

# 作业 - 参考答案

4. 图  $G = (V(G), E(G))$

$\forall v \in V(G)$ , 有  $0 \leq \deg(v) \leq V(G) - 1$  ( $V(G)$  为图  $G$  顶点数)

若每人朋友数均不同

$$\deg(v_i) = 0, 1, 2, \dots, V(G) - 1$$

则存在一人不认识任何人

而存在一人认识所有人

矛盾!

故其中有两个人, 他们的朋友数一样多

注:  $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{i=1}^{V(G)-1} i = \frac{(V(G)-1)V(G)}{2}$   
此值不一定是奇数.

5. ① 若存在两个不认识的人  $A, B$

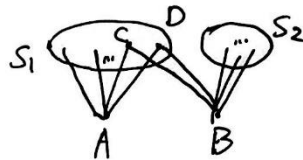
$A$  至少认识  $n$  个, 设为集合  $S_1$

除  $A, B, S_1$  外, 至多还有  $n-2$  个人

而  $B$  至少认识  $n$  个人

故  $B$  在  $S_1$  中至少认识 2 个人, 设为  $C, D$

则圈  $ACBDA$  长为 4 满足要求



② 若任两人都认识, 即为完全图  $K_{2n}$

$\therefore 2n \geq 4 \therefore$  存在长为 4 的圈

注: 此题要证“存在长恰为 4 的圈”, 而不是证“存在长大于等于 4 的圈”  
题中“至少有四人”应理解为“存在有四人”

8. 设由  $V'$  导出的顶点导出子图为  $G[V']$

$$\sum_{v \in V'} \deg(v) - k = 2E(G[V'])$$

$$\sum_{\substack{v \in V' \\ \deg(v) \text{ 为奇}}} \deg(v) + \sum_{\substack{v \in V' \\ \deg(v) \text{ 为偶}}} \deg(v) - k = 2E(G[V'])$$

$$\sum_{\substack{v \in V' \\ \deg(v) \text{ 为奇}}} \deg(v) - k = 2E(G[V']) - \sum_{\substack{v \in V' \\ \deg(v) \text{ 为偶}}} \deg(v)$$

故  $\sum_{\substack{v \in V' \\ \deg(v) \text{ 为奇}}} \deg(v)$  与  $k$  同奇偶. 证毕.

