图论第十三次作业答案

ch9

15.

> 证明：假设f与$f^{'}$为网络N上的流函数，且$Val（f） = Val(f^{'})$，证明$f - f^{'}$是N上的一个循环。

由于f与$f^{'}$为流函数，则有：

1°$\forall v \in V(D) - \{s, t\}$，$\sum_{e\in\alpha(v)} f(e) - \sum_{e\in\beta(v)} f(e) = 0$

2°$Val(f) = \sum_{e\in\beta(s)} f(e) - \sum_{e\in\alpha(s)} f(e) = \sum_{e\in\alpha(t)} f(e) - \sum_{e\in\beta(t)} f(e)$

对$f^{'}$同理可得对应式子。

所以得到，

$\forall v \in V(D) - \{s, t\}$，
$\sum_{e\in\alpha(v)}(f(e) - f^{'}(e)) - \sum_{e\in\beta(v)}(f(e) - f^{'}(e)) = (\sum_{\alpha(v)} f(e) - \sum_{\beta(v)} f(e)) - (\sum_{\alpha(v)} f^{'}(e) - \sum_{\beta(v)} f^{'}(e)) = 0 - 0 = 0$

而对于源s，
$\sum_{e\in\alpha(s)}(f(e) - f^{'}(e)) - \sum_{e\in\beta(s)}(f(e) - f^{'}(e)) = (\sum_{\alpha(s)} f(e) - \sum_{\beta(s)} f(e)) - (\sum_{\alpha(s)} f^{'}(e) - \sum_{\beta(s)} f^{'}(e)) = Val(f^{'}) - Val(f$

对于汇t同理可证。

综上，$\forall v \in V(D)$，都有$\sum_{e\in\alpha(v)}(f(e) - f^{'}(e)) - \sum_{e\in\beta(v)}(f(e) - f^{'}(e)) = 0$，是循环。

17.

> 修改算法9.4，求有供需约束网络的最大流。

执行算法9.4，得到一个有供需约束网络的可行流（或者判断没有可行流）作为初始流，然后继续在原网络上寻找从X中某点到Y中某点的可增载轨道，更新流函数，以此类推直到不存在从X到Y的可增载轨道，即得到有供需约束网络的最大流。

19.

> 证明引理9.6。

设边子集S是f的支撑，我们对|S|做归纳来证明引理。若$S = \varnothing$，则不需要证明什么；否则，由引理9.4知，边导出子图D[S]中含有一个有向圈C。设e^*为C上的一条有向边，我们将C的方向定义为与e^*同向，从而有$f_C(e^*) = 1$。定义一个新的函数$f^{'}: E(D) \to R$，使得任给$e \in E(D)$，定义$f^{'}(e) = f(e) - f(e^*)f_C(e)$。容易验证$f^{'}$是D的一个循环，且$f^{'}(e^*) = 0$。所以，$f^{'}$的支撑是S的一个真子集。由归纳假设，$f^{'}$是一些有向圈导出循环的线性组合，所以$f(e) = f^{'}(e) + f(e^*)f_C(e)$也是。若f的函数值都是整数，且$f(e^*) \geq 0$，即该线性组合中的系数都是非负整数。

ch10

3.

> 证明定理10.5。

我们将G中的边按照如下的方式编号：先将$S_1, S_2, \dots S_{v-1}$中在T上的那条边分别标记为$e_1, e_2, \dots, e_{v-1}$，然后再将不在T上的边任意编号，前$v - 1$个元素表示T的边，后$\varepsilon - v + 1$个元素表示非T的边，则有：

$S_1 = (1, 0, \dots, 0, *, \dots *)$

$S_2 = (0, 1, \dots, 0, *, \dots *)$

...

$S_{v-1} = (0, 0, \dots, 1, *, \dots *)$。

给定一组常数$k_1, k_2, \dots, k_{v-1}$，若$k_1S_1 + k_2S_2 + k_{v-1}S_{v-1} = (k_1, k_2, \dots, k_{v-1}, *, \dots *) = (0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0)$，则必有$k_1 = k_2 = \dots = k_{v-1} = 0$。所以，$S_1, S_2, \dots S_{v-1}$线性无关。

另一方面，任给$S \in S(G)$，设S上属于T的边为$e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_t}$。则有$S + S_{i_1} + S_{i_2} + \dots + S_{i_t} = (0, 0, \dots, 0, *, \dots *)$。

一方面因为$S + S_{i_1} + S_{i_2} + \dots + S_{i_t} \in S(G)$；另一方面$S + S_{i_1} + S_{i_2} + \dots + S_{i_t}$却没有树T上的边，不删除树T上的边图仍然连通，所以其不能是断集向量，只能是零向量，即$S + S_{i_1} + S_{i_2} + \dots + S_{i_t} = 0$。故S可以表示成$S_1, S_2 \dots, S_{v-1}$的线性组合。

4.

> 证明：G是Euler图，当且仅当任给$S \in S(G)$，S中非零分量有偶数个。

必要性证明：

设$S = (V', \overline{V'})$，对于G的一个圈C来说，C必然与$(V', \overline{V'})$有偶数条公共边，而G是Euler图，G是无公共边的圈之并，所以G与S有偶数条公共边，从而S中非零分量有偶数个。

充分性证明：

若G不是Euler图，则G中存在一个顶点v_0使得$deg(v_0)$为奇数，取$V' = v_0$，$\overline{V'} = V - v_0$，则S非零分量有奇数个，矛盾，故G是Euler图。