个顶点的度数都是偶数，则 $\omega(G - v) \leq \deg(v)/2$

证明：

对于 $G - v$ 中的任意一个连通片 G_i ，假设该连通片只有奇数个顶点和 v 相连。由于 G 中每个顶点的度数都是偶数，则去掉相连边后，有奇数个顶点的度数为奇数，则有 $\sum_{v \in V(G_i)} \deg(v)$ 为奇数，与欧拉定理矛盾。

因此任意一个连通片有偶数条边与 v 相连，且由于 G 是连通图，每个连通片均有边与 v 相连。

则每个连通片与 v 至少有 2 条边相连，求和有 $2\omega(G - v) \leq \deg(v)$ ，即题目得证

24.

G 是简单图， $\delta(G) \geq 2$ ，则 G 中有长至少为 $\delta(G) + 1$ 的圈。

证明：

不妨设 G 是连通图，否则只需考虑其中一个连通片。

设 $P(v_0, v_m) = v_0 v_1 \dots v_m$ 是 G 中最长轨道。则由类似 16 题中证明, v_0 只与 $P(v_0, v_m)$ 上的点相连, 则该轨道上至少有 $\delta(G)$ 个点与其相连。

由于 $\delta(G) \geq 2$, 至少有 v_1 以外的顶点与 v_0 相连。将 v_0 的临顶按照在最长轨上的顺序排列, 记为 $u_1, \dots, u_{\deg(v_0)}$, 则 $v_0 u_1 \dots u_{\deg(v_0)} v_0$ 是圈, 且长度为 $\deg(v_0) + 1 \geq \delta(G) + 1$ 得证

25.

(1) 若 $\epsilon(G) \geq \nu(G)$, 则 G 中有圈

证明:

若 G 中存在度数为 1 的顶点 v , 则去掉 v 及其关联边得到图 $G_1 = G - v$,

则有 $\epsilon(G_1) = \epsilon(G) - 1 \geq \nu(G) - 1 = \nu(G_1)$

不断重复直至 G_n 中每个顶点的度数均不小于 2, 即 $\delta(G_n) \geq 2$

因此 G_n 中有圈, 即 G 中有圈

(2) 若 $\epsilon(G) \geq \nu(G) + 4$, 则 G 中有两个无公共边的圈

证明:

假设命题不成立, 考虑满足 $\epsilon \geq \nu + 4$ 的中, $\epsilon + \nu$ 最小的图 G , 对该图有 $\epsilon(G) = \nu(G) + 4$ 。

由(1)得, G 中有圈。

①若此时最短圈长为 3 或 4, 则去掉该圈上所有边后, 仍然有 $\epsilon(G) \geq \nu(G)$, 因此图中还有圈且与之前去掉的圈没有公共边, 与假设矛盾。

②若最短圈长度 ≥ 5 , 假设图中存在度数 ≤ 2 的顶点, 则将度数为 1 的顶点和关联边去掉, 将度数为 2 的顶点去掉并将两个临顶相连后, 得到的图 G' 仍满足 $\epsilon(G') = \nu(G') + 4$, 与 $\epsilon + \nu$ 最小矛盾。

因此 $\delta(G) \geq 3$ 。因此最短圈 C_0 , 每个顶点至少与圈外一点相连, 且互不相同, 否则产生更短圈。

则有 $\nu(G) \geq 2 * 5 = 10$ (i)

由欧拉定理, $2\epsilon(G) = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) \geq \sum_{v \in V(G)} \delta(G) = 3\nu(G)$,

则有 $3\nu(G) \leq 2\epsilon(G) = 2\nu(G) + 8$, 得到 $\nu(G) \leq 8$ (ii)

(i), (ii)矛盾, 假设不成立。

综上, 假设不成立, 原命题成立。