中国科学: 数学 2016 年 第 46 卷 第 3 期: 1 ∼ XX
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

Hessian 方程的Neumann 问题的梯度估计

麻希南, 邱国寰, 徐金菊*

中国科学技术大学数学科学学院, 合肥 230026
E-mail: xinan@ustc.edu.cn, guohuan@mail.ustc.edu.cn, july25@mail.ustc.edu.cn

收稿日期: 20XX-XX-XX; 接受日期: 20XX-XX-XX *通信作者
第一位作者由国家自然科学基金(批准号: No.11125105), 吴文俊数学重点实验室及天元平台项目资助; 第二位作者由中国科技大学博士优才支持计划资助

摘要 本文通过选取适当的辅助函数, 利用极大值原理的方法给出Hessian 方程的Neumann 边值问题的解的梯度估计.

关键词 Hessian 方程 Neumann 问题 梯度估计

MSC (2010) 主题分类 Primary 35B45; Secondary 35J92, 35B50

1 引言

在本文中, 我们主要研究如下Neumann 问题:

$$\begin{cases} \sigma_k(D^2u) = f(x,u) & \forall x \in \Omega, \\ u_\gamma = \varphi(x,u) & \forall x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中$\sigma_k(D^2u)$ 是Hessian 矩阵D^2u 的特征值的k-阶基本对称函数, γ 是$\partial\Omega$ 的单位内法向量场. Hessian 方程的Dirichlet 问题的梯度估计已经有极大值原理的证明: 当$k=1,n$ 时, 可见 [1]; 对于一般的$1 \leqslant k \leqslant n$, [2] 给出证明. [3] 和 [1], 也分别给出了Hessian 方程的Dirichlet 问题的解的存在性结果. 然而关于Hessian 方程的Neumann 问题, 情形不同. $k=1$ 时, 这是著名的Laplace 方程, 在书 [1]中, 给出了解的存在性证明; $k=n$ 时, 这是典型的Monge-Ampere 方程, Lions.P [4]等证明了先验估计并得到存在性结果. 但是对于$2 \leqslant k \leqslant n-1$, Trudinger [5] 证明了区域是球时的存在性定理. 而其他情形的Hessian 方程的Neumann 问题, 至今未有存在性结果.

为了叙述本文的边界梯度估计的结果, 首先回顾 [2] 中的梯度内估计.

引理1 (Chou-Wang [2]). 设Ω 是$\mathbf{R}^n$ 中一个有界区域. 设$u \in C^3(\Omega)$ 是如下方程的k 阶容许解(即对所有的$i \leqslant k$, $\sigma_i(D^2u) > 0$)

$$\sigma_k(D^2u) = f(x,u) \qquad \forall x \in \Omega, \tag{1.2}$$

并且满足$|u| \leqslant M_0$. 假设$f \in C^1(\overline{\Omega} \times [-M_0, M_0])$ 满足以下条件: 存在正常数L_1 使得

$$\begin{aligned} f(x,z) \geqslant 0 \quad & \forall (x,z) \in \overline{\Omega} \times [-M_0, M_0], \\ |f(x,z)| + |f_x(x,z)| + |f_z(x,z)| \leqslant L_1 \quad & \forall (x,z) \in \overline{\Omega} \times [-M_0, M_0], \end{aligned} \tag{1.3}$$

英文引用格式: Zuo Z 1, Zuo Z 2, Zuo Z 3, Zuo Z 4. The English title of this paper (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 1–XX, doi: 10.1360/012011-XXX

则对于$\forall\ \Omega' \subset\subset \Omega$, 有以下不等式成立:

$$\sup_{\Omega'} |Du| \leqslant \widetilde{M}_1, \tag{1.4}$$

其中$\widetilde{M}_1$ 为仅依赖于n, k, M_0, L_1, $\mathtt{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ 的正常数.

本文的主要结果如下:

定理1 设Ω 是$\mathbf{R}^n$ 中一个有界区域, $\partial\Omega \in C^3$, $\Omega_\mu := \{x \in \Omega : \mathtt{dist}(x, \partial\Omega) < \mu\}$, γ 是$\partial\Omega$ 的单位内法向. 设$u \in C^2(\overline{\Omega}) \bigcap C^3(\Omega)$ 是以下Hessian 方程的Neumann 边值问题的k 阶容许解

$$\left\{\begin{array}{rcll} \sigma_k(D^2u) & = & f(x,u) & \forall x \in \Omega, \\ u_\gamma & = & \varphi(x,u) & \forall x \in \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{1.5}$$

并满足$|u| \leqslant M_0$. f, φ 为分别定义在$C^1(\overline{\Omega} \times [-M_0, M_0])$ 和$C^3(\overline{\Omega} \times [-M_0, M_0])$ 上的给定函数. 假设f, φ 满足以下条件: 存在正常数L_1, L_2 使得

$$\begin{array}{rl} f(x,z) > 0 & \forall (x,z) \in \ \overline{\Omega} \times [-M_0, M_0], \\ |f(x,z)| + |f_x(x,z)| + |f_z(x,z)| \leqslant L_1 & \forall (x,z) \in \ \overline{\Omega} \times [-M_0, M_0], \\ |\varphi(x,z)|_{C^3(\overline{\Omega} \times [-M_0, M_0])} \leqslant L_2. & \end{array} \tag{1.6}$$

则存在仅依赖于$n, k, \Omega, M_0, L_1, L_2$ 小的正常数μ_0 使得

$$\sup_{\overline{\Omega}_{\mu_0}} |Du| \leqslant \max\{\widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2\}, \tag{1.7}$$

其中$\widetilde{M}_1$ 为仅依赖于n, k, μ_0, M_0, L_1 的正常数, 它来自于梯度内估计; $\widetilde{M}_2$ 为仅依赖于$n, k, \Omega, \mu_0, M_0, L_1, L_2$ 的正常数.

下面回顾椭圆方程的Neumann 问题的解的存在性的研究历史. 对于平均曲率方程的预定夹角问题, Ural'tseva [6] (也可参见Simon-Spruck [7], Gerhardt [8]) 首先用积分方法得到梯度估计并得到正引力情形下的存在性定理. 后来, Spruck [9], Korevaar [10] 分别给出了极大值原理的证明. Lieberman [11–13] 也利用极大值原理的方法证明了拟线性椭圆方程斜导数问题的边界梯度估计. 对于平均曲率方程的Neumann 问题, Ma-Xu [14] 运用极大值原理的方法得到梯度估计和正引力情形下的一些存在性结果. 对于紧流形上带变边的σ_k-Yamabe 问题, Li-Zhu [15] 研究了相关的σ_k-Yamabe 型方程并得到一些存在性结果. 更多关于椭圆方程的Neumann 问题和斜导数问题的详细历史可以参看Lieberman 的书 [16]. 在本文中, 我们综合应用Chou-Wang [2], Ma-Xu [14] 以及Lieberman [16] 中的技巧得到Hessian 方程的Neumann 问题的边界梯度估计.

本文余下部分安排如下: 在第二节, 我们给出一些基本概念以及对Chou-Wang [2] 中的一个观察. 在第三节给出**定理1**的证明.

2 准备知识

设Ω 是$\mathbf{R}^n$ 中一个有界区域, $n \geqslant 2$, $\partial\Omega \in C^3$, 令

$$d(x) = \mathtt{dist}(x, \partial\Omega),$$

和

$$\Omega_\mu =\{x\in\Omega : d(x)<\mu\}.$$

容易知道存在常数$1\geqslant\widetilde{\mu}>0$ 使得$d(x)\in C^3(\overline{\Omega}_{\widetilde{\mu}})$. 正如Simon-Spruck [7] 或者Lieberman [16]书第331页提到, 在$\Omega_{\widetilde{\mu}}$ 中可以取$\gamma=Dd$, 并且γ 是一个$C^2(\overline{\Omega}_{\widetilde{\mu}})$ 向量场. 同在 [13] 和书 [16] 提到的一样, 我们也有下面的公式:

$$\begin{aligned} |D\gamma|+|D^2\gamma| &\leqslant C_0(n,\Omega)\quad \forall x\in\Omega_{\widetilde{\mu}},\\ \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\gamma^iD_j\gamma^i=0,\ \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\gamma^iD_i\gamma^j &=0,\ |\gamma|=1\quad\forall x\in\Omega_{\widetilde{\mu}}. \end{aligned}\tag{2.1}$$

同 [16] 中一样, 定义

$$c^{ij} =\delta_{ij}-\gamma^i\gamma^j\quad \forall x\in\Omega_{\widetilde{\mu}},\tag{2.2}$$

对任一向量$\zeta\in R^n$, 记ζ' 的第i 个分量为$\sum_{1\leqslant j\leqslant n}c^{ij}\zeta_j$. 所以$|Du|^2$ 的切向部分的模的平方为

$$|D'u|^2=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}c^{ij}u_iu_j.\tag{2.3}$$

令$F^{ij}:=\frac{\partial\sigma_k(D^2u)}{\partial u_{ij}}$, $\mathcal{F}:=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}F^{ii}$. σ_k 算子具有如下简单的性质:

$$F^{ij}u_{ij}=k\sigma_k,\tag{2.4}$$

与

$$\mathcal{F}=(n-k+1)\sigma_{k-1}.\tag{2.5}$$

设$\lambda(D^2u)$ 为D^2u 的特征值. 对任意l,i,j, $\sigma_{l;i}(\lambda(D^2u))=\sigma_l(\lambda(D^2u))|_{\lambda_i=0}$, $\sigma_{l;ij}(\lambda(D^2u))=\sigma_l(\lambda(D^2u))|_{\lambda_i=0,\lambda_j=0}$. 首先我们给出来自于Chou-Wang [2] 的一个观察. 为了本文的完整性, 我们包含此证明.

断言(Chou-Wang [2]): 若u 是k 阶容许解, $u_{11}<-\frac{h'|Du|^2}{128}$, 这里$h'$ 为任一正函数, 则

$$\frac{1}{n-k+1}\mathcal{F}\leqslant F^{11},\tag{2.6}$$

及

$$\mathcal{F}\geqslant C_{n-1}^{k-1}[\frac{kh'}{128(n-k)}]^{k-1}|Du|^{2k-2}.\tag{2.7}$$

证明 因为σ_{k-1} 算子在旋转坐标下不变, 可设$(u_{ij})_{2\leqslant i,j\leqslant n}$ 是对角的. 则有以下展开式:

$$\sigma_{k-1}(D^2u)=F^{11}+u_{11}\sigma_{k-2;1}(\lambda(D^2u))-\sum_{i=2}^n u_{1i}^2\sigma_{k-3;1i}(\lambda(D^2u)).\tag{2.8}$$

显然如果u 是k 阶容许解, 则

$$\sigma_{k-2;1}(\lambda(D^2u))>0,\tag{2.9}$$

及

$$\sigma_{k-3;1i}(\lambda(D^2u))>0.\tag{2.10}$$

应用(2.9), (2.10), (2.5) 和$u_{11} < 0$, 我们由(2.8) 得到

$$\frac{1}{n-k+1}\mathcal{F} \leqslant F^{11}. \tag{2.11}$$

为了估计$\mathcal{F}$, 我们旋转坐标系. 在新坐标系$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 下, D^2u 是对角的, 并且

$$u_{y_n y_n} \geqslant u_{y_{n-1}y_{n-1}} \geqslant \cdots \geqslant u_{y_1 y_1}. \tag{2.12}$$

因为$u_{y_1y_1}$ 是D^2u 的最小特征值, 我们可以看到

$$u_{y_1y_1} \leqslant u_{11} < -\frac{h'|Du|^2}{128}. \tag{2.13}$$

所以由(1.5), 得到

$$0 \leqslant f = \sigma_k(D^2u) = u_{y_1y_1}\sigma_{k-1;1}(\lambda(D^2u)) + \sigma_{k;1}(\lambda(D^2u)). \tag{2.14}$$

如果u 是k 阶容许的, 则$\sigma_{k-1;1}(\lambda(D^2u)) > 0$. 从而应用Newton-MacLaurin 不等式得到

$$C_{n-1}^{k}[\frac{\sigma_{k-1;1}}{C_{n-1}^{k-1}}]^{\frac{k}{k-1}} \geqslant \sigma_{k;1}. \tag{2.15}$$

将(2.15), (2.13) 和(2.14) 联立, 得到

$$\frac{h'|Du|^2}{128} \leqslant -u_{y_1y_1} \leqslant \frac{n-k}{k}[\frac{\sigma_{k-1;1}}{C_{n-1}^{k-1}}]^{\frac{1}{k-1}}. \tag{2.16}$$

因此, 我们有

$$C_{n-1}^{k-1}[\frac{kh'}{128(n-k)}]^{k-1}|Du|^{2k-2} \leqslant \sigma_{k-1;1} \leqslant \mathcal{F}. \tag{2.17}$$

3 定理1的证明

本节将运用Chou-Wang [2], Ma-Xu [14] 和Lieberman [16] 中的标准技巧得到梯度估计.

证明 考虑辅助函数

$$G(x) = \log|Dw|^2 + h(u) + g(d), \tag{3.1}$$

其中

$$w(x) = u(x) - \varphi(x, u)d(x), \tag{3.2}$$

$$h(u) = -\log(1 + 4M_0 - u), \tag{3.3}$$

及

$$g(d) = \alpha_0 d, \tag{3.4}$$

这里α_0 是后面待选取的充分大的正数.

由(3.3), 我们有

$$-\log(1 + 5M_0) \leqslant h \leqslant -\log(1 + 3M_0), \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{1+5M_0} \leqslant h' \leqslant \frac{1}{1+3M_0}, \tag{3.6}$$

$$\frac{1}{(1+5M_0)^2} \leqslant h'' \leqslant \frac{1}{(1+3M_0)^2}. \tag{3.7}$$

根据(3.2), 得到

$$w_i = u_i - (\varphi_i + \varphi_u u_i)d - \varphi d_i. \tag{3.8}$$

如果设$|Du| > 8nL_2$ 和$\mu_0 \leqslant \frac{1}{2L_2}$, 则由(3.8) 得到

$$\frac{1}{4}|Du| \leqslant |Dw| \leqslant 2|Du|. \tag{3.9}$$

这些不等式将在下面用到.

设$G(x)$ 在$x_0 \in \overline{\Omega}_{\mu_0}$ 达到极大值, 其中$0 < \mu_0 < \widetilde{\mu} \leqslant 1$ 是一充分小的正数, 后面待选取.

现在我们分三种情形完成**定理1**的证明.

情形1: 如果$G(x)$ 在$x_0 \in \partial\Omega$ 达到极大值, 则应用Hopf 引理得到$G(x_0)$ 的估计.

情形2: 如果$G(x)$ 在$x_0 \in \partial\Omega_{\mu_0} \bigcap \Omega$ 达到极大值, 则由 [2]中的内估计得到$|Du|(x_0)$ 的估计, 从而得到$G(x_0)$ 的估计.

情形3: 如果$G(x)$ 在$x_0 \in \Omega_{\mu_0}$ 达到极大值, 在此种情形, 对于充分小的常数$\mu_0 > 0$, 运用极大值原理得到$G(x_0)$ 的估计.

因为$G(x) \leqslant G(x_0)$, 所以得到G 的估计, 反过来它可给出在$\overline{\Omega}_{\mu_0}$ 上的$|Du|$ 的估计.

从现在开始, 下面所有计算均在x_0 点. 我们遵循Einstein 求和约定: 所有从1 到n 的重复指标表示求和. 下面只需给出**情形1** 和**情形3** 的证明.

3.1 情形1: 边界梯度估计

若G 在$x_0 \in \partial\Omega$ 达到极大值, 则在x_0 点我们有

$$0 \geqslant G_\gamma = \frac{2|Dw|_p^2\gamma^p}{|Dw|^2} + g' + h'' u_\gamma. \tag{3.10}$$

因为$|Dw|^2 = |D'w|^2 + w_\gamma^2$ 以及在$\partial\Omega$ 上$w_\gamma = u_\gamma - D_\gamma\varphi d - \varphi = 0$, 所以

$$\begin{aligned}
2|Dw|_p^2\gamma^p =& 2c_p^{ij}w_iw_j\gamma^p + 4c^{ij}w_{ip}w_j\gamma^p + 2w_\gamma w_{\gamma p}\gamma^p \\
=& 2c_p^{ij}w_iw_j\gamma^p + 4c^{ij}(u_{ip} - D_{ip}\varphi d - D_i\varphi d_p - D_p\varphi d_i \\
& - \varphi d_{ip})w_j\gamma^p \\
=& 2c_p^{ij}w_iw_j\gamma^p + 4c^{ij}u_{i\gamma}w_j - 4c^{ij}D_i\varphi w_j - 4c^{ij}D_p\varphi\gamma^p d_i w_j \\
& - 4c^{ij}\varphi d_{ip}w_j\gamma^p.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

另一方面对边界条件切向求导, 可得

$$c^{pq}D_q(u_i\gamma^i) = c^{pq}D_q\varphi, \tag{3.12}$$

$$c^{pq}u_{q\gamma} + c^{pq}u_i\gamma_q^i = c^{pq}D_q\varphi. \tag{3.13}$$

(3.13) 两边同乘以w_p 并将其代入(3.11), 可以消去u 的二阶导数项, 得到

$$2|Dw|_p^2\gamma^p \geqslant -C_1(C_0,n,\Omega,L_2)|Dw|^2 - C_2(C_0,n,\Omega,L_2)|Dw| \tag{3.14}$$

所以选取$\alpha_0 = C_1 + C_2 + \frac{L_2}{1+3M_0} + 1$ 使得

$$0 \geqslant G_\gamma \geqslant \alpha_0 - C_1 - \frac{C_2}{|Dw|} - h'|\varphi| \geqslant C_2 - \frac{C_2}{|Dw|}. \tag{3.15}$$

因此得到估计$|Dw|(x_0) \leqslant 1$ 并有$G(x_0) \leqslant -\log(1+3M_0) + C_1 + C_2 + \frac{L_2}{1+3M_0} + 1$.

3.2 情形3: 近边梯度估计

设G 在$x_0 \in \Omega_{\mu_0}$ 达到极大值. 此时x_0 是G 的临界点. 对G 分别求一阶导数和二阶导数:

$$0 = G_i = \frac{2}{|Dw|^2}\sum_{p=1}^n w_p w_{pi} + g' d_i + h' u_i, \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} G_{ij} =& \frac{2}{|Dw|^2}\sum_{p=1}^n (w_{pj}w_{pi} + w_p w_{pji}) - \frac{4}{|Dw|^4}\sum_{p,q=1}^n w_p w_{pi} w_q w_{qj} \\ &+ g'' d_i d_j + g' d_{ij} + h'' u_i u_j + h' u_{ij}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

如果设u 是k 阶容许解, 则$F^{ij}(D^2u) > 0$. 在x_0 点, 我们得到

$$\begin{aligned} 0 \geqslant F^{ij}G_{ij} =& \frac{2}{|Dw|^2}\sum_{p=1}^n F^{ij} w_{pi} w_{pj} + \frac{2}{|Dw|^2}\sum_{p=1}^n F^{ij} w_p w_{pij} \\ &- \frac{4}{|Dw|^4}\sum_{p,q=1}^n F^{ij} w_p w_{pi} w_q w_{qj} + g'' F^{ij} d_i d_j + g' F^{ij} d_{ij} \\ &+ h'' F^{ij} u_i u_j + h' F^{ij} u_{ij}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

已知$w = u - \varphi d$, 它的二阶导数为

$$\begin{aligned} w_{ij} =& u_{ij} - (\varphi_{ij} + \varphi_{iu} u_j + \varphi_{uj} u_i + \varphi_{uu} u_i u_j + \varphi_u u_{ij}) d \\ &- (\varphi_i + \varphi_u u_i) d_j - \varphi_j d_i - \varphi_u u_j d_i - \varphi d_{ij}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

所以w_{ij} 与u_{ij} 有以下关系:

$$|w_{ij} - (1-\varphi_u d)u_{ij}| \leqslant C_4(L_2,n)\mu_0|Du|^2 + C_5(C_0,L_2,n)|Du| + C_6(C_0,L_2,n). \tag{3.20}$$

再次对w_{ij} 求导,

$$\begin{aligned} w_{ijp} =& u_{ijp} - (\varphi_{ijp} + \varphi_{iju} u_p + \varphi_{iup} u_j + \varphi_{iuu} u_p u_j + \varphi_{iu} u_{jp} + \varphi_{ujp} u_i \\ &+ \varphi_{uju} u_p u_i + \varphi_{uj} u_{ip} + \varphi_{uup} u_i u_j + \varphi_{uuu} u_p u_i u_j + \varphi_{uu} u_{ip} u_j \\ &+ \varphi_{uu} u_i u_{jp} + \varphi_{up} u_{ij} + \varphi_{uu} u_p u_{ij} + \varphi_u u_{ijp}) d \\ &- (\varphi_{ij} + \varphi_{iu} u_j + \varphi_{uj} u_i + \varphi_{uu} u_i u_j + \varphi_u u_{ij}) d_p \\ &- (\varphi_{ip} + \varphi_{iu} u_p + \varphi_{up} u_i + \varphi_{uu} u_p u_i + \varphi_u u_{ip}) d_j \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- (\varphi_i + \varphi_u u_i) d_{jp} - \varphi_{jp} d_i - \varphi_{ju} u_p d_i - \varphi_j d_{ip} \\
&- \varphi_{up} u_j d_i - \varphi_{uu} u_p u_j d_i - \varphi_u u_{jp} d_i \\
&- \varphi_u u_j d_{ip} - \varphi_p d_{ij} - \varphi_u u_p d_{ij} - \varphi d_{ijp}.
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

现在在x_0 点选取坐标系使得$|\nabla w|(x_0) = w_1$, $(u_{ij}(x_0))_{2\leqslant i,j\leqslant n}$ 对角.
从而由(3.8) 和(3.16), 对$i = 1$, 有

$$
u_1 = \frac{w_1 + \varphi_1 d + \varphi d_1}{1 - \varphi_u d}, \tag{3.22}
$$

$$
w_{11} = -\frac{1}{2}(g' d_1 + h' u_1) w_1, \tag{3.23}
$$

对$2 \leqslant i \leqslant n$, 有

$$
u_i = \frac{\varphi_i d + \varphi d_i}{1 - \varphi_u d}, \tag{3.24}
$$

$$
w_{1i} = -\frac{1}{2}(g' d_i + h' u_i) w_1. \tag{3.25}
$$

这里假设$\mu_0 \leqslant \mu_1 := \frac{1}{2L_2}$ 使得$1 - \varphi_u d \geqslant \frac{1}{2}$.

设$|Du|(x_0) > M_1 := 64nL_2$, 对$i \geqslant 2$, 有

$$
|u_i| \leqslant \frac{1}{16n}|Du|, \tag{3.26}
$$

以及

$$
u_1 \geqslant \frac{1}{2}|Du|. \tag{3.27}
$$

进而得到

$$
|Du|(x_0) \geqslant M_2 := 32n(1 + 5M_0)\alpha_0 + 128(C_5 + C_6)(1 + 4M_0) + 1. \tag{3.28}
$$

由上式可以得到

$$
|g' d_i| \leqslant \frac{h' u_1}{16n}. \tag{3.29}
$$

根据(3.19) 和(3.23), 得到关键的不等式:

$$
u_{11} \leqslant -\frac{1}{128} h' |Du|^2 < 0, \tag{3.30}
$$

其中设$\mu_0 \leqslant \mu_2 := \frac{1}{64C_4(1+5M_0)}$.
对$i \geqslant 2$, 有

$$
|w_{1i}| \leqslant \frac{h'|Dw|^2}{32n}, \tag{3.31}
$$

$$
|u_{1i}| \leqslant (C_4\mu_0 + \frac{1}{1 + 3M_0})|Du|^2 + (C_5 + C_6)|Du|. \tag{3.32}
$$

下面应用(3.8), (3.19) 和(3.21) 计算$F^{ij}G_{ij}$:

$$
\begin{aligned}
F^{ij}G_{ij} \geqslant& - C_7(n, k, L_2, \Omega)\mu_0 \mathcal{F}|Du|^2 + \frac{2}{w_1}(1 - \varphi_u d) F^{ij} u_{ij1} \\
&- \frac{4}{w_1} F^{ij}(\varphi_{iu} u_{j1} d + \varphi_{uu} u_{i1} u_j d + \varphi_u u_{i1} d_j)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{2}{w_1}F^{ij}u_{ij}[(\varphi_{up}+\varphi_{uu}u_p)d+\varphi_u d_p]-\frac{2}{w_1^2}F^{ij}w_{1i}w_{1j}\\
&-C_8(n,k,L_2,\alpha_0,\Omega)\mathcal{F}|Du|+h''F^{11}u_1^2+h'F^{ij}u_{ij}. \qquad (3.33)
\end{aligned}
$$

在(1.5) 中的第一个方程是k 阶齐次的. 对方程求导可得

$$
F^{ij}u_{ij}=kf \qquad (3.34)
$$

$$
F^{ij}u_{ij1}=f_{x_1}+f_u u_1. \qquad (3.35)
$$

由(3.31), (3.32), (3.34)以及(3.35) 可得

$$
\begin{aligned}
F^{ij}G_{ij}\geqslant&-C_9(n,k,L_2,M_0,\Omega)\mu_0\mathcal{F}|Du|^2+h''F^{11}u_1^2-\frac{h'^2\mathcal{F}|Dw|^2}{32\times 16n}\\
&-C_{10}(n,k,L_2,L_1,M_0,\alpha_0,\Omega)\mathcal{F}|Du|-C_{11}(L_1,n,L_2). \qquad (3.36)
\end{aligned}
$$

由公式(2.6) 可以知道$\mu_0\leqslant\mu_3:=\frac{1}{32C_9(1+5M_0)^2(n-k+1)}$ 小, 因此得到

$$
\frac{h''F^{11}u_1^2}{8}\geqslant C_9\mu_0\mathcal{F}|Du|^2. \qquad (3.37)
$$

根据h 的定义, 有$h''=h'^2$. 从而由(2.6), 得到

$$
\frac{h''F^{11}u_1^2}{8}\geqslant\frac{(h')^2\mathcal{F}|Du|^2}{32\times 16n}. \qquad (3.38)
$$

如果我们进一步假设$|Du|(x_0)\geqslant M_3:=32(n-k+1)(1+5M_0)^2C_{10}$, 则得到

$$
\frac{h''F^{11}u_1^2}{8}\geqslant C_{10}\mathcal{F}|Du|. \qquad (3.39)
$$

根据以上估计(2.6), (3.37), (3.38) 和(3.39), 得到

$$
0\geqslant F^{ij}G_{ij}\geqslant\frac{h''\mathcal{F}|Du|^2}{32(n-k+1)}-C_{11}. \qquad (3.40)
$$

在断言中, 不等式(2.7) 意味着

$$
0\geqslant\frac{h''\mathcal{F}|Du|^2}{32(n-k+1)}-C_{11}>0. \qquad (3.41)
$$

如果$|Du|(x_0)\geqslant M_4:=\frac{32(n-k+1)(1+5M_0)^2C_{11}}{C_{n-1}^{k-1}k^{k-1}}[(1+5M_0)128(n-k)C_{n-1}^k]^{k-1}$.
从而得到矛盾.

所以如果取$\mu_0=\min\{\mu_1,\mu_2,\mu_3\}$, 则有以下估计

$$
|Du|(x_0)\leqslant\max\{M_1,M_2,M_3,M_4\}. \qquad (3.42)
$$

从而得到$G(x_0)$ 的估计. 因为G 在x_0 达到极大值, 并且h,g 都有下界, 所以综合以上三种情形, 可以得到u 的梯度估计. **定理1**证明完毕. □

致谢 本文的部分工作是第一位作者在2014年2月访问澳大利亚国立大学期间完成的, 他非常感谢汪徐家教授的邀请和一些有意义的讨论.

参考文献

1 Gilbarg D, Trudinger N. Elliptic partial differential equations of second order. springer, 2001
2 Chou K S, Wang X J. A variational theory of the Hessian equation. Comm. Pure Appl. Math. 2001, 54(9): 1029–1064
3 Wang X J. The k-Hessian equation. Geometric Analysis and PDEs, Lecture Notes in Mathematics 1977. 2009, 177–252, Springer
4 Lions P L, Trudinger N S, Urbas J. The neumann problem for equations of monge-ampère type. Comm. Pure Appl. Math. 1986, 39(4): 539–563
5 Trudinger N. On degenerate fully nonlinear elliptic equations in balls, Bull. Austral. Math. Soc. 1987, 35(2): 299–307
6 Ural'tseva N. Solvability of the capillary problem, Vestnik Leningrad. Univ. No. 1973, 1: 54–64; 1975,1: 143–149[Russian]. English Translation in vestnik Leningrad Univ.math. 1979, 6: 363-375; 1980, 8: 151–158
7 Simon L, Spruck J. Existence and regularity of a capillary surface with prescribed contact angle. Arch. Rational Mech. Anal. 1976, 61: 19–34
8 Gerhardt C. Global regularity of the solutions to the capillary problem. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 1976, 3(4): 151–176
9 Spruck J. On the existence of a capillary surface with prescribed contact angle. Comm. Pure Appl. Math. 1975, 28: 189–200
10 Korevaar N J. Maximum principle gradient estimates for the capillary problem. Comm. in Partial Differential Equations. 1988, 13(1): 1–32
11 Lieberman G. The nonlinear oblique derivative problem for quasilinear elliptic equations. Nonlinear Analysis.Theory. Method & Applications. 1984, 8: 49–65
12 Lieberman G. Gradient bounds for solutions of nonuniformly elliptic oblique derivative problems. Nonlinear Analysis.Theory. Method & Applications. 1987, 11(1): 49–61
13 Lieberman G. Gradient estimates for capillary-type problems via the maximum principle. Commun. in Partial Differential Equations. 1988, 13(1): 33–59
14 Ma X N, Xu J J. Gradient estimates of mean curvature equations with Neumann boundary value problems. ArXiv: 1406.0046
15 Li A B, Zhu H. Some fully nonlinear problems on manifolds with boundary of negative admissible curvature. ArXiv: 1102.3308
16 Lieberman G. Oblique boundary value problems for elliptic equations. World Scientific Publishing. 2013

SCIENCE CHINA Mathematics: Gradient Estimates on Hessian Equations for Neumann Problem

Xi-Nan Ma & Guohuan Qiu & Jinju Xu

Abstract In this note, we find a suitable auxiliary function and use maximum principle to get gradient estimates for the solution of Hessian equations with Neumann boundary condition..

Keywords Hessian equation, Neumann problem, Gradient estimate

MSC(2010) Primary 35B45; Secondary 35J92, 35B50

doi: 10.1360/012011-XXX