中国科学技术大学

博士学位论文

海森方程的纽曼问题及其几何应用

作者姓名： 邱 国 寰

学科专业： 基础数学专业

导师姓名： 麻希南 教授

完成时间： 二〇一六年三月

University of Science and Technology of China

A dissertation for doctor's degree

Neumann Problems for Hessian equations and geometric applications

Author :	Guohuan Qiu
Speciality :	Mathematics
Supervisor :	Prof. Xinan Ma
Finished Time :	March, 2016

中国科学技术大学学位论文原创性声明

本人声明所呈交的学位论文，是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名：____________　　　　签字日期：____________

中国科学技术大学学位论文授权使用声明

作为申请学位的条件之一，学位论文著作权拥有者授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权，即：学校有权按有关规定向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅，可以将学位论文编入《中国学位论文全文数据库》等有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。本人提交的电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。

保密的学位论文在解密后也遵守此规定。

□公开　□保密（____ 年）

作者签名：____________　　　　导师签名：____________

签字日期：____________　　　　签字日期：____________

摘 要

海森方程是一类很重要的完全非线性二阶椭圆偏微分方程。而方程的边界值问题主要分为狄利克雷边界问题和纽曼边界问题。关于海森方程的狄利克雷边界问题已经早有研究，其解的存在性，正则性结果已经被领域内所熟知。而对应的纽曼问题的解的存在性还是未知问题。本文主要研究海森方程的纽曼边界问题存在性问题，完全解决了关于海森方程纽曼问题的解的存在性的猜想。本文主要贡献是构造了一个新的辅助函数然后用极大值原理证明了解在边界上的二阶导数估计从而得到解的存在性。进一步我们用此类边界问题重新证明了一些几何不等式。

关键词： 二阶椭圆方程，海森方程，纽曼边界，几何不等式

ABSTRACT

Hessian equations are important kind of fully nonlinear second order elliptic parital differential equations. Boundary values problems of these equations are mainly divided into two categories: Dirichlet problems and Neumann problems. Dirichlet problems have studied for a long time. Its existence and regularity results are well known in this area. While the Neumann problems are still unkown for many decades. In this paper, we mainly study Neumann boundary problems of Hessian equations. We completely solve Neumann problems for Hessian equaions which is also a conjecture of Trudinger. The main contribution of this paper is that we construct a new auxiliary function and use maximum principle to prove second order derivative estimates on the boundary then existence results. Moreover, we use the solutions of these boundary problems to obtian a new proof of some geometric inequalities.

Keywords: Second order elliptic equations, Hessian equations, Neumann boundary, geometric inequalities

目 录

第一章　引言

本篇论文我们主要研究如下 k 海森方程的纽曼边值问题

$$\begin{cases} \sigma_k(D^2u) &= f(x) \quad \Omega, \\ u_\nu &= \varphi(x,u) \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

这里 $\sigma_k(D^2u)$ 表示关于 D^2u 的特征值的第 k 个基本对称多项式函数，ν 为边界的外法向。本文所指的海森方程特指 $1 < k < n$ 对应的方程不包含拉普拉斯方程（对应 $k = 1$）和蒙日安培方程（对应 $k = n$）。

我们首先给出一些关于 k 海森方程的基本定义。

定义 1.0.1. 对任意的 $k = 1, 2, \cdots, n$, 以及 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ 定义

$$\sigma_k(\lambda) = \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_k}。 \tag{1.2}$$

另外定义 $\sigma_0(\lambda) = 1$。

我们记 $\sigma_k(\lambda|i) = \sigma_k(\lambda)|_{\lambda_i=0}$ 和 $\sigma_k(\lambda|ij) = \sigma_k(\lambda)|_{\lambda_i=0,\lambda_j=0}$。

定义 1.0.2. 设 A 为 $n \times n$ 的对称矩阵. 对 $k \in 1, 2, \cdots, n$ 定义

$$\sigma_k(A) = \sigma_k(\lambda(A)) = \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_k}, \tag{1.3}$$

其中 $\lambda(A)$ 为矩阵 A 的特征值. 也就是说 $\sigma_k(A)$ 为矩阵 A 的所有 k 阶主子式的和。所以海森方程也可以理解成函数二阶导数矩阵的特征值方程。

定义 1.0.3. k-*Garding* 锥 Γ_k 定义为

$$\Gamma_k = \{(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n | \sigma_j(\lambda) > 0, \forall j = 1, \cdots, k\}。 \tag{1.4}$$

因此我们说一个函数是某个二阶偏微分方程的 k 允许解定义为 $\lambda(D^2u) \in \Gamma_k$ 并且 u 为这个方程的 C^2 解。在文章中我们经常把 k 允许解就叫做允许解。

定义 1.0.4. 一个 $\mathbb{R}^n$ 中的 C^2 有界区域 Ω 如果其边界的曲率 κ 满足

$$\sigma_{k-1}(\kappa) \geqslant c_0 > 0, \quad on \quad \partial\Omega, \tag{1.5}$$

我们就说该区域 Ω 为严格 $k-1$ 凸的。这里的边界曲率是相对于边界 $\partial\Omega$ 的内法向来说的。

当 $k = 1$ 时，方程 (1.1) 是著名的带纽曼边界的拉普拉斯方程，对于其先验估计和存在性请参考标准椭圆方程书 [13]。对于 $k = n$，严格凸区域上凸解的存在性是由 Lions-Trudinger-Urbas[37] 得到的。而对于 $2 \leqslant k \leqslant n-1$，Trudinger[50] 仅在区域是球的时候证明了解的存在性，并且他在其文章中第 305 页提出在一般光滑凸区域允许解的存在性的猜想。

对比 k-海森方程的狄利克雷边界问题，

$$\begin{cases} \sigma_k(D^2u) = f(x) & \Omega, \\ u = \varphi(x) & \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.6}$$

Caffarelli-Nirenberg-Spruck[3] 得到了欧式空间有界光滑严格 $k-1$ 凸区域上允许解的存在性。Ivochkina[23] 研究了更复杂形式的海森方程。Trudinger[52] 研究了海森商方程的狄利克雷问题。Chou-Wang [8] 得到了海森方程的的 Pogorelov 型内估计和变分解的存在性。Trudinger-Wang[53] 建立了海森方程的位势理论。

可见对于海森的狄利克雷边界问题理论已经非常完善，而海森方程的纽曼问题一直没有什么进展。为完善椭圆方程边界值理论，我们研究并解决了海森方程的纽曼问题存在性问题。这也是本文最主要的目的。本篇论文主要研究 k-海森方程纽曼边界问题光滑严格凸区域允许解的存在性，从而给出了 Trudinger 猜想的一个完整证明。这主要来源于 Ma-Qiu[40] 的文章。

定理 1.0.1. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中 C^4 有界严格凸区域。对于任意固定的 $c>0$，$f\in C^2(\overline{\Omega})$ 且是正函数，$\varphi\in C^3(\overline{\Omega})$。那么存在唯一的 k 允许解 $u\in C^{3,\alpha}(\overline{\Omega})$ 满足如下纽曼边界问题,

$$\begin{cases} \sigma_k(D^2u) = f(x) & \Omega, \\ u_\nu = -cu+\varphi(x) & \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.7}$$

海森方程是一类重要的完全非线性二阶椭圆偏微分方程。在超曲面几何，共形几何，和 Kähler 几何中都会出现类似的海森方程。以下我们简单介绍一下这类方程的历史和一些进展。更详细的可以参照 Wang[60] 的文章。

对于超曲面几何中的预定 k 曲率问题，目前主要分两种情形。一种是研究紧的无边流形，为了研究其几何问题对应的偏微分方程经常用高斯映射把其参数在球面上或者把其看成球面上的镜像函数。Pogorelov[42]，Caffarelli-Nirenberg-Spruck [4]，Guan-Guan [15]，Guan-Ma[15]，Sheng-Trudinger-Wang[48]，Guan-Lin-Ma[17] 和 Guan-Li-Li[16] 分别研究了和 k-海森方程对应的几何问题：Minkowski 问题，预定曲率问题，预定 Weingarten 曲率问题，Christoffel-Minkowski 问题和预定曲率测度问题。另一种是研究带边的情形。这方面主要有 $\mathbb{R}^n$ 中图上预定曲率的狄利克雷问题。如 Jenkins-Serrin[25]，Serrin[46] 证明了平均曲率方程的狄利克雷问题得存在性，Ivochkina[24] 以及 Trudinger[51] 研究了 k 曲率的方程的狄利克雷问题的存在性。

不仅在欧式空间中，还有很多学者研究流形上的海森方程，如 Y.Y.Li [30]，Urbas [58] 和 Guan [14] 等等。近期也有很多人对共形几何中海森型方程进行了研究，如 Viaclovsky [59]，Chang-Gursky-Yang [5]，Guan-Wang[18]，Li-Li[29]，Gursky-Viaclovsky[19]，Sheng-Trudinger-Wang[47]，Ge-Wang[11]。在 Kähler 几何中，Hou-Ma-Wu [21] 和 Dinew-Kolodziej [9] 研究了海森型方程的存在性。

本文的一个主要动机来源于很多几何上带边的问题可以归结成解一个纽曼边界条件问题而不仅是狄利克雷问题。这方面很重要并且很有名的问题是带边

Yamabe 问题。这方面首先是由 Escobar [10] 证明了对于大部分带边流形都共形于常数量曲率流形并且边界平均曲率为零。这个几何问题可以归结为解一个带临界指标的半线性椭圆方程边界为纽曼边界条件。很自然的，海森方程的纽曼出现在 Chang-Gursky-Yang[5] 对完全非线性方程带边问题的研究中。具体地，找到一个共形度量使得 Schouten 张量的第 k 个基本对称多项式函数为常数，并且其边界为常平均曲率。具体的对这个方程的研究可以参看 Jin-Li-Li [28], Chen [7], He-Sheng [20] 和 Li-Nguyen [31, 32]，但是这些文章的存在性定理需要加上边界是全脐或者是全测地的条件，然而这个条件放在欧式空间就类似于 Trudinger [50] 论文中假设区域是球。

对于线性和拟线性方程的纽曼边界和斜边界问题基本研究的比较清楚了，详见 Lieberman [33] 的书。这方面主要有与物理有关的毛细血管问题，数学模型即平均曲率方程加上预定夹角边界值问题。对于经典解的梯度估计及存在性主要有 Ural'tseva [55], Simon-Spruck [49] 和 Gerhardt [12]。若边界是纽曼边界则有近期 Ma-Xu[41] 对于平均曲率方程的梯度估计及其相应的存在性结果。而对于完全非线性方程特别是海森方程的纽曼问题只有 Urbas[56–58] 有一些部分结果。其中值得一提的是，最优运输问题可以转化成对斜导数问题的研究，而纽曼问题就是最特殊的斜导数问题。正是来源于最优运输问题和共形几何问题，Jiang-Trudinger [27] 研究了海森方程中带参数项的方程，得到了类似于 Ma-Trudinger-Wang[39] 文章中的强 A3 条件（也被称为 MTW 条件）下的一些存在性结果。海森方程虽然是带参数项方程的特例但其对应于还未被解决的弱 A3 条件下的问题。所以 Jiang-Trudinger [27] 在文章中提出能否在弱 A3 条件下证明带参数的海森方程的存在性。

首先简要的说下我们证明解的存在性的主要想法和步骤。Gilbarg-Trudinger 的书告诉我们由连续性方法我们只需要证明满足方程(1.1)的解具有 $C^{2,\alpha}$ 先验估计。然后 Lieberman-Trudinger [35] (参看 [36], [33]) 证明了一致椭圆条件下的完全非线性方程纽曼问题的存在性。因此我们只需要证明直到二阶导数的全局估计。C^0 估计在这种边界条件(1.1)下是简单的，而且 C^1 估计刚刚由麻-邱-徐 [1] 得到，那篇文章的主要贡献是我们构造了一个适当的辅助函数并且巧妙地选择了一个可以计算的坐标系。对于全局 C^2 估计，我们首先把其约化成边界的双法向估计，这步基本来源于 Lions-Trudinger-Urbas[37]。然后再利用这个估计去得到边界双法向估计。这个和 Monge-Ampere 方程有很大的不同，因为 Monge-Ampere 方程的边界双法向估计是很容易得到的。但海森方程因为有这种“$\sum_{ijk} F^{ij}u_{ik}D_j\nu^k$”项所以很难直接得到边界双法向估计。我们受到 Lions-Trudinger-Urbas [37]，Trudinger [50]，Ivochkina-Trudinger-Wang [22] 和 Urbas [56] 的启发找到了一个新的辅助函数，从而构造了关于 u_ν 的新的闸函数。这样我们就能提出一个好项来控制那个麻烦的项。

海森方程的纽曼问题不仅仅是以上所提及的几何问题的基本模型，其自身

也可以有一些几何应用。由 Reilly 的工作 [45] 我们知道纽曼边界问题的解可以用来证明一些几何不等式。所以文章的第二部分是用海森方程的纽曼问题来重证一系列 Alexandrov-Fenchel 不等式，这部分是和夏超 [44] 的合作。证明的难点在于要证这类几何应用一般需要解经典的纽曼边界问题

$$
\begin{cases} \sigma_k(D^2u) = 1 & \Omega, \\ u_\nu = c & \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.8}
$$

但是这个方程的解在加减常数还是解。所以没有唯一性，也没有 C^0 估计。所以更没法直接得到高阶的估计从而用连续性方法。为了解决这个问题我们类似于 Lions-Trudinger-Urbas[37] 文中一样先考虑如下方程(1.9)，然后去证明一个和 ϵ 无关的一致估计，再对其中 ϵ 取极限得到(1.8)，

$$
\begin{cases} \sigma_k(D^2u) = 1 & \Omega, \\ u_\nu = -\epsilon u & \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.9}
$$

这和 Lions-Trudinger-Urbas 的方法不太一样，那里他们很依赖于解的凸性，我们知道在解凸的情形下梯度估计一般相对简单。我们的方法也和拉普拉斯方程的纽曼问题的证明不一样，那里因为是线性方程，可以运用 Fredholm 理论只要有齐次方程解的常数意义下的唯一性就得到存在性。但这里对应的齐次方程是个退化方程。我们用的方法来源于 [41]，观察到在严格凸假设下可以做到个不依赖于最大模的梯度估计。之后的几何应用即是 Reilly 的工作 [45] 的推广。

第二章　准备知识

这一章我们主要介绍一些关于海森算子的一些准备知识。陈的笔记 [6] 有更详细的总结。

记 $F^{ij} := \frac{\partial \sigma_k(D^2u)}{\partial u_{ij}}$，$\mathcal{F} := \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n} F^{ii}$。做二阶导数估计时我们经常把原方程写成这种形式

$$\widetilde{F}(D^2u) := \sigma_k^{\frac{1}{k}}(D^2u) = f^{\frac{1}{k}} =: \widetilde{f}, \tag{2.1}$$

并且我们记

$$\widetilde{F}^{ij} := \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial u_{ij}}, \widetilde{F}^{ij,pq} := \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial u_{ij}\partial u_{pq}}. \tag{2.2}$$

σ_k 算子有如下简单的性质。

命题 2.0.1. 对任意的 $1 \leqslant k \leqslant n$，和 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ 有

$$\sigma_k(\lambda) = \sigma_k(\lambda|i) + \lambda_i \sigma_{k-1}(\lambda|i), \forall 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{2.3}$$

$$F^{ij}u_{ij} = k\sigma_k, \tag{2.4}$$

和

$$\mathcal{F} = (n-k+1)\sigma_{k-1}. \tag{2.5}$$

证明. 参见 [34]。

□

命题 2.0.2. 若 $\lambda \in \Gamma_k$，那么

$$\sigma_h(\lambda|i) > 0, \qquad \forall h < k \qquad \text{and} \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{2.6}$$

并且 $\sigma_k^{\frac{1}{k}}$ 是关于 λ 的凹函数。

证明. 参见 [34]。

□

命题 2.0.3. 对于 $k \geqslant l \geqslant 1$，若 $\lambda \in \Gamma_k$ 则有如下 *Newton-MacLaurin* 不等式

$$[\frac{\sigma_k(\lambda)}{C_n^k}]^{\frac{1}{k}} \leqslant [\frac{\sigma_l(\lambda)}{C_n^l}]^{\frac{1}{l}}. \tag{2.7}$$

还有，

$$\sum_1^n \frac{\partial \sigma_k^{\frac{1}{k}}(\lambda)}{\partial \lambda_i} \geqslant [C_n^k]^{\frac{1}{k}}. \tag{2.8}$$

证明. 参见 [34]。 □

命题 2.0.4. 若 $\lambda \in \Gamma_k$。并且假设

$$\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n,$$

则有

$$\lambda_1 \sigma_{k-1}(\lambda|1) \geqslant \frac{k}{n}\sigma_k(\lambda), \tag{2.9}$$

对 $\forall i > k$

$$\sigma_{k-1}(\lambda|i) \geqslant \sigma_{k-1}(\lambda|k) \geqslant c(n,k)\sigma_{k-1}(\lambda) > 0, \tag{2.10}$$

和

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k > 0. \tag{2.11}$$

证明. 参见 [6]。 □

命题 2.0.5. 假设 W 是对角的，对于 $1 \leqslant k \leqslant n$，有

$$\frac{\partial^2 \sigma_k(W)}{\partial W_{ij} \partial W_{rs}} = \begin{cases} \sigma_{k-2}(W|ir), & \text{如果 } i=j, r=s, i \neq r; \\ -\sigma_{k-2}(W|ij), & \text{如果 } i \neq j, r=j, s=i; \\ 0, & \text{其它情形。} \end{cases} \tag{2.12}$$

证明. 参见 [6]。 □

第三章　纽曼问题存在性证明

3.1　C^0 和 C^1 估计

这一节我们主要对方程 (1.7) 的允许解得到先验地 C^0 和 C^1 估计。这里的 C^0 估计来自于 Trudinger [50]。

定理 3.1.1. *[50]* 有界 C^1 区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，令 ν 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向。设 $u \in C^2(\overline{\Omega}) \bigcap C^3(\Omega)$ 为以下纽曼边界方程的 k-允许解

$$\begin{cases} \sigma_k(D^2u) &= f(x) & \Omega, \\ u_\nu &= -u + \varphi(x) & \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

则

$$\sup_{\overline{\Omega}} |u| \leqslant M_0, \tag{3.2}$$

这里常数 M_0 只和 k，n，$diam\Omega$，φ，和 $\sup f$ 有关。

证明. 设 $0 \in \Omega$，我们首先考虑函数 $u - A|x|^2$。固定依赖于 k, n 和 $\sup f$ 的常数 A 大，使得

$$F[D^2u] = f \leqslant F[D^2(A|x|^2)]. \tag{3.3}$$

比较原理告诉我们 $u - A|x|^2$ 在边界点 x_0 达到最小值。

$$0 \geqslant (u - A|x|^2)_\nu(x_0) = -u + \varphi - 2Ax \cdot \nu. \tag{3.4}$$

类似地，因为 u 是允许解，特别地它为下调和函数，所以 u 在边界上达到最大值。最终我们得到

$$\inf_{\partial\Omega} \varphi - 4A\mathrm{diam}\Omega \leqslant u \leqslant \sup_{\partial\Omega} \varphi。 \tag{3.5}$$

□

海森方程的梯度估计来源于 Ma-Qiu-Xu 的文章 [1]。我们定义边界距离函数

$$d(x) = \mathtt{dist}(x, \partial\Omega),$$

和

$$\Omega_\mu := \{x \in \Omega : d(x) < \mu\}.$$

则可以找到一个正的小常数 $1 \geqslant \widetilde{\mu} > 0$ 使得 $d(x) \in C^4(\overline{\Omega_{\widetilde{\mu}}})$。由 Simon-Spruck [49] 或者 Lieberman [33] 书上 131 页一样，我们能把 ν 延拓到 $\Omega_{\widetilde{\mu}}$ 定义为 $\nu = -Dd$，并且 ν 为 $C^2(\overline{\Omega_{\widetilde{\mu}}})$ 向量场。就像 Lieberman 书中提到 [33]，我们还有如下的公式

$$\begin{aligned} |D\nu| + |D^2\nu| &\leqslant C_0(n, \Omega) \quad \text{in} \quad \Omega_{\widetilde{\mu}}, \\ \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \nu^i D_j \nu^i = 0, \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \nu^i D_i \nu^j &= 0, \ |\nu| = 1 \quad \text{in} \quad \Omega_{\widetilde{\mu}}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

和 [33] 书中一样，我们定义

$$c^{ij} = \delta_{ij} - \nu^i \nu^j \quad \text{in} \quad \Omega_{\tilde{\mu}}, \tag{3.7}$$

和一个 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 ζ,然后我们把 ζ' 这个新向量的第 i 个分量定义为 $\sum_{1\leqslant j\leqslant n} c^{ij}\zeta^j$。则 u 的切向梯度模长为，

$$|D'u|^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} c^{ij}u_i u_j。 \tag{3.8}$$

我们首先陈述 Chou-Wang[8] 文章中一个有用的引理。

引理 3.1.1. *(Chou-Wang) [8]* 如果 u 为海森方程的 k 允许解，并且 $u_{11} < -\frac{h'|Du|^2}{128}$，这里 h' 为一个正的函数。则有

$$\frac{1}{n-k+1}\mathcal{F} \leqslant F^{11}, \tag{3.9}$$

和

$$\mathcal{F} \geqslant C_{n-1}^{k-1}[\frac{kh'}{128(n-k)}]^{k-1}|Du|^{2k-2}. \tag{3.10}$$

为了陈述纽曼问题的梯度估计，我们得先引用 Chou-Wang [8] 的梯度内估计的引理 (也可参考 Trudinger [54] 的文章) 。

引理 3.1.2. *(Chou-Wang) [8]* 有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 。假设 $u \in C^3(\Omega)$ 为以下海森方程的 k-允许解

$$\sigma_k(D^2u) = f(x,u) \qquad \text{in} \qquad \Omega \tag{3.11}$$

并且有满足 $|u| \leqslant M_0$。若 $f \in C^2(\overline{\Omega} \times [-M_0, M_0])$ 满足：存在正常数 L_1 使得

$$\begin{aligned} f(x,z) \geqslant 0 \quad \text{in} \quad \overline{\Omega} \times [-M_0, M_0], \\ |f(x,z)| + |f_x(x,z)| + |f_z(x,z)| \leqslant L_1 \quad \text{in} \quad \overline{\Omega} \times [-M_0, M_0]. \end{aligned} \tag{3.12}$$

则对 $\forall\, \Omega' \subset\subset \Omega$，有

$$\sup_{\Omega'} |Du| \leqslant \widetilde{M}_1, \tag{3.13}$$

这里正常数 $\widetilde{M}_1$ 和 n，k，M_0，$\mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$，$L_1$ 有关。

现在我们来做全局梯度估计。

定理 3.1.2. 有界 C^3 域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,同样 ν 为 $\partial\Omega$ 的外法向量。若 $u \in C^2(\overline{\Omega}) \bigcap C^3(\Omega)$ 为以下边界问题的 k- 允许解

$$\begin{cases} \sigma_k(D^2u) &= f(x,u) \quad \Omega, \\ u_\nu &= \varphi(x,u) \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.14}$$

且满足 $|u| \leqslant M_0$，这里 f, φ 都是定义在 $\bar{\Omega} \times [-M_0, M_0]$ 的函数。如果 f, φ 满足如下条件：$\exists$ 两正常数 L_1, L_2 使得

$$\begin{aligned} f(x,z) > 0 \quad \text{in} \quad \overline{\Omega} \times [-M_0, M_0], \\ |f(x,z)| + |f_x(x,z)| + |f_z(x,z)| \leqslant L_1 \quad \text{in} \quad \overline{\Omega} \times [-M_0, M_0], \\ |\varphi(x,z)|_{C^3(\overline{\Omega}\times[-M_0,M_0])} \leqslant L_2. \end{aligned} \tag{3.15}$$

则存在一个很小的只和 $n, k, , M_0, L_1, L_2$ 有关的正常数 μ_0 使得下式成立

$$\sup_{\overline{\Omega_{\mu_0}}} |Du| \leqslant \max\{\widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2\}, \tag{3.16}$$

这里 $\widetilde{M}_1$ 是来源于内梯度估计的且关于 n, k, μ_0, M_0, L_1 的正常数；$\widetilde{M}_2$ 是关于 $n, k, , \mu_0, M_0, L_1, L_2$ 的正常数。

这个近边估计的辅助函数来源于 Lieberman [33], Jin-Li-Li [28] 和 Ma-Xu [1]。

3.1.1　定理 3.1.2的证明

证明. 我们考虑这个辅助函数

$$G(x) := \log |Dw|^2 + h(u) + g(d), \tag{3.17}$$

这里

$$w(x) := u(x) + \varphi(x, u)d(x); \tag{3.18}$$

$$h(u) := -\log(1 + 4M_0 - u); \tag{3.19}$$

以及

$$g(d) := \alpha_0 d, \tag{3.20}$$

α_0 为很大的正常数待定。
由 (3.19) 我们有

$$-\log(1 + 5M_0) \leqslant h \leqslant -\log(1 + 3M_0), \tag{3.21}$$

$$\frac{1}{1 + 5M_0} \leqslant h' \leqslant \frac{1}{1 + 3M_0}, \tag{3.22}$$

$$\frac{1}{(1 + 5M_0)^2} \leqslant h'' \leqslant \frac{1}{(1 + 3M_0)^2}。 \tag{3.23}$$

由 (3.18) 我们有

$$w_i = u_i + (\varphi_i + \varphi_z u_i)d + \varphi d_i。 \tag{3.24}$$

如果我们假设 $|Du| > 8nL_2$ 和 $\mu_0 \leqslant \frac{1}{2L_2}$，就可以从上式 (3.24) 得出

$$\frac{1}{4}|Du| \leqslant |Dw| \leqslant 2|Du|。 \tag{3.25}$$

我们假设 $G(x)$ 在 $x_0 \in \overline{\Omega}_{\mu_0}$ 达到最大值，这里 $0 < \mu_0 < \widetilde{\mu} \leqslant 1$ 为待定地充分小的常数。

我们现在把定理3.1.2的证明分成三种情形。

情形 I：如果 $G(x)$ 在 $x_0 \in \partial\Omega$ 达到最大，则我们将用 Hopf 引理证明 $G(x_0)$ 的上界。

情形 II：如果 $G(x)$ 在 $x_0 \in \Omega_{\mu_0}$ 达到最大，对于充分小的常数 $\mu_0 > 0$，那么我们将用最大值原理得到 $G(x_0)$ 的上界。

情形 III: 如果 $G(x)$ 在 $x_0 \in \partial\Omega_{\mu_0} \bigcap \Omega$ 达到最大，则我们由 Chou-Wang[8] 梯度内估计的定理得到 $|Du|(x_0)$ 的上界，从而进一步得到 $G(x_0)$ 的上界。
因为 $G(x) \leqslant G(x_0)$，这样我们就得到 G 的上界，进而得到 $|\nabla u|$ 在 $\overline{\Omega}_{\mu_0}$ 的近边估计。
以下所有计算在点 x_0 处算。我们习惯用 Einstein 求和约定，即所有重复上下指标从 1 到 n 求和。

3.1.2 情形 I: 边界估计

的最大值是在边界上达到，对于边界最大值点

$$0 \leqslant G_\nu = \frac{|Dw|_p^2 \nu^p}{|Dw|^2} - g' + h' u_\nu. \tag{3.26}$$

我们在边界上对 w 的梯度有分解如 $|Dw|^2 = |D'w|^2 + w_\nu^2$。因为边界上有 $w_\nu = u_\nu + D_\nu \varphi d - \varphi = 0$，所以我们有

$$\begin{aligned}
|Dw|_p^2 \nu^p =& C_p^{ij} w_i w_j \nu^p + 2C^{ij} w_{ip} w_j \nu^p + 2 w_\nu D_p w_\nu \nu^p, \\
=& C_p^{ij} w_i w_j \nu^p + 2C^{ij}(u_{ip} + D_{ip}\varphi d + D_i \varphi d_p + D_p \varphi d_i \\
& + \varphi d_{ip}) w_j \nu^p, \\
=& C_p^{ij} w_i w_j \nu^p + 2C^{ij} u_{i\nu} w_j - 2C^{ij} D_i \varphi w_j + 2C^{ij} D_p \varphi \nu^p d_i w_j \\
& + 2C^{ij} \varphi d_{ip} w_j \nu^p。
\end{aligned} \tag{3.27}$$

另一方面，对纽曼边界条件求切向导数得：

$$C^{pq} D_q(u_i \nu^i) = C^{pq} D_q \varphi,$$

及

$$C^{pq} u_{q\nu} + C^{pq} u_i D_q \nu^i = C^{pq} D_q \varphi。 \tag{3.28}$$

然后上式 (3.28) 和 w_p 作缩并，并且带入到 (3.27) 中，这样就可以把其中关于 u 的二阶导数项消去得到，

$$|Dw|_p^2 \nu^p \leqslant C(n, \Omega, L_2)|Dw|^2 + C(n, \Omega, L_2)|Dw|。 \tag{3.29}$$

这时我们选择 $\alpha_0 = 2C + \frac{L_2}{1+3M_0} + 1$，使得

$$\begin{aligned}
0 \leqslant G_\nu \leqslant & -\alpha_0 + C + \frac{C}{|Dw|} + h'|\varphi|_{C^0} \\
\leqslant & -C + \frac{C}{|Dw|}。
\end{aligned} \tag{3.30}$$

这样我们就有估计 $|Dw|(x_0) \leqslant 1$，和 $G(x_0) \leqslant -\log(1+3M_0) + 2C + \frac{L_2}{1+3M_0} + 1$。

3.1.3 情形 II: 近边估计

如果 G 在 Ω_{μ_0} 内达到最大值。则在最大值点的一阶导数为零，二阶导数的海森矩阵小于零：

$$0 = G_i = \frac{2\sum_{p=1}^n w_p w_{pi}}{|Dw|^2} + g' D_i d + h' u_i, \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
G_{ij} =& \frac{\sum_{p=1}^n 2 w_{pj} w_{pi} + 2 w_p w_{pji}}{|Dw|^2} - \frac{4\sum_{p,q=1}^n w_p w_{pi} w_q w_{qj}}{|Dw|^4} \\
& + g'' D_i d D_j d + g' D_{ij} d + h'' u_i u_j + h' u_{ij}。
\end{aligned} \tag{3.32}$$

因为我们假设了 u 是 k-允许解 $F^{ij}(D^2u) > 0$ 。在 G 的最大值点有

$$
\begin{aligned}
0 \geqslant F^{ij}G_{ij} =& \frac{2\sum_{p=1}^{n} F^{ij}w_{pi}w_{pj}}{|Dw|^2} + \frac{2\sum_{p=1}^{n} F^{ij}w_{p}w_{pij}}{|Dw|^2} - \frac{4\sum_{p,q=1}^{n} F^{ij}w_{p}w_{pi}w_{q}w_{qj}}{|Dw|^4} \\
&+ g''F^{ij}D_i d D_j d + g'F^{ij}D_{ij}d \\
&+ h''F^{ij}u_iu_j + h'F^{ij}u_{ij}。
\end{aligned} \tag{3.33}
$$

回忆 $w = u + \varphi d$, 它的二阶导数是

$$
\begin{aligned}
w_{ij} =& u_{ij} + (\varphi_{ij} + \varphi_{iz}u_j + \varphi_{zj}u_i + \varphi_{zz}u_iu_j + \varphi_z u_{ij})d \\
&+ (\varphi_i + \varphi_z u_i)d_j + \varphi_j d_i + \varphi_z u_j d_i + \varphi d_{ij}。
\end{aligned} \tag{3.34}
$$

所以 w_{ij} 和 u_{ij} 的关系式为

$$
w_{ij} \leqslant (1+\varphi_z d)u_{ij} + C(L_2,n)\mu_0|Du|^2 + C(L_2,n)|Du| + C(L_2,n), \tag{3.35}
$$

和

$$
w_{ij} \geqslant (1+\varphi_z d)u_{ij} - C(L_2,n)\mu_0|Du|^2 - C(L_2,n)|Du| - C(L_2,n)。 \tag{3.36}
$$

把 w_{ij} 再做一次微分，

$$
\begin{aligned}
w_{ijp} =& u_{ijp} + (\varphi_{ijp} + \varphi_{ijz}u_p + \varphi_{izp}u_j + \varphi_{izz}u_pu_j + \varphi_{iz}u_{jp} + \varphi_{zjp}u_i \\
&+ \varphi_{zzj}u_pu_i + \varphi_{zj}u_{ip} + \varphi_{zzp}u_iu_j + \varphi_{zzz}u_pu_iu_j + \varphi_{zz}u_{ip}u_j \\
&+ \varphi_{zz}u_iu_{jp} + \varphi_{zp}u_{ij} + \varphi_{zz}u_pu_{ij} + \varphi_z u_{ijp})d \\
&+ (\varphi_{ij} + \varphi_{iz}u_j + \varphi_{zj}u_i + \varphi_{zz}u_iu_j + \varphi_z u_{ij})d_p \\
&+ (\varphi_{ip} + \varphi_{iz}u_p + \varphi_{zp}u_i + \varphi_{zz}u_pu_i + \varphi_z u_{ip})d_j \\
&+ (\varphi_i + \varphi_z u_i)d_{jp} + \varphi_{jp}d_i + \varphi_{jz}u_pd_i + \varphi_j d_{ip} \\
&+ \varphi_{zp}u_jd_i + \varphi_{zz}u_pu_jd_i + \varphi_z u_{jp}d_i \\
&+ \varphi_z u_j d_{ip} + \varphi_p d_{ij} + \varphi_z u_p d_{ij} + \varphi d_{ijp}。
\end{aligned} \tag{3.37}
$$

现在我们在 x_0 选取坐标系为 $|\nabla w| = w_1$ 和 $(u_{ij})_{2\leqslant i,j\leqslant n}$ 对角。

　　则由 (3.24) 和 (3.31)，对于 $i=1$ 我们有

$$
u_1 = \frac{w_1 - \varphi_1 d - \varphi d_1}{1+\varphi_z d}, \tag{3.38}
$$

$$
w_{11} = -\frac{1}{2}(g'd_1 + h'u_1)w_1, \tag{3.39}
$$

对于 $2 \leqslant i \leqslant n$, 有

$$
u_i = \frac{-\varphi_i d - \varphi d_i}{1+\varphi_z d}, \tag{3.40}
$$

$$
w_{1i} = -\frac{1}{2}(g'd_i + h'u_i)w_1, \tag{3.41}
$$

这里我们假设 $\mu_0 \leqslant \mu_1 := \frac{1}{2L_2}$，使得 $\frac{3}{2} \geqslant 1 + \varphi_z d \geqslant \frac{1}{2}$.
假设 $|Du|(x_0) > M_1 := 64nL_2$，我们对 $i \geqslant 2$ 有，

$$
|u_i| \leqslant \frac{1}{16n}|Du|, \tag{3.42}
$$

和

$$u_1 \geqslant \frac{1}{2}|Du|。 \tag{3.43}$$

更有

$$|Du|(x_0) \geqslant M_2 := 32n(1+5M_0)\alpha_0 + 128C + (1+5M_0) + 1 \tag{3.44}$$

推出了

$$|g'd_i| \leqslant \frac{h'u_1}{16n}。 \tag{3.45}$$

这样从 (3.36) 和 (3.39) 我们得到了以下关键的估计

$$u_{11} \leqslant -\frac{1}{128}h'|Du|^2 < 0, \tag{3.46}$$

这里我们假设了 $\mu_0 \leqslant \mu_2 := \frac{1}{64C(1+5M_0)}$。
对于 $i \geqslant 2$，我们有

$$|w_{1i}| \leqslant \frac{h'|Dw|^2}{32n}, \tag{3.47}$$

以及

$$|u_{1i}| \leqslant (C\mu_0 + \frac{1}{1+3M_0})|Du|^2 + 2C|Du|. \tag{3.48}$$

我们继续计算 $F^{ij}G_{ij}$。用 (3.24)，(3.36) 和 (3.37) 推出

$$\begin{aligned} F^{ij}G_{ij} \geqslant & -C(n,k,L_2,\Omega)\mu_0\mathcal{F}|Du|^2 + \frac{2F^{ij}u_{ij1}(1-\varphi_z d)}{w_1} \\ & - \frac{4F^{ij}(\varphi_{iz}u_{j1}d + \varphi_{zz}u_{i1}u_j d + \varphi_z u_{i1}d_j)}{w_1} \\ & - \frac{2F^{ij}u_{ij}[(\varphi_{zp}+\varphi_{zz}u_p)d + \varphi_z d_p]}{w_1} - 2\frac{F^{ij}w_{1i}w_{1j}}{w_1^2} \\ & - C(n,k,L_2,\alpha_0,\Omega)\mathcal{F}|Du| + h''F^{11}u_1^2 + h'F^{ij}u_{ij}. \end{aligned} \tag{3.49}$$

方程 (1.1) 为 k- 齐次方程，微分它得

$$F^{ij}u_{ij} = kf, \tag{3.50}$$

$$F^{ij}u_{ij1} = f_1 + f_u u_1. \tag{3.51}$$

通过 (3.47)，(3.48)，(3.50) 和 (3.51) 有

$$\begin{aligned} F^{ij}G_{ij} \geqslant & -C(n,k,L_2,M_0,\Omega)\mu_0\mathcal{F}|Du|^2 + h''F^{11}u_1^2 - \frac{(h')^2\mathcal{F}|Dw|^2}{32} \\ & - C(n,k,L_2,L_1,M_0,\alpha_0,\Omega)\mathcal{F}|Du| - C(L_1,n,L_2). \end{aligned} \tag{3.52}$$

(3.9) 告诉我们如果 $\mu_0 \leqslant \mu_3 := \frac{1}{32C(1+5M_0)^2(n-k+1)}$ 小，我们有

$$\frac{h''F^{11}u_1^2}{8} \geqslant C\mu_0\mathcal{F}|Du|^2. \tag{3.53}$$

通过 h 的定义，我们有 $h'' = (h')^2$。这样 (3.9)

$$\frac{h''F^{11}u_1^2}{8} \geqslant \frac{(h')^2\mathcal{F}|Du|^2}{32}. \tag{3.54}$$

如果我们假设 $|Du|^2(x_0) \geqslant M_3 := 32(n-k+1)(1+5M_0)^2C$，我们得到

$$\frac{h''F^{11}u_1^2}{8} \geqslant C\mathcal{F}|Du|. \tag{3.55}$$

通过以上估计 (3.9)，(3.53)，(3.54) 和 (3.55)，我们有

$$0 \geqslant F^{ij}G_{ij} \geqslant \frac{h''\mathcal{F}|Du|^2}{32(n-k+1)} - C. \tag{3.56}$$

最后，引理3.1.1 中不等式 (3.10) 推出

$$0 \geqslant \frac{h''\mathcal{F}|Du|^2}{32(n-k+1)} - C > 0, \tag{3.57}$$

这其中假设了 $|Du|(x_0) \geqslant M_4 := \frac{32(n-k+1)(1+5M_0)^2C[(1+5M_0)128(n-k)]^{k-1}}{k^{k-1}C_{n-1}^{k-1}} + 1$.
不等式 (3.57) 推出矛盾。
总之，如果 $\mu_0 = \min\{\widetilde{\mu}, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$，我们有估计

$$|Du|(x_0) \leqslant \max\{M_1, M_2, M_3, M_4\}. \tag{3.58}$$

这样我们就得到了 $G(x_0)$ 的估计。
由于 h, g 是由上界的，梯度 u 的估计可从上述三种情形得到。

□

3.2 定理 1.0.1 中的 C^2 估计

我们现在来证明对严格凸区域以下方程的先验估计

$$\begin{cases} \sigma_k(D^2u) = f(x,u) & \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u_\nu = \varphi(x,u) & \partial\Omega。\end{cases} \tag{3.59}$$

我们有如下定理。

定理 3.2.1. 令 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的 C^4 严格凸区域，ν 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向。如果 $u \in C^4(\Omega) \cap C^3(\overline{\Omega})$ 为纽曼问题 *(3.59)* 的一个 k-允许解。其中 $f \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ 为正函数和 $\varphi \in C^3(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ 关于 z 递减。则有

$$\sup_{\overline{\Omega}} |D^2u| \leqslant C, \tag{3.60}$$

这里常数 C 只依赖于 n，k，$\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})}$，$\|f\|_{C^2(\overline{\Omega}\times[-M_0,M_0])}$，$\min f$，$\|\varphi\|_{C^3(\overline{\Omega}\times[-M_0,M_0])}$ 和 Ω 严格凸性，其中 $M_0 = \sup_{\Omega}|u|$。

在接下来的证明中，我们首先类似于 Lions-Trudinger-Urbas[37] 得到边界切法估计（见引理 3.2.1）。然后结合引理 3.2.4 和引理 3.2.5，我们在引理 3.2.6中得到了方程 (3.59) 的严格凸解的边界双法向估计。最后由引理3.2.1，引理 3.2.2 和引理 3.2.6，我们完成了定理 1.0.1中方程 (3.59) 的严格凸解的 C^2 估计。

3.2.1　边界切法估计

对于纽曼边界问题很容易得到边界切法估计。

引理 3.2.1. 记 τ 为边界点的切方向，ν 为边界的外法向。如果 $u \in C^4(\Omega) \cap C^3(\overline{\Omega})$ 为纽曼问题的 k-允许解

$$\begin{cases} \sigma_k(D^2u) &= f(x,u) \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u_\nu &= \varphi(x,u) \quad \partial\Omega。 \end{cases} \tag{3.61}$$

这里 $f \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ 为正函数，$\varphi \in C^3(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$。则我们有

$$|D_{\tau\nu}u(y)| \leqslant C, \tag{3.62}$$

这里常数 C 只和 $\|u\|_{C^1}$，$\|\varphi\|_{C^1}$ 以及 $\|\partial\Omega\|_{C^2}$ 有关。

证明. 对边界条件求切向导数

$$u_\nu = \varphi, \tag{3.63}$$

像在 (3.28) 一样有，

$$C^{ij}u_{j\nu} + C^{ij}u_l D_j \nu^l = C^{ij}D_j\varphi。 \tag{3.64}$$

和 τ^i 做缩并有

$$\tau^i u_{li}\nu^l + u_l D_i \nu^l \tau^i = D_i\varphi\tau^i。 \tag{3.65}$$

所以

$$|u_{\tau\nu}| = |D_i\varphi\tau^i - u_l D_i \nu^l \tau^i| \leqslant C。 \tag{3.66}$$

□

3.2.2　把 C^2 估计约化成边界法法估计

所以为了得到定理 3.2.1，我们需要证明当 $\varphi \in C^3(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ 关于 z 递减和 Ω 是 C^4 严格凸区域时证明如下引理。

引理 3.2.2. 让 $M = \sup\limits_{\partial\Omega} |u_{\nu\nu}|$。条件同 *3.2.1*，如果 u 满足 *(3.59)*。则

$$\sup_{\overline{\Omega}, \xi \in \mathbb{S}^{n-1}} u_{\xi\xi} \leqslant C_0(1+M), \tag{3.67}$$

这里 C_0 依赖于 $\|u\|_{C^1}$，$\|\varphi\|_{C^3}$，$\|\partial\Omega\|_{C^4}$，$\|f\|_{C^2}$，$\min f$，和 $\partial\Omega$ 的严格凸性。

证明. 考虑函数

$$v(x,\xi) := u_{\xi\xi} - v'(x,\xi) + K_1|x|^2 + K_2|Du|^2, \tag{3.68}$$

其中 $v'(x,\xi) := 2(\xi\cdot\nu)\xi' \cdot (D\varphi - u_l D\nu^l) = a^l u_l + b$，$\xi' = \xi - (\xi\cdot\nu)\nu$，$a^l = 2(\xi\cdot\nu)(\xi'^l\varphi_z - \xi'^i D_i \nu_l)$，和 $b = 2(\xi\cdot\nu)\xi'^l\varphi_{x_l}$。我们计算如下

$$v_i = u_{\xi\xi i} - D_i a^l u_l - a^l u_{li} - D_i b + 2K_1 x_i + 2\sum_l K_2 u_l u_{li}, \tag{3.69}$$

和

$$\begin{aligned} v_{ij} = \;& u_{\xi\xi ij} - D_{ij}a^l u_l - D_i a^l u_{lj} - D_j a^l u_{li} - a^l u_{lij} - D_{ij}b \\ & +2K_1\delta_{ij} + 2K_2\sum_l u_{li}u_{lj} + 2K_2\sum_l u_l u_{lij}。 \end{aligned} \tag{3.70}$$

对方程求一次导 (2.1) 有，

$$\widetilde{F}^{ij}u_{ijl} = \widetilde{f}_{x_l} + \widetilde{f}_z u_l。 \tag{3.71}$$

由 $\sigma_k^{\frac{1}{k}}$ 的凹形

$$\widetilde{F}^{ij}u_{ij\xi\xi} \geqslant \widetilde{F}^{ij}u_{ij\xi\xi} + \widetilde{F}^{ij,pq}u_{ij\xi}u_{pq\xi} = \widetilde{f}_{x_\xi x_\xi} + 2\widetilde{f}_{x_\xi z}u_\xi + \widetilde{f}_z u_{\xi\xi}。 \tag{3.72}$$

然后用 $\widetilde{F}^{ij}$ 和 (3.70) 作缩并，用 (3.72) 和 (3.71),

$$\begin{aligned} \widetilde{F}^{ij}v_{ij} = \;& \widetilde{F}^{ij}u_{\xi\xi ij} - \widetilde{F}^{ij}D_{ij}a^l u_l - 2\widetilde{F}^{ij}u_{lj}D_i a^l - \widetilde{F}^{ij}u_{lij}a^l \\ & -\widetilde{F}^{ij}D_{ij}b + 2K_1\sum_i \widetilde{F}^{ii} + 2K_2\sum_l \widetilde{F}^{ij}u_{lj}u_{li} + 2K_2\sum_{ijl}\widetilde{F}^{ij}u_{lij}u_l \\ \geqslant \;& -C_1(\|u\|_{C^1}, \|\varphi\|_{C^3}, \|\partial\Omega\|_{C^4}, \|f\|_{C^2}, \min f, K_2)(\sum_i \widetilde{F}^{ii} + 1) \\ & +\widetilde{f}_z u_{\xi\xi} + 2K_1\sum_i \widetilde{F}^{ii} + 2K_2\sum_l \widetilde{F}^{ij}u_{li}u_{lj} - 2\widetilde{F}^{ij}u_{lj}D_i a^l。 \end{aligned} \tag{3.73}$$

在内部最大值点，我们假设 (u_{ij}) 是对角的以及 $u_{11} \geqslant u_{22} \geqslant \cdots \geqslant u_{nn}$。这样通过 (2.9)

$$\begin{aligned} 2K_2\sum_i \widetilde{F}^{ii}u_{ii}^2 &\geqslant 2K_2\sigma_k^{\frac{1}{k}-1}F^{11}u_{11}^2 \\ &\geqslant 2K_2\frac{\sigma_k^{\frac{1}{k}}}{n}u_{11} \\ &\geqslant 2K_2\frac{\sigma_k^{\frac{1}{k}}}{n}u_{\xi\xi}。 \end{aligned} \tag{3.74}$$

这里我们可以假设 $u_{\xi\xi} \geqslant 0$，否则就有估计 (3.67) 了。如果选取 $K_2 \geqslant \frac{n|\widetilde{f}_z|}{2\min\widetilde{f}} + 2$，

$$\begin{aligned} \sum_{ij}\widetilde{F}^{ij}v_{ij} \geqslant \;& 2\sum_i \widetilde{F}^{ii}u_{ii}^2 - 2C_2(\|u\|_{C^1}, \|\varphi\|_{C^3}, \|\partial\Omega\|_{C^3})\sum_i \widetilde{F}^{ii}|u_{ii}| \\ & +2K_1\sum_i \widetilde{F}^{ii} - C_1(\sum_i \widetilde{F}^{ii} + 1) \\ \geqslant \;& 2\sum_i \widetilde{F}^{ii}(|u_{ii}| - \tfrac{C_2}{2})^2 + (2K_1 - \tfrac{C_2^2}{2} - C_1)\sum_i \widetilde{F}^{ii} - C_1。 \end{aligned} \tag{3.75}$$

现在如果选 K_1 大，使得 $K_1 \geqslant \frac{C_2^2}{2} + C_1$ 和 $K_1(C_n^k)^{\frac{1}{k}} > C_1$，通过 (2.8) 我们有

$$\sum_{ij}\widetilde{F}^{ij}v_{ij} > 0。 \tag{3.76}$$

这样 $v(x,\xi)$ 在 $\partial\Omega$ 达到最大。

Case a: ξ **为切向。**

我们对边界条件求两次切向导数然后和 $\xi_i\xi_p$ 作乘积，就得到

$$\begin{aligned}
u_{\xi\xi\nu} &= -2\xi_p\xi_i u_{li}D_p\nu^l - u_l\xi_p D_{ip}\nu^l\xi_i + u_{\nu\nu}\sum_i \xi_p D_p\nu^i\xi_i \\
&\quad -\sum_i \xi_p\xi_i\nu^j D_p\nu^i D_j\varphi + \varphi_z u_{\xi\xi} + \xi_p\xi_i\varphi_{ip} \\
&\quad +\varphi_{zz}u_\xi^2 + 2u_\xi\xi_i\varphi_{zi}。
\end{aligned} \tag{3.77}$$

这样我们有

$$\begin{aligned}
u_{\xi\xi\nu} &\leqslant -2\xi_p\xi_i u_{li}D_p\nu^l + \varphi_z u_{\xi\xi} \\
&\quad +C(\|u\|_{C^1},\|\partial\Omega\|_{C^3},\|\varphi\|_{C^2}) + C(\|\partial\Omega\|_{C^2})|u_{\nu\nu}| \\
&\leqslant -2\xi_p\xi_i u_{li}D_p\nu^l + C + C|u_{\nu\nu}|。
\end{aligned} \tag{3.78}$$

在第二个不等式中我们用了假设 φ 关于 z 递减。

如果假设 $\xi = e_1$，容易得到 $u_{1i}(x_0)$ 对 $i \neq 1$ 的估计。由于边界时严格凸的，$D_1\nu_1 \geqslant \kappa > 0$ 我们有

$$u_{\xi\xi\nu} \leqslant -2\kappa u_{\xi\xi} + C(1+|u_{\nu\nu}|)。 \tag{3.79}$$

注意这里是我们在二阶导估计中唯一用严格凸性的地方。

另一方面，我们从 Hopf 引理，(3.62) 和 $\sum\limits_i a^i\nu^i = 0$ 知道，

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant v_\nu \\
&= u_{\xi\xi\nu} - D_\nu a^l u_l - a^l u_{l\nu} - b_\nu + 2K_1(x\cdot\nu) + 2K_2\sum_l u_l u_{l\nu} \\
&\leqslant u_{\xi\xi\nu} + C(\|u\|_{C^1},\|\partial\Omega\|_{C^2},\|\varphi\|_{C^2},K_1,K_2) + 2K_2\varphi u_{\nu\nu}。
\end{aligned} \tag{3.80}$$

结合 (3.79) 和 (3.80)，因此推得

$$u_{\xi\xi}(x_0) \leqslant C(1+|u_{\nu\nu}|(x_0))。 \tag{3.81}$$

Case b: ξ **为非切向。**

记 $\xi = \alpha\tau + \beta\nu$，这里 $\alpha = \xi\cdot\tau, |\tau| = 1, \tau\cdot\nu = 0, \beta = \xi\cdot\nu \neq 0$ 和 $\alpha^2+\beta^2 = 1$。

$$\begin{aligned}
u_{\xi\xi} &= \alpha^2 u_{\tau\tau} + \beta^2 u_{\nu\nu} + 2\alpha\beta u_{\tau\nu} \\
&= \alpha^2 u_{\tau\tau} + \beta^2 u_{\nu\nu} + 2\alpha\beta(D_i\varphi\tau^i - u_l D_i\nu^l\tau^i)。
\end{aligned} \tag{3.82}$$

由 $v(x,\xi)$ 定义，我们有

$$\begin{aligned}
v(x_0,\xi) &= \alpha^2 v(x_0,\tau) + \beta^2 v(x_0,\nu) \\
&\leqslant \alpha^2 v(x_0,\xi) + \beta^2 v(x_0,\nu)。
\end{aligned} \tag{3.83}$$

因此

$$v(x_0,\xi) \leqslant v(x_0,\nu)。 \tag{3.84}$$

这样我们就得到了估计

$$u_{\xi\xi}(x_0) \leqslant C_0(\|u\|_{C^1},\|\varphi\|_{C^3},\|\partial\Omega\|_{C^4},\|f\|_{C^2},\min f,\kappa)(1+|u_{\nu\nu}(x_0)|), \tag{3.85}$$

所以同样把问题归结为证明双法向的估计。 □

3.2.3 边界双法向估计

在这一小节中，我们得出边界的双法向估计。这也是海森方程纽曼边界问题里面最难的部分。由于纽曼边界条件不能对边界条件求法向导数很难直接得到双法向估计。处理边界问题一般都是用闸函数的办法。即找一个函数（例如 A）在边上等于要估计的函数（例如 B），内部 A 比 B 大或者小。然后 B 的法向导数就可以由 A 的法向导数控制住，从而得到 B 的法向导数估计。具体做法是我们构造 A 使得其和 B 在边上相等，然后去证明我们找出的函数确实是 B 的闸函数，这主要是通过方程用极值原理证明的。对于海森方程的狄利克雷边界问题是由 Caffarelli-Nirenberg-Spruck [3]（也可参见 [2]，[52]）得到的。他们在严格 $k-1$ 凸的有界光滑区域上证明了允许解的存在性。而对比于 Monge-Ampere 方程的纽曼问题，是因为 Monge-Ampere 算子的特殊性其边界双法估计可以直接得出。在这一小节我们也可以在严格 $k-1$ 凸的情形下得到定理 1.0.1里 (3.59) 的允许解的双法向估计。

让我们先给出一些记号。

$$h(x) = -d(x) + K_3 d^2(x), \tag{3.86}$$

K_3 常数待定。

由经典椭圆方程的书 [13] 14.6 节，存在小常数 μ 依赖于 Ω 使得 h 在以下区域为 C^4 函数

$$\Omega_\mu := \{x \in \overline{\Omega} : 0 < d(x) < \mu\}。 \tag{3.87}$$

而且 h 在 Ω_μ 中满足：

$$-\mu + K_3\mu^2 \leqslant h \leqslant 0。 \tag{3.88}$$

当然对边界外法向

$$\frac{Dh}{|Dh|} = \nu。 \tag{3.89}$$

引理 3.2.3. *如果 Ω 为 C^4 严格 $k-1$-凸区域。$u \in C^4(\Omega) \cap C^3(\overline{\Omega})$ 为 (3.59) 问题的 k 允许解。在方程中 $f \in C^2(\overline{\Omega})$ 为正函数以及 $\varphi \in C^3(\mathbb{R})$ 关于 z 递减。存在 $\delta > 0$ 小，K_3 大的常数依赖于 $\partial\Omega$ 的曲率，n，k，$\min f$。如果我们选取 $\mu \leqslant \frac{1}{4K_3}$ 有，*

$$F^{ij}h_{ij} \geqslant \delta(\mathcal{F}+1)。 \tag{3.90}$$

还有在边界 $\partial\Omega$ 上 $h=0$，和在 $\partial\Omega_\mu/\partial\Omega$ 上 $h \leqslant -\frac{\mu}{2} < 0$。还有

$$2 \geqslant |Dh| \geqslant \frac{1}{2}. \tag{3.91}$$

证明. 对 $x_0 \in \Omega_\mu$，存在 $y_0 \in \partial\Omega$ 使得 $|x_0 - y_0| = d(x_0)$。则在主坐标系下我们有（参见 [13] section 14.6），

$$[-D^2 d(x_0)] = diag[\frac{\kappa_1(y_0)}{1-\kappa_1(y_0)d(x_0)}, \cdots, \frac{\kappa_{n-1}(y_0)}{1-\kappa_{n-1}(y_0)d(x_0)}, 0], \tag{3.92}$$

和
$$-Dd(x_0)=\nu(y_0)=(0,0,\cdots,1)。\tag{3.93}$$
因为 Ω 为严格 $k-1$ - 凸的即 $\sigma_{k-1}(\kappa)>2b_0>0$，存在依赖于 κ，k，n 的小常数我们有
$$\sigma_{k-1}(\kappa-8\delta)>b_0。\tag{3.94}$$
在主坐标系中只要让 K_3 大和 $\mu\leqslant\frac{1}{4K_3}$，很容易验证 $h-\delta|x|^2$ 为 k-允许的。由 $\widetilde{F}$ 的凹性推出，只要让 K_3 充分大以及 $f>0$
$$\begin{aligned}\widetilde{F}^{ij}(h-\delta|x|^2)_{ij}&\geqslant\widetilde{F}[D^2(u+h-\delta|x|^2)]-\widetilde{F}[D^2u]\\&\geqslant\widetilde{F}[D^2(h-\delta|x|^2)]\\&\geqslant b_0^{\frac{1}{k}}K_3^{\frac{1}{k}}-C(\kappa,k,n,\delta)\\&\geqslant\frac{1}{k}\sigma_k^{\frac{1}{k}-1}\delta。\end{aligned}\tag{3.95}$$
这样我们得到
$$F^{ij}(h-\delta|x|^2+\delta|x|^2)_{ij}\geqslant\delta(\mathcal{F}+1)。\tag{3.96}$$
在 $\partial\Omega$ 上，$h=0$ 显然。
在 $\partial\Omega_\mu/\partial\Omega$ 上，我们有
$$\begin{aligned}h&=-\mu+K_3\mu^2\\&\leqslant-\frac{\mu}{2}。\end{aligned}\tag{3.97}$$
如果我们取 $\mu\leqslant\frac{1}{4K_3}$，很容易看出
$$2\geqslant|Dh|\geqslant\frac{1}{2}。\tag{3.98}$$
□

为了得到双法估计我们构造一个关于 u_ν 的闸函数。受 [37]，[50]，[22] 和 [57] 文章的启发，我们构造了以下新的辅助函数。在 $\overline{\Omega}_\mu$ 中记
$$g(x):=1-\beta h,\tag{3.99}$$
$$G(x):=(A+\sigma M)h(x),\tag{3.100}$$
$$\psi(x):=|Dh|(x)\varphi(u),\tag{3.101}$$
这里 σ,β,μ,A 都是待定正常数，$M=\sup u_{\nu\nu}$。
我们考虑这个下闸函数，
$$P(x):=g(x)(Du\cdot Dh(x)-\psi(x))-G(x)。\tag{3.102}$$
我们想得到如下引理

引理 3.2.4. *在定理 1.0.1同样条件下，固定 $\sigma=\frac{1}{2}$，对所有 $x\in\overline{\Omega}_\mu$ 如果依次选取 β 大，μ 小，A 大，我们有*
$$P(x)\geqslant0。\tag{3.103}$$

证明. 我们用极值原理证明这个引理。首先假设函数在 Ω_μ 内部达到最小值点 x_0。我们对 P 求两次导数

$$P_i = g_i(\sum_l u_l h_l - \psi) + g(\sum_l u_{li} h_l + \sum_l u_l h_{li} - \psi_i) - G_i, \tag{3.104}$$

和

$$\begin{aligned} P_{ij} &= g_{ij}(\sum_l u_l h_l - \psi) + g_i(\sum_l u_{lj} h_l + \sum_l u_l h_{lj} - \psi_j) \\ &\quad + g_j(\sum_l u_{li} h_l + \sum_l u_l h_{li} - \psi_i) - G_{ij} \qquad (3.105) \\ &\quad + g(\sum_l u_{lij} h_l + \sum_l u_{li} h_{lj} + \sum_l u_{lj} h_{li} + \sum_l u_l h_{lij} - \psi_{ij})。\qquad (3.106) \end{aligned}$$

在最小值点 x_0，我们依旧设 $(u_{ij}(x_0))$ 对角。用 F^{ij} 和 (3.106) 做缩并然后运用引理 3.2.3，我们得到

$$\begin{aligned} F^{ij}P_{ij} &= F^{ij}g_{ij}(\sum_l u_l h_l - \psi) + 2g_i F^{ij}(\sum_l u_{lj} h_l + \sum_l u_l h_{lj} - \psi_j) \\ &\quad + gF^{ij}(\sum_l u_{lij} h_l + 2\sum_l u_{li} h_{lj} + \sum_l u_l h_{lij} - \psi_{ij}) \\ &\quad - F^{ij}G_{ij} \\ &\leqslant \beta C_3(\|u\|_{C^1}, \|\partial\Omega\|_{C^3}, \|\varphi\|_{C^2}, \|f\|_{C^1})(\mathcal{F}+1) \qquad (3.107) \\ &\quad - (A+\sigma M)\delta(\mathcal{F}+1) - 2\beta F^{ii} u_{ii} h_i^2 + 2F^{ii} u_{ii} h_{ii} g。 \end{aligned}$$

其中不等式中我们用了

$$|\beta h| \leqslant \beta\mu \leqslant \frac{1}{2}, \tag{3.108}$$

进而推得

$$1 \leqslant g \leqslant \frac{3}{2}。 \tag{3.109}$$

在 (3.108) 中我们选取 $\mu \leqslant \frac{1}{2\beta}$ 。
然后我们把指标 $1 \leqslant i \leqslant n$ 分了两类。
(i) 如果

$$|\beta h_i^2| \leqslant \frac{\delta}{2}, \tag{3.110}$$

我们就说 $i \in \mathbf{B}$。
选取 $\beta \geqslant 2n\delta$，从而得到

$$|h_i^2| \leqslant \frac{1}{4n}。 \tag{3.111}$$

(ii) 如果

$$|\beta h_i^2| \geqslant \frac{\delta}{2}, \tag{3.112}$$

我们记 $i \in \mathbf{G}$.
对任意的 $i \in \mathbf{G}$，用 $P_i(x_0) = 0$ 得到

$$u_{ii} = \frac{A+\sigma M}{g} + \frac{\beta(\sum_l u_l h_l - \psi)}{g} - \frac{\sum_l u_l h_{li}}{h_i} + \frac{\psi_i}{h_i}。 \tag{3.113}$$

因为 $|h_i|^2 > \frac{\delta}{2\beta}$ 和 (3.109)，我们有

$$|\frac{\beta(\sum_l u_l h_l - \psi)}{g} - \frac{\sum_l u_l h_{li}}{h_i} + \frac{\psi_i}{h_i}| \leqslant \beta C_4(\delta, \|u\|_{C^1}, \|\partial\Omega\|_{C^2}, \|\varphi\|_{C^1})。 \tag{3.114}$$

通过选取 A 大让 $\frac{A}{3} \geqslant \beta C_4$ 推得

$$\frac{4A}{3} + \sigma M \geqslant u_{ii} \geqslant \frac{A}{3} + \frac{2\sigma M}{3}, \qquad \text{for} \qquad i \in \mathbf{G}。 \tag{3.115}$$

由于 $2 \geqslant |Dh| \geqslant \frac{1}{2}$ 和 (3.111)，存在 $i_0 \in \mathbf{G}$，不妨设为 $i_0 = 1$ 使得

$$h_1^2 \geqslant \frac{1}{4n}。 \tag{3.116}$$

然后我们继续计算 P，

$$\begin{aligned} F^{ij}P_{ij} \quad \leqslant \quad & [\beta C_3 - (A + \sigma M)\delta](\mathcal{F} + 1) \\ & -2\beta \sum_{i\in\mathbf{G}} F^{ii}u_{ii}h_i^2 - 2\beta \sum_{i\in\mathbf{B}} F^{ii}u_{ii}h_i^2 \\ & +c_1 \sum_{u_{ii}\geqslant 0} F^{ii}|u_{ii}| + \frac{c_1}{2} \sum_{u_{ii}<0} F^{ii}|u_{ii}|, \end{aligned} \tag{3.117}$$

这里 $c_1 > 2\delta$ 为依赖 $\|\partial\Omega\|_{C^2}$ 的正常数。
因为

$$-2\beta \sum_{i\in\mathbf{G}} F^{ii}u_{ii}h_i^2 \leqslant -2\beta F^{11}u_{11}h_1^2 \leqslant -\frac{\beta}{2n}F^{11}u_{11}, \tag{3.118}$$

和

$$-2\beta \sum_{i\in\mathbf{B}} F^{ii}u_{ii}h_i^2 \leqslant -2\beta \sum_{i\in\mathbf{B},u_{ii}<0} F^{ii}u_{ii}h_i^2 \leqslant -\delta \sum_{u_{ii}<0} F^{ii}u_{ii}, \tag{3.119}$$

推得

$$-2\beta \sum_{i\in\mathbf{G}} F^{ii}u_{ii}h_i^2 - 2\beta \sum_{i\in\mathbf{B}} F^{ii}u_{ii}h_i^2 \leqslant -\frac{\beta}{2n}F^{11}u_{11} - \delta \sum_{u_{ii}<0} F^{ii}u_{ii}。 \tag{3.120}$$

从 (3.118) 和 (3.120) 得出

$$\begin{aligned} F^{ij}P_{ij} \quad \leqslant \quad & [\beta C_3 - (A + \sigma M)\delta](\mathcal{F} + 1) - \frac{\beta}{2n}F^{11}u_{11} \\ & +c_1 \sum_{u_{ii}\geqslant 0} F^{ii}|u_{ii}| + c_1 \sum_{u_{ii}<0} F^{ii}|u_{ii}|。 \end{aligned} \tag{3.121}$$

我们来分情形仔细分析以上几项。不妨设 $u_{22} \geqslant \cdots \geqslant u_{nn}$。

Case 1: $u_{ii} \geqslant 0, \forall\, i.$

这是最简单的情形。用方程得到

$$kf = \sum_{u_{ii}\geqslant 0} F^{ii}|u_{ii}|。 \tag{3.122}$$

如果选取 $A \geqslant \frac{(C_3\beta+c_1 k\max f)}{\delta}$，

$$F^{ij}P_{ij} < 0。\tag{3.123}$$

在一下的情形中我们假设 $u_{nn} < 0$。

Case 2: $\frac{\delta}{4c_1}u_{11} \geqslant |u_{nn}|$.
由方程有

$$kf = \sum_{u_{ii}\geqslant 0} F^{ii}|u_{ii}| - \sum_{u_{ii}<0} F^{ii}|u_{ii}|.\tag{3.124}$$

(3.121) 中的各项变成

$$\begin{aligned}
& c_1\sum_{u_{ii}\geqslant 0} F^{ii}|u_{ii}| + c_1\sum_{u_{ii}<0} F^{ii}|u_{ii}| \\
= \ & c_1(kf + 2\sum_{u_{ii}<0} F^{ii}|u_{ii}|) \\
\leqslant \ & c_1 kf + 2c_1\mathcal{F}|u_{nn}| \\
\leqslant \ & c_1 kf + \frac{\delta}{2}\mathcal{F}u_{11} \\
\leqslant \ & c_1 kf + \mathcal{F}\delta(\frac{2A}{3} + \frac{\sigma M}{2})。
\end{aligned}\tag{3.125}$$

这么为得到结果 (3.123) 选择在方程 (3.121) 中 $A \geqslant \frac{3(\beta C_3+c_1 k\max f)}{\delta}$ 。
在以下的各情形中我们假设

$$u_{nn} < 0, |u_{nn}| \geqslant \frac{\delta}{4c_1}u_{11}。\tag{3.126}$$

我们记 $\lambda := (u_{11},\cdots,u_{nn})$ 和选择 $A \geqslant 2\sigma$。

Case 3: $\sigma_{k-1}(\lambda|1) \geqslant \delta_1(-u_{nn})\sigma_{k-2}(\lambda|1n)$，这里 δ_1 为待定小常数。
如果 $u_{11} \geqslant u_{22}$，我们从 (2.9) 知道，

$$u_{11}\sigma_{k-2}(\lambda|1n) \geqslant \frac{k-1}{n-1}\sigma_{k-1}(\lambda|n)。\tag{3.127}$$

否则 $u_{11} \leqslant u_{22}$，从式子 (3.115), (3.67) 和 (2.9) 有

$$\begin{aligned}
u_{11}\sigma_{k-2}(\lambda|1n) &\geqslant (\frac{A}{3} + \frac{2\sigma M}{3})\sigma_{k-2}(\lambda|2n) \\
&\geqslant \frac{2\sigma}{3C_0}u_{22}\sigma_{k-2}(\lambda|2n) \\
&\geqslant \frac{k-1}{n-1}\frac{2\sigma}{3C_0}\sigma_{k-1}(\lambda|n)。
\end{aligned}\tag{3.128}$$

所以由我们的假设得

$$\begin{aligned}
F^{11} &= \sigma_{k-1}(\lambda|1) \\
&\geqslant \delta_1(-u_{nn})\sigma_{k-2}(\lambda|1n) \\
&\geqslant \delta_1\frac{\delta}{4c_1}u_{11}\sigma_{k-2}(\lambda|1n)。
\end{aligned}\tag{3.129}$$

注意我们在上面第二个不等号中只用了假设 $|u_{nn}| \geqslant \frac{\delta}{4c_1}u_{11}$ ，这点我们在下个情形还会用到。
用 (2.5)，以及假设 $u_{nn} < 0$，我们从 (2.3) 有

$$\frac{1}{n-k+1}\mathcal{F} \leqslant F^{nn}。\tag{3.130}$$

假设 $C_0 > 1$ 使得 $\sigma = \frac{1}{2} \leqslant \frac{3C_0}{2}$，则我们把 (3.127) 和 (3.128) 带入 (3.129)，并且用 (3.130) 得，

$$\begin{aligned} F^{11} &\geqslant \delta_1\frac{\delta}{4c_1}u_{11}\sigma_{k-2}(\lambda|1n) \\ &\geqslant \delta_1\frac{\delta}{4c_1}\frac{k-1}{n-1}\frac{2\sigma}{3C_0}\sigma_{k-1}(\lambda|n) \\ &\geqslant \frac{k-1}{(n-1)(n-k+1)}\frac{\delta\delta_1\sigma}{6c_1C_0}\mathcal{F}。\end{aligned}\tag{3.131}$$

用 (3.67)，和选取 $\beta \geqslant \frac{18n(n-k+1)(n-1)c_1^2C_0^2}{(k-1)\delta\delta_1\sigma^2}$ 使得，

$$\begin{aligned} &c_1\sum_{u_{ii}\geqslant 0}F^{ii}|u_{ii}| + c_1\sum_{u_{ii}<0}F^{ii}|u_{ii}| - \frac{\beta}{2n}F^{11}u_{11} \\ \leqslant\ & [-\frac{(k-1)\beta\delta\delta_1\sigma}{12n(n-1)(n-k+1)c_1C_0}(\frac{A}{3}+\frac{2\sigma M}{3}) \\ & +c_1C_0(M+1)]\mathcal{F} \\ \leqslant\ & [-(\frac{(k-1)\beta\delta\delta_1\sigma^2}{18n(n-1)(n-k+1)c_1C_0} - c_1C_0)M \\ & -(\frac{A\beta\delta(k-1)\delta_1\sigma}{36n(n-k+1)(n-1)c_1C_0} - c_1C_0)]\mathcal{F} \\ \leqslant\ & 0。\end{aligned}\tag{3.132}$$

所以在式子 (3.121) 中选 $A > \frac{C_3\beta + c_1 k \max f}{\delta} + 2\sigma$ 再用 (3.132)，我们就得到了估计 (3.123)。

Case 4: $0 \leqslant \sigma_{k-1}(\lambda|1) \leqslant \delta_1(-u_{nn})\sigma_{k-2}(\lambda|1n)$.
由假设当 $i \geqslant 2$ 时，

$$\sigma_{k-1}(\lambda|1) - u_{ii}\sigma_{k-2}(\lambda|1i) = \sigma_{k-1}(\lambda|1i)。\tag{3.133}$$

我们按以下计算，

$$\begin{aligned} k\sigma_k(\lambda|1) &= \sum_{i=2}^{n}u_{ii}\sigma_{k-1}(\lambda|1i) \\ &\leqslant \sum_{u_{ii}\geqslant 0, i\neq 1}u_{ii}[\delta_1(-u_{nn}\sigma_{k-2}(\lambda|1n)) - u_{ii}\sigma_{k-2}(\lambda|1i)] \\ &\quad + \sum_{u_{ii}<0, i\neq 1}u_{ii}(-u_{ii}\sigma_{k-2}(\lambda|1i)) \\ &\leqslant -u_{nn}\sum_{u_{ii}\geqslant 0, i\neq 1}\delta_1u_{ii}\sigma_{k-2}(\lambda|1n) - u_{nn}^2\sigma_{k-2}(\lambda|1n) \\ &\leqslant -n\delta_1u_{nn}u_{22}\sigma_{k-2}(\lambda|1n) - u_{nn}^2\sigma_{k-2}(\lambda|1n)。\end{aligned}\tag{3.134}$$

用 (3.67) 和 (3.115)，我们接着有

$$\begin{aligned} k\sigma_k(\lambda|1) &\leqslant -n\delta_1 C_0(M+1)u_{nn}\sigma_{k-2}(\lambda|1n) - u_{nn}^2\sigma_{k-2}(\lambda|1n) \\ &\leqslant -n\delta_1 C_0\frac{3}{2\sigma}u_{11}u_{nn}\sigma_{k-2}(\lambda|1n) - u_{nn}^2\sigma_{k-2}(\lambda|1n) \\ &\leqslant \frac{6c_1 n\delta_1 C_0}{\delta\sigma}u_{nn}^2\sigma_{k-2}(\lambda|1n) - u_{nn}^2\sigma_{k-2}(\lambda|1n)。 \end{aligned} \tag{3.135}$$

现在我们令 $\delta_1 = \frac{\delta\sigma}{12c_1 nC_0}$。就像 (3.129) 和 (3.131) 中计算一样，

$$\begin{aligned} k\sigma_k(\lambda|1) &\leqslant -\frac{u_{nn}^2}{2}\sigma_{k-2}(\lambda|1n) \\ &\leqslant u_{nn}\frac{(k-1)\sigma\delta}{12(n-1)(n-k+1)c_1C_0}\mathcal{F} \\ &\leqslant -\frac{(k-1)\sigma\delta^2}{48(n-1)(n-k+1)c_1^2C_0}u_{11}\mathcal{F}。 \end{aligned} \tag{3.136}$$

把 (3.115) 带入到以上不等式，我们有

$$\begin{aligned} -\frac{\beta}{2n}F^{11}u_{11} &\leqslant -\frac{\beta}{2n}(kf - \sigma_k(\lambda|1)) \qquad (3.137)\\ &\leqslant -\frac{\beta}{2n}kf - \frac{(k-1)\beta\sigma\delta^2}{96kn(n-1)(n-k+1)c_1^2C_0}(\frac{A}{3}+\frac{2\sigma M}{3})\mathcal{F}。 \end{aligned}$$

如果选 $\beta \geqslant \frac{144kn(n-1)(n-k+1)c_1^3C_0^2}{(k-1)\sigma^2\delta^2}$，像 (3.132) 类似得到

$$-\frac{\beta}{2n}F^{11}u_{11} + c_1\sum_{u_{ii}\geqslant 0}F^{ii}|u_{ii}| + c_1\sum_{u_{ii}<0}F^{ii}|u_{ii}| \leqslant -\frac{\beta}{2n}kf。 \tag{3.138}$$

最后，选 $A \geqslant \frac{3(C_3\beta + c_1 k\max f + \beta k\max f)}{\delta}$ 就得到了不等式 (3.123)。

那么函数 P 在 Ω_μ 的边界上达到最小值。
在 $\partial\Omega$，容易看出

$$P = 0。 \tag{3.139}$$

在另外一边界 $\partial\Omega_\mu/\partial\Omega$ 有，

$$P \geqslant -C_5(k, \max f, \|u\|_{C^1}, \|\varphi\|_{C^0}) + (A+\sigma M)\frac{\mu}{2} \geqslant 0, \tag{3.140}$$

这里要 $A \geqslant \frac{2C_5}{\mu}$。
总结一下，我们先选取

$$\delta_1 = \frac{\delta\sigma}{12c_1nC_0},$$

然后

$$\beta = \frac{144kn(n-k+1)(n-1)c_1^3C_0^2}{(k-1)\sigma^2\delta^2} + \frac{18n(n-k+1)(n-1)c_1^2C_0^2}{(k-1)\delta\delta_1\sigma^2} + 2n\delta,$$

再另

$$\mu = \min\{\mu_0, \frac{1}{2\beta}\},$$

最后选
$$A=\frac{3(C_3\beta+c_1k\max f+\beta k\max f)}{\delta}+3\beta C_4+2\sigma+1+\frac{2C_5}{\mu}。$$
用最大值原理得到
$$P(x)\geqslant 0,\quad \text{in}\quad \Omega_\mu。$$
□

类似地，我们也能构造出 u_ν 的上闸函数。

引理 3.2.5. 另 $\overline{P}:=g(x)(Du\cdot Dh(x)-\psi(x))+G(x)$。固定 $\sigma=\frac{1}{2}$，对任意 $x\in\overline{\Omega_\mu}$，如果依次选取 β 大, μ 小，A 大，则有
$$\overline{P}(x)\leqslant 0。\tag{3.141}$$

证明. 假设最大值在 Ω_μ 的内点 x_0 达到。我们把其求两次导数，
$$\overline{P}_i=g_i(\sum_l u_lh_l-\psi)+g(\sum_l u_{li}h_l+\sum_l u_lh_{li}-\psi_i)+G_i,\tag{3.142}$$
和
$$\begin{aligned}\overline{P}_{ij}\ &=\ g_{ij}(\sum_l u_lh_l-\psi)+g_i(\sum_l u_{lj}h_l+\sum_l u_lh_{lj}-\psi_j)\\&+g_j(\sum_l u_{li}h_l+\sum_l u_lh_{li}-\psi_i)+G_{ij}\\&+g(\sum_l u_{lij}h_l+\sum_l u_{li}h_{lj}+\sum_l u_{lj}h_{li}+\sum_l u_lh_{lij}-\psi_{ij})。\end{aligned}\tag{3.143}$$
在最大值点 x_0 假设矩阵 $(u_{ij}(x_0))$ 对角。用 F^{ij} 和 (3.143) 作缩并得，
$$\begin{aligned}F^{ij}\overline{P}_{ij}\ &=\ F^{ij}g_{ij}(\sum_l u_lh_l-\psi)+2g_iF^{ij}(\sum_l u_{lj}h_l+\sum_l u_lh_{lj}-\psi_j)\\&+gF^{ij}(\sum_l u_{lij}h_l+2\sum_l u_{li}h_{lj}+\sum_l u_lh_{lij}-\psi_{ij})+F^{ij}G_{ij}\\&\geqslant\ -\beta C_6(\|u\|_{C^1},\|\partial\Omega\|_{C^3},\|\varphi\|_{C^2},\|f\|_{C^1})(\mathcal{F}+1)\\&+(A+\sigma M)\delta(\mathcal{F}+1)-2\beta F^{ii}u_{ii}h_i^2+2F^{ii}u_{ii}h_{ii}g。\end{aligned}\tag{3.144}$$
像原来一样我们把指标 $1\leqslant i\leqslant n$ 分成两类。
(i) 如果
$$|\beta h_i^2|\leqslant\frac{\delta}{2},\tag{3.145}$$
我们就说 $i\in\mathbf{B}$.
选 $\beta\geqslant 2n\delta$ 使得
$$|h_i^2|\leqslant\frac{1}{4n}。\tag{3.146}$$
(ii) 如果
$$|\beta h_i^2|\geqslant\frac{\delta}{2},\tag{3.147}$$

我们记为 $i \in \mathbf{G}$。
对任意的 $i \in \mathbf{G}$，由 $\overline{P}_i(x_0) = 0$ 得到

$$u_{ii} = -\frac{A + \sigma M}{g} + \frac{\beta(\sum_l u_l h_l - \psi)}{g} - \frac{\sum_l u_l h_{li}}{h_i} + \frac{\psi_i}{h_i}。 \tag{3.148}$$

因为 $|h_i|^2 > \frac{k_0}{2\beta}$ 和 (3.148)，我们有

$$\left| \frac{\beta(\sum_l u_l h_l - \psi)}{g} - \frac{\sum_l u_l h_{li}}{h_i} + \frac{\psi_i}{h_i} \right| \leqslant \beta C_4(k_0, \|u\|_{C^1}, \|\partial\Omega\|_{C^2}, \|\varphi\|_{C^1})。 \tag{3.149}$$

通过选择 A 大使得 $\frac{A}{3} \geqslant \beta C_4$，我们推出

$$-\frac{4A}{3} - \sigma M \leqslant u_{ii} \leqslant -\frac{A}{3} - \frac{2\sigma M}{3}, \qquad \text{for} \qquad i \in \mathbf{G}。 \tag{3.150}$$

由于 $2 \geqslant |Dh| \geqslant \frac{1}{2}$ 和 (3.146)，存在一个指标 $i_0 \in \mathbf{G}$，例如说 $i_0 = 1$ 使得

$$h_1^2 \geqslant \frac{1}{4n}。 \tag{3.151}$$

则继续计算有，

$$\begin{aligned} F^{ij}\overline{P}_{ij} \geqslant\; & [-\beta C_6 + (A + \sigma M)\delta](\mathcal{F} + 1) \\ & -2\beta \sum_{i \in \mathbf{G}} F^{ii} u_{ii} h_i^2 - 2\beta \sum_{i \in \mathbf{B}} F^{ii} u_{ii} h_i^2 \\ & -c_1 \sum_{u_{ii} \geqslant 0} F^{ii} u_{ii} - c_1 \sum_{u_{ii} < 0} F^{ii} |u_{ii}|。 \end{aligned} \tag{3.152}$$

首先处理下以上几项

$$-2\beta \sum_{i \in \mathbf{G}} F^{ii} u_{ii} h_i^2 \geqslant -2\beta F^{11} u_{11} h_1^2 \geqslant -\frac{\beta}{2n} F^{11} u_{11}, \tag{3.153}$$

然后

$$\begin{aligned} & -2\beta \sum_{i \in \mathbf{B}} F^{ii} u_{ii} h_i^2 \geqslant -2\beta \sum_{i \in \mathbf{B}, \mathbf{u_{ii}} \geqslant \mathbf{0}} F^{ii} u_{ii} h_i^2 \\ & \geqslant -\delta \sum_{i \in \mathbf{B}, \mathbf{u_{ii}} \geqslant \mathbf{0}} F^{ii} u_{ii} = -\delta \sum_{u_{ii} \geqslant 0} F^{ii} u_{ii}。 \end{aligned} \tag{3.154}$$

由 (3.67) 得出

$$\begin{aligned} & -2\beta \sum_{i \in G} F^{ii} u_{ii} h_i^2 - 2\beta \sum_{i \in B} F^{ii} u_{ii} h_i^2 \\ & -c_1 \sum_{u_{ii} \geqslant 0} F^{ii} u_{ii} - c_1 \sum_{u_{ii} < 0} F^{ii} |u_{ii}| \\ & \geqslant -\frac{\beta}{2n} F^{11} u_{11} - 2c_1 \mathcal{F} C_0 (M + 1)。 \end{aligned} \tag{3.155}$$

那么我们有

$$F^{ij}\overline{P}_{ij} \geqslant [-\beta C_6 + (A+\sigma M)\delta](\mathcal{F}+1) - \frac{\beta}{2n}F^{11}u_{11} - 2c_1\mathcal{F}C_0(M+1)。 \tag{3.156}$$

当 $u_{11} < 0$ 时很容易处理，因为由 (2.11) 和 (2.10)

$$F^{11} \geqslant c(k,n)\mathcal{F}。 \tag{3.157}$$

从 (3.150) 得到

$$-\frac{\beta}{2n}F^{11}u_{11} - 2c_1\mathcal{F}C_0(M+1) \geqslant \frac{\beta c}{2n}\mathcal{F}(\frac{A}{3}+\frac{2\sigma M}{3}) - 2c_1\mathcal{F}C_0(1+M)。 \tag{3.158}$$

如果选取 $\beta \geqslant \frac{6nc_1C_0}{c\sigma}$ and $A \geqslant 2\sigma + \frac{\beta C_6}{\delta}$，然后通过 (3.156) 的 (3.158) 得到

$$F^{ij}\overline{P}_{ij} > 0。 \tag{3.159}$$

所以 $\overline{P}$ 在 Ω_μ 的边界点上达到最大值。
在 $\partial\Omega$ 上，很容易看到

$$\overline{P} = 0。$$

而在 $\partial\Omega_\mu/\partial\Omega$ 有

$$\overline{P} \leqslant C_7(k, \max f, \|u\|_{C^1}, \|\varphi\|_{C^0}) - (A+\sigma M)\frac{\mu}{2} \leqslant 0， \tag{3.160}$$

这里要求 $A \geqslant \frac{2C_7}{\mu}$。
我们总结下，首先取

$$\beta \geqslant \frac{6nc_1C_0}{c\sigma},$$

然后

$$\mu = \min\{\mu_0, \frac{1}{\beta}\},$$

最后

$$A \geqslant 2\sigma + \frac{\beta C_6}{\delta} + 3\beta C_4 + 1 + \frac{2C_7}{\mu}。$$

再用极值原理我们得到了

$$\overline{P}(x) \leqslant 0, \quad \text{in} \quad \Omega_\mu。$$

□

利用闸函数我们可以得到双法向估计。

引理 3.2.6. 令 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的 C^4 严格 $k-1$-凸区域，再令 $u \in C^4(\Omega) \cap C^3(\overline{\Omega})$ 为纽曼问题 *(??)* 的一个 k-允许解。其中 $f \in C^2(\overline{\Omega})$ 为正函数 $\varphi \in C^3(\mathbb{R})$ 关于 z 递减。则存在和 n，k，$\|u\|_{C^1}$，$\min f$，$\|\varphi\|_{C^3}$，$\|f\|_{C^2}$，$\partial\Omega$ 的 $k-1$ 凸性以及 $\|\partial\Omega\|_{C^4}$ 有关的常数 C 使得

$$\sup_{\partial\Omega}|u_{\nu\nu}| \leqslant C。 \tag{3.161}$$

证明. 假设 z_0 为 $u_{\nu\nu}$ 边界上的最大值，

$$\begin{aligned} 0 &\geqslant P_\nu(z_0) \\ &\geqslant g(\sum_l u_{l\nu}h_l + u_l h_{l\nu} - \psi_\nu) - (A+\sigma M)h_\nu \\ &\geqslant u_{\nu\nu} - C(\|u\|_{C^1}, \|\partial\Omega\|_{C^2}, \|\psi\|_{C^2}) - (A+\sigma M)。 \end{aligned} \tag{3.162}$$

在第二个不等号中我们假设了 $u_{\nu\nu}(z_0) \geqslant 0$。则得到不等式

$$\sup_{\partial\Omega} u_{\nu\nu} \leqslant C + \sigma M。 \tag{3.163}$$

类似地，通过 $0 \leqslant \overline{P}_\nu(z_0)$ 这里 z_0 为 $u_{\nu\nu}$ 边界上的最小值，我们得到

$$\inf_{\partial\Omega} u_{\nu\nu} \geqslant -C - \sigma M。 \tag{3.164}$$

这么选取 $\sigma = \frac{1}{2}$ 得到估计

$$\sup_{\partial\Omega} |u_{\nu\nu}| \leqslant C。 \tag{3.165}$$

□

定理 1.0.1的证明: 结合引理 3.2.1，引理 3.2.2 和引理3.2.6，我们得到了定理1.0.1。 □

3.3 边界值问题的存在性

I 这一节我们完成定理 1.0.1的证明。如 [37]，结合定理 3.1.1，定理3.1.2 和定理 3.2.1 还有全局的 $C^{2,\alpha}$ 估计（见 [36] 和 [35]），我们对严格凸解得到全局估计

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leqslant C, \tag{3.166}$$

这里的常数 C，α 依赖于 k，n，Ω，$\|\Omega\|_{C^4}$，$\|f\|_{C^2}$，$\min f$ 和 $\|\varphi\|_{C^3}$。运用连续性方法（见 [13]，定理 17.28 或 [33]），我们完成了定理 1.0.1的证明。 □

第四章　经典纽曼问题

这一章我们主要研究以下经典的纽曼问题。这是为了做下一章的一个几何不等式的应用，主要来源于和夏超的合作 [44]。

$$\begin{cases}\sigma_k(D^2u)=f(x), & \Omega\\ u_\nu=\lambda+\varphi(x). & \partial\Omega\end{cases} \tag{4.1}$$

我们想证明如下定理：

定理 4.0.1. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中 C^4 有界严格凸区域。对于 $f\in C^2(\overline{\Omega})$ 且是正函数，$\varphi\in C^3(\overline{\Omega})$。那么存在唯一的常数 λ 和在加减常数意义下唯一的 k 允许解 $u\in C^{3,\alpha}(\overline{\Omega})$ 满足纽曼边界问题 *(4.1)*。

由于解 u 加减常数还是问题 (4.1) 的解，所以没有也不能期望有直接的 C^0 估计。虽然我们定理3.1.2的 C^1 估计和定理3.2.1的 C^2 估计包含了型如 (4.1) 的方程，但这些估计都依赖于 C^0 估计。所以我们需要得到不依赖于最大模的梯度估计。

定理 4.0.2. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中 C^4 有界严格凸区域。对于任意固定的 $\epsilon>0$，$f\in C^2(\overline{\Omega})$ 且是正函数，$\varphi\in C^3(\overline{\Omega})$。那么存在唯一的 k 允许解 $u\in C^{3,\alpha}(\overline{\Omega})$ 满足以下纽曼边界问题：

$$\begin{cases}\sigma_k(D^2u)=f(x), & \Omega\\ u_\nu=-\epsilon u+\varphi(x). & \partial\Omega\end{cases} \tag{4.2}$$

更重要地是对于 ϵ 充分小，u 满足以下估计：

$$\sup_{\overline{\Omega}}|\nabla u|\leqslant C, \tag{4.3}$$

和

$$\sup_{\overline{\Omega}}|u-\int_\Omega u|\leqslant C \tag{4.4}$$

这里常数 C 只依赖于 k，n，$\|f\|_{C^1}$，$\|\varphi\|_{C^3}$，Ω 的严格凸性和光滑性，不依赖于 ϵ 和 u 的最大模。

进而得到以下不依赖于 ϵ 的 *Schauder* 估计：

$$\|u-\int_\Omega u\|_{C^{2,\alpha}}\leqslant C, \tag{4.5}$$

这里常数 C 只依赖于 k，n，$\|f\|_{C^2}$，$\|\varphi\|_{C^3}$，Ω 的严格凸性和光滑性。

注解 4.0.1. 正是由于此方程 *(4.2)* 的特殊结构和边界的严格凸性才得到这种不依赖于最大模的梯度估计。一般情形下梯度估计都要依赖于 C^0 估计。

证明. 容易知道 (4.4) 为 (4.3) 的简单推论。

首先由简单的极值原理我们可以证明

$$\sup_{\overline{\Omega}} |\epsilon u| \leqslant C \tag{4.6}$$

设 $0 \in \Omega$，我们首先考虑函数 $u - A|x|^2$。固定依赖于 k, n 和 $\sup f$ 的常数 A 大，使得

$$F[D^2 u] = f \leqslant F[D^2(A|x|^2)]. \tag{4.7}$$

比较原理告诉我们 $u - A|x|^2$ 在边界点 x_0 达到最小值。

$$0 \geqslant (u - A|x|^2)_\nu(x_0) = -\epsilon u + \varphi - 2Ax \cdot \nu. \tag{4.8}$$

类似地，因为 u 是允许解，特别地它为下调和函数，所以 u 在边界上达到最大值。最终我们得到

$$\inf_{\partial\Omega} \varphi - 4A\mathrm{diam}\Omega \leqslant \epsilon u \leqslant \sup_{\partial\Omega} \varphi。 \tag{4.9}$$

所以我们可以考虑 $v = u - \int_\Omega u$，以及 $\phi(x) = \varphi(x) - \epsilon \int_\Omega u$。$v$ 满足方程

$$\begin{cases} \sigma_k(D^2 u) = f(x), & \Omega \\ u_\nu = -\epsilon u + \phi(x). & \partial\Omega \end{cases} \tag{4.10}$$

这里 f,ϕ 可以由原来的 f,φ 控制。

以下我们在条件 $\int_\Omega u = 0$ 下证明不依赖于 ϵ 和最大模的梯度估计。然后定理中的其它结论是定理1.0.1的推论。

考虑辅助函数

$$P = \log |Dw|^2 + \alpha|x|^2, \tag{4.11}$$

其中 $w = u + (-\epsilon u + \phi)d$，$d$ 为到边界附近的距离函数并且光滑延拓到整个 $\overline{\Omega}$，常数 α 待定。

设 P 的最大值在 Ω 内部达到，我们在最大值点计算有

$$0 = P_i = 2\frac{w_l w_{li}}{|Dw|^2} + 2\alpha x_i, \tag{4.12}$$

和

$$0 \geqslant F^{ij} P_{ij} = \frac{2F^{ij} w_{lj} w_{li}}{|Dw|^2} + \frac{2F^{ij} w_l w_{lij}}{|Dw|^2} - \frac{4F^{ij} w_l w_{li} w_p w_{pj}}{|Dw|^4} + 2\alpha \sum_i F^{ii} \tag{4.13}$$

首先我们有

$$w_i = u_i + (-\epsilon u_i + \phi_i)d + (-\epsilon u + \phi)d_i, \tag{4.14}$$

$$w_{ij} = u_{ij} + (-\epsilon u_{ij} + \phi_{ij})d + (-\epsilon u_i + \phi_i)d_j + (-\epsilon u_j + \phi_j)d_i + (-\epsilon u + \phi)d_{ij}, \tag{4.15}$$

和

$$\begin{aligned} w_{ijl} &= u_{ijl} + (-\epsilon u_{ijl} + \phi_{ijl})d + (-\epsilon u_{ij} + \phi_{ij})d_l + (-\epsilon u_{il} + \phi_{il})d_j + (-\epsilon u_i + \phi_i)d_{jl} \\ &\quad + (-\epsilon u_{jl} + \phi_{jl})d_i + (-\epsilon u_j + \phi_j)d_{il} + (-\epsilon u_l + \phi_l)d_{ij} + (-\epsilon u + \phi)d_{ijl}. \end{aligned}$$

在最大值点我们选取坐标系使得 $|Dw| = w_1$ 和 $(u_{ij})_{2\leqslant i,j\leqslant n}$ 对角。

$$\begin{aligned} \frac{2F^{ij}w_l w_{lij}}{|Dw|^2} &\geqslant \frac{-C[\sum F^{ii}(1 + w_1 + \epsilon w_1^2) + 1] - 4\epsilon F^{ij}u_{1i}d_j w_1}{w_1^2} \\ &\geqslant \frac{-C[\sum F^{ii}(1 + w_1 + \epsilon w_1^2) + 1]}{w_1^2}, \end{aligned}$$

这里我们选取了 ϵ 小，使得 $\epsilon d < \frac{1}{2}$，常数 C 依赖于 $\|\phi\|_{C^3}$,$\|f\|_{C^1}$，n，k，$\|\partial\Omega\|_{C^3}$。

$$\begin{aligned} \frac{2F^{ij}w_{lj}w_{li}}{|Dw|^2} - \frac{4F^{ij}w_l w_{li} w_p w_{pj}}{|Dw|^4} &\geqslant -\frac{2F^{ij}w_{1i}w_{1j}}{w_1^2} \\ &= -2\alpha^2 F^{ij}x_i x_j. \end{aligned}$$

所以只要取 $\frac{1}{\max|x|^2} \geqslant \alpha \geqslant 2C\epsilon$ 并且 $|Dw|$ 充分大则有，

$$F^{ij}P_{ij} \geqslant \frac{-C[\sum F^{ii}(1 + w_1 + \epsilon w_1^2) + w_1]}{w_1^2} + 2\alpha \sum F^{ii} - 2\alpha^2 F^{ij}x_i x_j > 0. \quad (4.16)$$

上式和 (4.13) 矛盾，所以函数 P 只能在边界上达到最大值。
若在边界上达到最大值并且设 n 为那点的法方向，则由 $w_n = 0$ 有

$$\begin{aligned} 0 \leqslant P_\nu &= 2\frac{w_l w_{l\nu}}{|Dw|^2} + 2\alpha x \cdot \nu \\ &= 2\frac{\sum_{i=1}^{n-1} w_i w_{in}}{|Dw|^2} + 2\alpha x \cdot \nu. \end{aligned} \quad (4.17)$$

对边界条件求切向导数得

$$u_{in} + \sum_{j=1}^{n-1} h_{ij}u_j = -\epsilon u_i + \phi_i, \quad (4.18)$$

其中 h_{ij} 为边界曲率。
由 w 的一阶导数表达式可知

$$(1 - \epsilon d)u_i - C \leqslant w_i \leqslant (1 - \epsilon d)u_i + C, \quad (4.19)$$

从而推出

$$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n-1} u_i^2 - C \leqslant |Dw|^2 \leqslant 4\sum_{i=1}^{n-1} u_i^2 + C \quad (4.20)$$

如果边界严格凸即 $h_{ij} \geqslant c_0$ 则有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} w_i w_{in} &\leqslant -c_0(1-\epsilon d)^2 \sum_{i=1}^{n-1} u_i^2 - \epsilon|Dw|^2 - C|Dw| - C \\ &\leqslant -\frac{c_0}{16}|Dw|^2 - \epsilon|Dw|^2 - C|Dw| - C\end{aligned}$$

所以只要取 $\epsilon \leqslant \frac{c_0}{32}$,$\alpha \leqslant \frac{c_0}{32 \max x\cdot\nu}$ 同样取 $|Dw|$ 大就有

$$\begin{aligned}P_\nu &\leqslant -\frac{c_0}{16} + 2\alpha x\cdot\nu \\ &\leqslant 0.\end{aligned}$$

就和式子 (4.17) 矛盾。所以我们先取 α小依赖于边界曲率，再取 ϵ 小，就得到了 $|Dw|$ 的上界从而得到 u 的梯度估计。

□

证明 4.0.1. 因为我们已经证明了问题 *(4.2)* 的解的存在性，结合上个定理可以得到和 ϵ 无关的 *Schauder* 估计。让 $\epsilon \to 0$，则由上述定理有 $-\epsilon|\nabla u| \to 0$。从而存在一个常数 λ，使得 $-\epsilon u \to \lambda$，即得到以下方程的经典解

$$\begin{cases}\sigma_k(D^2u) = f(x), & \Omega \\ u_\nu = \lambda + \varphi(x). & \partial\Omega\end{cases}。\tag{4.21}$$

下面证明唯一性。设 (λ, u) 和 (μ, ν) 为方程 *(4.21)* 的解。让 $a^{ij} = \int_0^1 F^{ij}[(1-t)D^2\nu + tD^2u]dt$, 则 $u-\nu$ 满足方程

$$\begin{cases}a^{ij}(u-\nu)_{ij} = 0 \\ (u-\nu)_\nu = \lambda - \mu\end{cases}\tag{4.22}$$

所以在边界上达到最大值和最小值。从而推出 $\lambda = \mu$。最后又由 *Hopf* 原理 *[13, 定理 3.6]* 有 $u-\nu = c$。

第五章 经典纽曼问题的几何应用

这一章我们由海森方程的经典纽曼问题得到 Alexandrov-Fenchel 不等式的的一个新证明。

我们先给出一些定义：

定义 5.0.1. *Newton* 变换张量定义为

$$[T_k]_{ij}(A_1,\cdots,A_k) := \frac{1}{k!}\delta^{i,i_1,\cdots,i_k}_{j,j_1,\cdots,j_k}(A_1)_{i_1j_1}\cdots(A_k)_{i_kj_k}. \tag{5.1}$$

当 $A_1=\cdots=A_k=A$ 时，我们记 $[T_k]_{ij}(A_1,\cdots,A_k)$ 为 $[T_k]_{ij}(A)$。从这个定义可以看出当 A_{ijk} 是关于指标对称时有

$$\partial_j([T_k]_{ij})(A)=0。 \tag{5.2}$$

定义 5.0.2. 定义 σ_k 的极化为

$$\sigma_k(A_1,\cdots,A_k) := \frac{1}{k!}\delta^{i_1,\cdots,i_k}_{j_1,\cdots,j_k}(A_1)_{i_1j_1}\cdots(A_k)_{i_kj_k}. \tag{5.3}$$

记

$$\sigma_k(A,\cdots,A)=\sigma_k(A), \tag{5.4}$$

由定义易知

$$\sigma_{k+1}(A)=\frac{1}{k+1}A_{ij}[T_k]_{ij}(A). \tag{5.5}$$

引理 5.0.1.

$$\begin{aligned} l[T_{k-1}]_{\alpha\beta}(\overbrace{A,\cdots,A}^{l-1},B,\cdots,B)A_{\gamma\beta} &= -k[T_k]_{\alpha\gamma}(\overbrace{A,\cdots,A}^{l},B,\cdots,B)\\ &\quad -(k-l)[T_{k-1}]_{\alpha\beta}(\overbrace{A,\cdots,A}^{l},B,\cdots,B)B_{\gamma\beta}\\ &\quad +k\sigma_k(\overbrace{A,\cdots,A}^{l},B,\cdots,B)\delta_{\alpha\gamma}, \end{aligned} \tag{5.6}$$

并且有

$$\begin{aligned} (k-l+2)[T_{k-1}]_{\alpha\beta}(\overbrace{A,\cdots,A}^{l-2},B,\cdots,B)B_{\gamma\beta} &= -k[T_k]_{\alpha\gamma}(\overbrace{A,\cdots,A}^{l-2},B,\cdots,B)\\ &\quad -(l-2)[T_{k-1}]_{\alpha\beta}(\overbrace{A,\cdots,A}^{l-3},B,\cdots,B)A_{\gamma\beta}\\ &\quad +k\sigma_k(\overbrace{A,\cdots,A}^{l-2},B,\cdots,B)\delta_{\alpha\gamma}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

证明. 直接计算有

$$
\begin{aligned}
& l[T_{k-1}]_{\alpha\beta}(\overbrace{A,\cdots,A}^{l-1},B,\cdots,B)A_{\gamma\beta} \\
= \ & \frac{l}{(k-1)!}\delta^{\alpha,\alpha_2,\cdots,\alpha_k}_{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k}A_{\alpha_2\beta_2}\cdots A_{\alpha_l\beta_l}B_{\alpha_{l+1}\beta_{l+1}}\cdots B_{\alpha_k\beta_k}A_{\gamma\beta_1} \\
= \ & -\frac{1}{(k-1)!}\delta^{\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k}_{\gamma,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k}A_{\alpha_2\beta_2}\cdots A_{\alpha_l\beta_l}B_{\alpha_{l+1}\beta_{l+1}}\cdots B_{\alpha_k\beta_k}A_{\alpha_1\beta_1} \\
& -\frac{k-l}{(k-1)!}\delta^{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha}_{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k}A_{\alpha_2\beta_2}\cdots A_{\alpha_l\beta_l}B_{\alpha_{l+1}\beta_{l+1}}\cdots B_{\gamma\beta_k}A_{\alpha_1\beta_1} \\
& +\frac{1}{(k-1)!}\delta^{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k}_{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k}\delta_{\alpha\gamma}A_{\alpha_2\beta_2}\cdots A_{\alpha_l\beta_l}B_{\alpha_{l+1}\beta_{l+1}}\cdots B_{\alpha_k\beta_k}A_{\alpha_1\beta_1} \\
= \ & -k[T_k]_{\alpha\gamma}(\overbrace{A,\cdots,A}^{l},B,\cdots,B) \\
& -(k-l)[T_{k-1}]_{\alpha\beta}(\overbrace{A,\cdots,A}^{l},B,\cdots,B)B_{\gamma\beta} \\
& +k\sigma_k(\overbrace{A,\cdots,A}^{l},B,\cdots,B)\delta_{\alpha\gamma}.
\end{aligned}
$$

式子 (5.7) 可以类似于 (5.6) 的计算证明。

□

我们可以把 D^2u 分解成。指标 i,j,k 从 1 到 n，指标 α,β,γ 从 1 到 $n-1$ 并代表切向方向，指标 n 代表边界 $\partial\Omega$ 的法向方向。D 表示欧式导数，∇ 表示边界的导数，我们一般记 $\nabla_\alpha(u_n)$ 为 $u_{n\alpha}$。取正交标架，令 $h_{\alpha\beta}$ 为边界曲率，可知

$$D^2_{\alpha\beta}u = u_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}u_n, \tag{5.8}$$

和

$$D^2_{\alpha n}u = u_{n\alpha} - h_{\alpha\beta}u_\beta. \tag{5.9}$$

记矩阵 A 和 B 分别为

$$A := \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \cdots & u_{\alpha\beta} & \cdots & u_{n\alpha} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \cdots & u_{n\alpha} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}, \tag{5.10}$$

和

$$B := \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \cdots & h_{\alpha\beta}u_n & \cdots & -h_{\alpha\gamma}u_\gamma \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \cdots & -h_{\beta\gamma}u_\gamma & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

所以我们可以把 D^2u 分解为

$$D^2u = A + B \tag{5.12}$$

我们现在来证明以下定理：

定理 5.0.1. 令 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界凸域，$\lambda(D^2u) \in \Gamma_k$，且满足 $u_\nu = c$，这里 ν 是边界外单位法向，c 为一个常数。则有下式

$$(k+1)\int_\Omega \sigma_{k+1}(D^2u) \geqslant \int_{\partial\Omega} \sigma_k(h)c^{k+1}。 \tag{5.13}$$

证明. 首先由 σ_k 算子的定义及散度定理得到

$$\begin{aligned}
(k+1)\int_\Omega \sigma_{k+1}(D^2u) &= \int_{\partial\Omega} \sigma_{k+1}^{ij}(D^2u)D^2_{ij}u &(5.14)\\
&= \int_{\partial\Omega} [T_k]_{ij}(D^2u)u_i\nu_j d\mu. &(5.15)
\end{aligned}$$

设指标 n 代表 ν 的方向有，

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} [T_k]_{ij}(D^2u)u_i\nu_j d\mu &= \int_{\partial\Omega} [T_k]_{in}(D^2u)u_i d\mu\\
&= \int_{\partial\Omega} [T_k]_{in}(A+B)u_i d\mu\\
&= I + II
\end{aligned}$$

这里 I 和 II 分别记为：

$$I := \int_{\partial\Omega} [T_k]_{nn}(A+B)u_n, \tag{5.16}$$

和

$$II := \int_{\partial\Omega} [T_k]_{\alpha n}(A+B)u_\alpha. \tag{5.17}$$

我们把 A，B 的表达式带入以上两式得，

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\partial\Omega} \sum_{l=1}^{k} C_k^l \sigma_k(\overbrace{\nabla^2 u, \cdots, \nabla^2 u}^{l}, h, \cdots, h)u_\nu^{k-l+1} + \int_{\partial\Omega} \sigma_k(h)u_n^{k+1}\\
&=: I_1 + I_2. &(5.18)
\end{aligned}$$

若加上假设 $u_n = c$，则有

$$\begin{aligned}
II &= \int_{\partial\Omega} [T_{k-1}]_{\alpha\beta_1}(A+B)h_{\alpha_1\beta_1}u_{\alpha_1}u_\alpha\\
&= \int_{\partial\Omega} \sum_{l=0}^{k-1} C_{k-1}^l [T_{k-1}]_{\alpha\beta_1}(\overbrace{\nabla^2 u, \cdots, \nabla^2 u}^{l}, h, \cdots, h)u_n^{k-1-l}h_{\alpha_1\beta_1}u_{\alpha_1}u_\alpha.
\end{aligned}$$

把 I_1 式中的 $\nabla^2 u$ 做一次分部积分，再次利用 $u_\nu = c$ 得

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\partial\Omega}\sum_{l=1}^{k} C_k^l \sigma_k(\overbrace{\nabla^2 u,\cdots,\nabla^2 u}^{l}, h,\cdots,h)u_n^{k-l+1} \qquad (5.19)\\ &= -\int_{\partial\Omega}\sum_{l=2}^{k} C_k^l \frac{l-1}{k!}\delta^{\alpha_1\cdots\alpha_k}_{\beta_1\cdots\beta_k} u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_l\beta_l\beta_1} h_{\alpha_{l+1}\beta_{l+1}}\cdots h_{\alpha_k\beta_k} u_n^{k-l+1}, \end{aligned}$$

其中最后一个等号用到了 Codazzi 公式 $h_{\alpha_k\beta_k\beta_1} = h_{\alpha_k\beta_1\beta_k}$。

然后我们再用一次 Ricci 恒等式 $u_{\alpha_l\beta_l\beta_1} - u_{\alpha_l\beta_1\beta_l} = u_\gamma R_{\gamma\alpha_l\beta_l\beta_1} = u_\gamma h_{\gamma\beta_l} h_{\alpha_l\beta_1} - u_\gamma h_{\gamma\beta_1} h_{\alpha_l\beta_l}$, 就有

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\partial\Omega}\sum_{l=2}^{k} C_k^l \frac{l-1}{k!}\delta^{\alpha_1\cdots\alpha_k}_{\beta_1\cdots\beta_k} u_{\alpha_1} u_{\alpha_2\beta_2}\cdots u_{\alpha_{l-1}\beta_{l-1}} u_\gamma h_{\gamma\beta_1} h_{\alpha_l\beta_l} h_{\alpha_{l+1}\beta_{l+1}}\cdots h_{\alpha_k\beta_k} u_n^{k-l+1},\\ &= \int_{\partial\Omega}\sum_{l=2}^{k} C_k^l \frac{l-1}{k}[T_{k-1}]_{\alpha_1\beta_1}(\overbrace{\nabla^2 u,\cdots,\nabla^2 u}^{l-2}, h,\cdots,h)u_{\alpha_1}u_\gamma h_{\gamma\beta_1} u_n^{k-l+1}\\ &= \int_{\partial\Omega}\sum_{l=0}^{k-1} C_k^{l+2} \frac{l+1}{k}[T_{k-1}]_{\alpha_1\beta_1}(\overbrace{\nabla^2 u,\cdots,\nabla^2 u}^{l+1}, h,\cdots,h)u_{\alpha_1}u_\gamma h_{\gamma\beta_1} u_n^{k-l-1}. \end{aligned}$$

我们把 II 和 I_1 加起来有并记为 III。

$$\begin{aligned} III &:= I_1 + II\\ &= \int_{\partial\Omega}\sum_{l=0}^{k-1} C_{k+1}^{l+2} \frac{l+1}{k}[T_{k-1}]_{\alpha_1\beta_1}(\overbrace{\nabla^2 u,\cdots,\nabla^2 u}^{l}, h,\cdots,h)u_{\alpha_1}u_\gamma h_{\gamma\beta_1} u_n^{k-l-1}. \end{aligned}$$

为判断 III 的符号，我们把 $\nabla^2_{\alpha\beta}u$ 再用 $D^2_{\alpha\beta}u - h_{\alpha\beta}u_n$ 代替，

$$\begin{aligned} III &= \int_{\partial\Omega}\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{l}(-1)^{l-i} C_{k+1}^{l+2} C_l^i \frac{l+1}{k}[T_{k-1}]_{\alpha_1\beta_1}(\overbrace{D^2 u,\cdots,D^2 u}^{i}, h,\cdots,h)u_{\alpha_1}u_\gamma h_{\gamma\beta_1} u_n^{k-i-1}\\ &= \int_{\partial\Omega}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{l=i}^{k-1}(-1)^{l-i} C_{k+1}^{l+2} C_l^i \frac{l+1}{k}[T_{k-1}]_{\alpha_1\beta_1}(\overbrace{D^2 u,\cdots,D^2 u}^{i}, h,\cdots,h)u_{\alpha_1}u_\gamma h_{\gamma\beta_1} u_n^{k-i-1}. \end{aligned}$$

若能证明 $III \geqslant 0$ 则此定理证明完毕。

事实上，在 $\lambda(D^2 u) \in \Gamma_k$, 以及 $h_{\alpha\beta} \geqslant 0$ 的假设下由 Grading 不等式知，

$$[T_{k-1}]_{\alpha_1\beta_1}(\overbrace{D^2 u,\cdots,D^2 u}^{i}, h,\cdots,h)h_{\gamma\beta_1}u_{\alpha_1}u_\gamma \geqslant 0. \qquad (5.20)$$

要证明 $III \geqslant 0$，只须证明

$$E := \sum_{l=i}^{k-1}(-1)^{l-i} C_{k+1}^{l+2} C_l^i \frac{l+1}{k} \geqslant 0. \qquad (5.21)$$

由 [43] 里的技巧可以如下处理这一项。

$$
\begin{aligned}
E &= (k+1)C_{k-1}^{i}\sum_{l=i}^{k-1}\frac{1}{l+2}C_{k-1-i}^{l-i}(-1)^{l-i} \\
&= (k+1)C_{k-1}^{i}\sum_{p=0}^{k-1-i}\frac{1}{p+i+2}C_{k-1-i}^{p}(-1)^{p}.
\end{aligned}
$$

注意到以下初等恒等式，

$$
\int_0^1 t^{i+1}(1-t)^{k-i-1}dt = \int_0^1 t^{1+i}\sum_{p=0}^{k-i-1}C_{k-i-1}^{p}(-1)^p t^p dt \tag{5.22}
$$

$$
= \sum_{p=0}^{k-i-1}C_{k-i-1}^{p}(-1)^p\frac{t^{p+2+i}}{p+2+i}\Big|_{t=0}^{t=1}. \tag{5.23}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
E &= (k+1)C_{k-1}^{i}\int_0^1 t^{1+i}(1-t)^{k-1-i}dt \\
&= \frac{i+1}{k}.
\end{aligned}
$$

最终我们得到

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega}[T_k]_{ij}(D^2u)u_i\nu_j d\mu \\
=& \int_{\partial\Omega}\sigma_k(h)u_n^{k+1}+\sum_{i=0}^{k-1}\frac{i+1}{k}[T_{k-1}]_{\alpha_1\beta_1}(\overbrace{D^2u,\cdots,D^2u}^{i},h,\cdots,h)h_{\gamma\beta_1}u_{\alpha_1}u_\gamma u_n^{k-i-1} \\
\geqslant& \int_{\partial\Omega}\sigma_k(h)u_n^{k+1}.
\end{aligned} \tag{5.24}
$$

□

结合定理4.0.2，和定理5.0.1我们可得到如下 Alexandrov-Fenchel 不等式。

定理 5.0.2. 设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界光滑凸区域，h 表示边界 $\partial\Omega$ 的曲率，则有

$$
|\Omega|^k\int_{\partial\Omega}\sigma_k(h)\leqslant\frac{C_{n-1}^k}{n^k}|\partial\Omega|^{k+1}. \tag{5.25}
$$

其中常数是最优的。等号达到时 Ω 正好是球。

证明. 我们只要对严格凸区域证明以上不等式，因为一般有界光滑凸区域可以由有界光滑严格凸区域逼近而得到不等式 (5.25)。

由定理4.0.2知存在 k 允许解及其唯一常数 c 满足方程

$$\begin{cases}\sigma_k(D^2u)=C_n^k, & \Omega\\ u_\nu=c. & \partial\Omega\end{cases} \tag{5.26}$$

一方面因 $\lambda(D^2u)\in\Gamma_k$ 由 Newton-MacLaurin 不等式

$$\frac{\sigma_{k+1}}{C_n^{k+1}}\leqslant(\frac{\sigma_k}{C_n^k})^{\frac{k+1}{k}}, \tag{5.27}$$

推出

$$\int_\Omega(k+1)\sigma_{k+1}\leqslant\int_\Omega(k+1)C_n^{k+1}(\frac{\sigma_k}{C_n^k})^{\frac{k+1}{k}}. \tag{5.28}$$

用定理5.0.1和方程 (5.26) 进一步得到

$$c^{k+1}\int_{\partial\Omega}\sigma_k(h)\leqslant(k+1)C_n^{k+1}|\Omega|. \tag{5.29}$$

另一方面由 Newton-MacLaurin 不等式

$$(\frac{\sigma_k}{C_n^k})^{\frac{1}{k}}\leqslant\frac{\sigma_1}{C_n^1}, \tag{5.30}$$

推出

$$\int_\Omega(\frac{\sigma_k}{C_n^k})^{\frac{1}{k}}\leqslant\int_\Omega\frac{\sigma_1}{n}=\int_{\partial\Omega}\frac{u_\nu}{n}=c\frac{|\partial\Omega|}{n}. \tag{5.31}$$

结合 (5.29) 和 (5.31) 把常数 c 消去就得到

$$|\Omega|^k\int_{\partial\Omega}\sigma_k(h)\leqslant\frac{C_{n-1}^k}{n^k}|\partial\Omega|^{k+1}. \tag{5.32}$$

取等号时，由定理5.0.1的证明知 u 的切向导数为零，且 $(\frac{\sigma_k}{C_n^k})^{\frac{1}{k}}=\frac{\sigma_1}{C_n^1}$。所以 u 满足过定方程

$$\begin{cases}\sigma_1(D^2u)=n, & \Omega\\ u_\nu=c, & \partial\Omega\\ u=b, & \partial\Omega\end{cases} \tag{5.33}$$

这里 b 为某个常数。

由此得到不等式5.25等号成立当且仅当 Ω 为半径为 c 的球，$u=\frac{|x|^2}{2}$ 且 $b=\frac{c^2}{2}$。

□

参考文献

[1] 麻希南, 邱国寰, and 徐金菊. Hesse 方程的 neumann 问题的梯度估计. 中国科学数学, 46(3):XX, 2016.

[2] Luis Caffarelli, Louis Nirenberg, and Joel Spruck. The dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations i. monge-ampégre equation. *Communications on pure and applied mathematics*, 37(3):369–402, 1984.

[3] Luis Caffarelli, Louis Nirenberg, and Joel Spruck. The dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations, iii: Functions of the eigenvalues of the hessian. *Acta Mathematica*, 155(1):261–301, 1985.

[4] Luis Caffarelli, Louis Nirenberg, and Joel Spruck. Nonlinear second order elliptic equations iv. starshaped compact weingarten hypersurfaces. *Current topics in partial differential equations*, pages 1–26, 1986.

[5] Sun-Yung A Chang, Matthew J Gursky, and Paul C Yang. An equation of monge-ampere type in conformal geometry, and four-manifolds of positive ricci curvature. *Annals of mathematics*, pages 709–787, 2002.

[6] Chuanqiang Chen. *On the Elementary Symmetric Function*. 2011.

[7] Szu-yu Sophie Chen. Boundary value problems for some fully nonlinear elliptic equations. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 30(1):1–15, 2007.

[8] Kai-Seng Chou and Xu-Jia Wang. A variational theory of the hessian equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 54(9):1029–1064, 2001.

[9] Slawomir Dinew and Slawomir Kolodziej. Liouville and calabi-yau type theorems for complex hessian equations. *arXiv preprint arXiv:1203.3995*, 2012.

[10] José F Escobar et al. The yamabe problem on manifolds with boundary. *Journal of Differential Geometry*, 35(1):21–84, 1992.

[11] Yuxin Ge and Guofang Wang. On a fully nonlinear yamabe problem. In *Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure*, volume 39, pages 569–598, 2006.

[12] Claus Gerhardt. Global regularity of the solutions to the capillarity problem. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, 3(1):157–175, 1976.

[13] David Gilbarg and Neil S Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg NewYork Tokyo, 1983.

[14] Bo Guan et al. Second-order estimates and regularity for fully nonlinear elliptic equations on riemannian manifolds. *Duke Mathematical Journal*, 163(8):1491–1524, 2014.

[15] Bo Guan and Pengfei Guan. Convex hypersurfaces of prescribed curvatures. *Annals of mathematics*, 156(2):655–673, 2002.

[16] Pengfei Guan, Junfang Li, Yanyan Li, et al. Hypersurfaces of prescribed curvature measure. *Duke Mathematical Journal*, 161(10):1927–1942, 2012.

[17] Pengfei Guan, Changshou Lin, and Xi-Nan Ma. The existence of convex body with prescribed curvature measures. *International Mathematics Research Notices*, 2009(11):1947–1975, 2009.

[18] Pengfei Guan and Guofang Wang. Local estimates for a class of fully nonlinear equations arising from conformal geometry. *International Mathematics Research Notices*, 2003(26):1413–1432, 2003.

[19] Matthew J Gursky and Jeff A Viaclovsky. Prescribing symmetric functions of the eigenvalues of the ricci tensor. *Annals of Mathematics*, pages 475–531, 2007.

[20] Yan He and WM Sheng. On existence of the prescribing k-curvature problem on manifolds with boundary. *Communications in Analysis and Geometry*, 19(2):53–77, 2011.

[21] Zuoliang Hou, Xi-Nan Ma, and Damin Wu. A second order estimate for complex hessian equations on a compact kähler manifold. *Mathematical research letters*, 17(2):547–562, 2010.

[22] Nina Ivochkina, Neil Trudinger, and Xu-Jia Wang. The dirichlet problem for degenerate hessian equations. 2005.

[23] NM Ivochkina. Solution of the dirichlet problem for some equations of monge-ampere type. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 56(2):403, 1987.

[24] NM Ivochkina. The dirichlet problem for the equations of curvature of order m. *Leningrad Math. J*, 2(3):631–654, 1991.

[25] Howard Jenkins and James Serrin. The dirichlet problem for the minimal surface equation in higher dimensions. *J. reine angew. Math*, 229:170–187, 1968.

[26] Feida Jiang and Neil S Trudinger. On pogorelov estimates in optimal transportation and geometric optics. *Bulletin of Mathematical Sciences*, 4(3):407–431, 2014.

[27] Feida Jiang and Neil S Trudinger. Oblique boundary value problems for augmented hessian equations i. *arXiv preprint arXiv:1511.08935*, 2015.

[28] Qinian Jin, Aobing Li, and YanYan Li. Estimates and existence results for a fully nonlinear yamabe problem on manifolds with boundary. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 28(4):509–543, 2007.

[29] Aobing Li and YanYan Li. On some conformally invariant fully nonlinear equations. *Communications on pure and applied mathematics*, 56(10):1416–1464, 2003.

[30] Yanyan Li. Some existence results for fully nonlinear elliptic equations of monge-ampère type. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 43(2):233–271, 1990.

[31] YanYan Li and Luc Nguyen. Counterexamples to c2 boundary estimates for a fully nonlinear yamabe problem on manifolds with boundary. *Adv. Nonlinear Stud*, 12:783–797, 2012.

[32] YanYan Li and Luc Nguyen. A fully nonlinear version of the yamabe problem on locally conformally flat manifolds with umbilic boundary. *Advances in Mathematics*, 251:87–110, 2014.

[33] G Lieberman. Oblique boundary value problems for elliptic equations, 2013.

[34] Gary M Lieberman. *Second order parabolic differential equations*. World scientific, 1996.

[35] Gary M Lieberman and Neil S Trudinger. Nonlinear oblique boundary value problems for nonlinear elliptic equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 295(2):509–546, 1986.

[36] P-L Lions and Neil Sydney Trudinger. Linear oblique derivative problems for the uniformly elliptic hamilton-jacobi-bellman equation. *Mathematische Zeitschrift*, 191(1):1–15, 1986.

[37] P-L Lions, NS Trudinger, and JIE Urbas. The neumann problem for equations of monge-ampère type. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 39(4):539–563, 1986.

[38] Jiakun Liu and Neil Trudinger. On pogorelov estimates for monge-ampere type equations. 2010.

[39] Xi-Nan Ma, Neil S Trudinger, and Xu-Jia Wang. Regularity of potential functions of the optimal transportation problem. *Archive for rational mechanics and analysis*, 177(2):151–183, 2005.

[40] Xinan Ma and Guohuan Qiu. The neumann problem for hessian equations. *arXiv preprint arXiv:1508.00196*, 2015.

[41] Xinan Ma and Jinju Xu. Gradient estimates of mean curvature equations with neumann boundary value problems. *Advances in Mathematics*, 290:1010–1039, 2016.

[42] Aleksey Vasil'yevich Pogorelov. *The Minkowski multidimensional problem*. John Wiley, 1978.

[43] Guohuan Qiu. A family of higher-order isoperimetric inequalities. *Communications in Contemporary Mathematics*, 17(03):1450015, 2015.

[44] Guohuan Qiu and Chao Xia. Classical neumann problems and alexandrov-fenchel inequalities. *preprint*.

[45] Robert C Reilly. Applications of the hessian operator in a riemannian manifold. *Indiana Univ. Math. J*, 26(3):459–472, 1977.

[46] James Serrin. The problem of dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 264(1153):413–496, 1969.

[47] Wei-Min Sheng, Neil S Trudinger, Xu-Jia Wang, et al. The yamabe problem for higher order curvatures. *J. Differential Geom*, 77(3):515–553, 2007.

[48] Weimin Sheng, Neil Trudinger, Xu-Jia Wang, et al. Convex hypersurfaces of prescribed weingarten curvatures. *Communications in Analysis and Geometry*, 12(1/2):213–232, 2004.

[49] Leon Simon and Joel Spruck. Existence and regularity of a capillary surface with prescribed contact angle. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 61(1):19–34, 1976.

[50] Neil S Trudinger. On degenerate fully nonlinear elliptic equations in balls. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 35(02):299–307, 1987.

[51] Neil S Trudinger. The dirichlet problem for the prescribed curvature equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 111(2):153–179, 1990.

[52] Neil S Trudinger. On the dirichlet problem for hessian equations. *Acta Mathematica*, 175(2):151–164, 1995.

[53] Neil S Trudinger and Xu-Jia Wang. Hessian measures ii. *Annals of Mathematics-Second Series*, 150(2):579–604, 1999.

[54] S Trudinger. Weak solutions of hessian equations. *Communications in Partial Differential Equations*, 22(7-8):25–54, 1997.
[55] NN Ural'tseva. Solvability of the capillary problem. *Vestnik Leningrad. Univ. Mat*, 19:54–64, 1973.
[56] John Urbas. Nonlinear oblique boundary value problems for hessian equations in two dimensions. In *Annales de l'IHP Analyse non linéaire*, volume 12, pages 507–575, 1995.
[57] John Urbas. Nonlinear oblique boundary value problems for two-dimensional curvature equations. *Advances in Differential Equations*, 1(3):301–336, 1996.
[58] John Urbas et al. Hessian equations on compact riemannian manifolds. *Nonlinear Problems in Mathematical Physics and Related Topics II*, 2002.
[59] Jeffrey Alan Viaclovsky et al. *Conformal geometry, contact geometry, and the calculus of variations*. PhD thesis, Citeseer, 1999.
[60] Xu-Jia Wang. The k-hessian equation. In *Geometric analysis and PDEs*, pages 177–252. Springer, 2009.

附录 A　纽曼问题边界二阶导赫尔德估计

这一章我们得到纽曼边界的二阶赫尔德估计，由于大部分文献或标准的椭圆方程书籍都只写二阶导赫尔德内估计或狄利克雷边界二阶导赫尔德估计。为了论文完整性我们把纽曼边界二阶导赫尔德估计写一遍，这主要来源于 Lieberman 和 Trudinger 的论文 [35]。

记 $A(r) := \{x \in \Omega | d(x, \partial\Omega) < r\}$，$A^0(r) := \partial\Omega \cap \partial A(r)$ 和 $A(r, 2r) := \{x \in \Omega | r < d(x, \partial\Omega) < 2r\}$, 其中 d 为到边界 $\partial\Omega$ 的距离函数。。对边界上的点 $x \in \partial\Omega$ 定义 $G_x(\rho, r) := A(\rho r) \cap B_r(x)$，$G^0_x(\rho, r) := A^0(\rho r) \cap \partial G_x(\rho, r)$ 和 $G'_x(\rho, r) = A(\frac{1}{2}\rho r, \rho r) \cap B_r(x)$。因为以后做估计是在某个固定的边界点附近做，所以若不会引起歧义我们经常把 $G_x(\rho, r)$,$G^0_x(\rho, r)$ 和 $G'_x(\rho, r)$ 下指标省略记为 $G(\rho, r)$,$G^0(\rho, r)$ 和 $G'(\rho, r)$。

引理 A.0.1. 令 $u \in C^2(\Omega) \bigcap C^1(\bar{\Omega})$ 满足方程

$$\begin{cases} a^{ij}u_{ij} \leqslant \mu_1 & A(2r_0) \\ u_\nu \geqslant \mu_2, & A^0(2r_0) \end{cases} \tag{A.1}$$

其中 $\lambda \leqslant a^{ij} \leqslant \Lambda, r_0 < \frac{\lambda}{32\Lambda|\nabla^2 d|}, u \geqslant 0$。则在任意边界点 x_0 附近有，当 $r \leqslant r_0$ 比较小时，存在常数 p, ρ 和 C 依赖于 λ, Λ, n 有

$$\left(\frac{1}{|G'_{x_0}(\rho, 2r)|}\int_{G'_{x_0}(\rho,2r)} u^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C\left(\inf_{G_{x_0}(\rho,r)} u + r\mu_2 + \frac{r^2\mu_1}{\lambda}\right). \tag{A.2}$$

证明. 不妨设 $x_0 = 0$。

首先证明：在 $G(\rho, 2r)$ 中有

$$\inf_{G'(\rho,2r)} u \leqslant \inf_{G(\rho,r)} u + C\left(\frac{r^2\mu_1}{\lambda} + r\mu_2\right). \tag{A.3}$$

为作闸函数，先引入以下几个函数

$$\begin{aligned} w_1 &= 4\rho^2r^2 - d^2, \\ w_2 &= \mu_2(2\rho r - d), \\ w_3 &= 2 - \frac{d^2}{4\rho^2r^2} - \frac{d}{2\rho r} + \frac{|x|^2}{r^2}. \end{aligned}$$

第一个函数 w_1 主要是为了满足闸函数的方程，

$$\begin{aligned} a^{ij}(w_1)_{ij} &= -2a^{ij}d_id_j - 2a^{ij}dd_{ij} \\ &\leqslant -2\lambda|\nabla d|^2 + 4\Lambda r|\nabla^2 d|. \end{aligned}$$

取 r_0 小使得有 $\frac{1}{2} \leqslant |\nabla d| \leqslant 1$ 并且 $r \leqslant r_0 \leqslant \frac{\lambda}{32\Lambda|\nabla^2 d|}$，

$$a^{ij}(w_1)_{ij} \leqslant -\frac{\lambda}{4} \qquad G(\rho, 2r)$$
$$(w_1)_\nu = 0. \qquad G^0(\rho, 2r)$$

第二个函数 w_2 主要是为了满足闸函数的在边界 $G^0(\rho, 2r)$ 的要求，

$$\begin{aligned} a^{ij}(w_2)_{ij} &= -\mu_2 a^{ij} d_{ij} \\ &\leqslant \mu_2 \Lambda |\nabla^2 d|. \end{aligned}$$

在边界 $G^0(\rho, 2r)$ 上有

$$(w_2)_\nu = \mu_2.$$

第三个函数 w_3 主要是为了满足闸函数在边界 $\partial B_{2r}(x) \cap G(\rho, 2r)$ 的要求，

$$\begin{aligned} a^{ij}(w_3)_{ij} &= -\frac{2a^{ij}d_i d_j}{4\rho^2 r^2} - \frac{2a^{ij}d_{ij}d}{4\rho^2 r^2} - \frac{a^{ij}d_{ij}}{2\rho r} + 2\frac{\sum a^{ii}}{r^2} \\ &\leqslant -\frac{\lambda|\nabla d|^2}{2\rho^2 r^2} + \frac{\Lambda|\nabla^2 d|d}{2\rho^2 r^2} + \frac{\Lambda|\nabla^2 d|}{2\rho r} + \frac{2n\Lambda}{r^2}. \end{aligned}$$

同样取 $r \leqslant r_0 \leqslant \frac{\lambda}{32\Lambda|\nabla^2 d|}$，$\rho \leqslant \min\{\frac{1}{4}, \frac{\lambda}{64n\Lambda}\}$ 就得有

$$a^{ij}(w_3)_{ij} \leqslant 0 \qquad G(\rho, 2r)$$
$$(w_3)_\nu \geqslant \frac{1}{2\rho r} - \frac{2}{r} \geqslant 0 \quad . \quad G^0(\rho, 2r)$$

在 $G(\rho, 2r)$ 中有 $w_1 \geqslant 0$，$w_2 \geqslant 0$ 和 $w_3 \geqslant 0$。
在 $\partial B_{2r} \cap \partial G(\rho, 2r)$ 上有 $w \geqslant 4$，
所以考虑以下函数

$$w = u + \frac{4(\mu_1 + \Lambda\mu_2|\nabla^2 d|)}{\lambda} w_1 + w_2 + \frac{Ew}{4}, \tag{A.4}$$

其中 $E := \inf_{G'(\rho, 2r)} u$.
由以上计算有

$$\begin{cases} a^{ij} w_{ij} \leqslant 0, & G(\rho, 2r) \\ w_\nu \geqslant 0, & G^0(\rho, 2r) \\ w \geqslant E, & \partial B_{2r} \cap \partial G(\rho, 2r) \\ w \geqslant E. & \partial A(2\rho r) \cap \partial G(\rho, 2r) \end{cases}$$

极值原理知：

$$E \leqslant u + \frac{16\rho^2 r^2(\mu_1 + \Lambda\mu_2|\nabla^2 d|)}{\lambda} + 2\rho r\mu_2 + \frac{E}{4} w_3.$$

因为在 $G(\rho, r)$ 中有 $w_3 \leqslant 3$。把上式右边在 $G(\rho, r)$ 上求极小有

$$E \leqslant \inf_{G(\rho,r)} u + \frac{16\rho^2 r^2 \mu_1}{\lambda} + 4\rho r \mu_2 + \frac{3E}{4}.$$

即

$$\inf_{G'(\rho,2r)} u \leqslant 4 \inf_{G(\rho,r)} u + \frac{64\rho^2 r^2 \mu_1}{\lambda} + 16\rho r \mu_2.$$

再由内部的弱 Harnack 不等式，存在依赖于 λ, Λ, n 的常数 p 和 C 有

$$\left(\frac{1}{|G'(\rho,2r)|}\int_{G'(\rho,2r)} u^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C\left(\inf_{G'(\rho,2r)} u + \frac{r^2\mu_1}{\lambda}\right).$$

结合以上两式引理得证。

□

引理 A.0.2. *Krylov*
设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中有界区域。u 非负满足方程

$$\begin{cases} a^{ij}u_{ij} \leqslant \mu_1, & A(2r_0) \\ u = 0. & A^0(2r_0) \end{cases} \tag{A.5}$$

其中 $\lambda \leqslant a^{ij} \leqslant \Lambda, r_0 < \frac{\lambda}{32\Lambda|\nabla^2 d|}$。令 $v = \frac{u}{h}$，则在任意边界点 x_0 附近，有常数 p,ρ 和 C 依赖于 λ, Λ, n

$$\left(\frac{1}{|G'_{x_0}(\rho,2r)|}\int_{G'_{x_0}(\rho,2r)} v^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C\left(\inf_{G_{x_0}(\rho,r)} v + \frac{r\mu_1}{\lambda}\right). \tag{A.6}$$

证明. 类似引进函数

$$\begin{aligned} w_1 &= 2\rho r d - d^2, \\ w_3 &= d\left(-2 - \frac{d}{2\rho r} + \frac{|x|^2}{r^2}\right). \end{aligned}$$

我们取 $\rho < 1, r_0 < \frac{\lambda}{32\Lambda|\nabla^2 d|}$ 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a^{ij}(w_1)_{ij} &= \rho r a^{ij} d_{ij} \quad -a^{ij}d_i d_j - a^{ij}d_{ij}d \\ &\leqslant -2r_0\Lambda|\nabla^2 d| - \lambda|\nabla d|^2 \\ &\leqslant -\frac{\lambda}{8}. \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} a^{ij}(w_3)_{ij} &= -\frac{2a^{ij}d_i d_j}{2\rho r} - \frac{2a^{ij}d_{ij}d}{2\rho r} - 2a^{ij}d_{ij} + \frac{a^{ij}d_{ij}|x|^2}{r^2} + \frac{2d\sum a^{ii}}{r^2} + \frac{4a^{ij}d_i x_j}{r^2} \\ &\leqslant \frac{-\lambda|\nabla d|^2 + \Lambda|\nabla^2 d| r_0}{\rho r} + 6\Lambda|\nabla^2 d| + \frac{2n\Lambda}{r} + \frac{4\Lambda}{r} \\ &\leqslant -\frac{\lambda}{32\rho r} + \frac{4n\Lambda}{r}. \end{aligned}$$

这时若取 $\rho \leqslant \frac{\lambda}{128n\Lambda}$，这有

$$a^{ij}(w_3)_{ij} \leqslant 0.$$

考虑函数

$$w = u + \frac{4\mu_1}{\lambda}w_1 + \frac{1}{3}(\inf_{G'(\rho,2r)} \frac{u}{d})w_3. \tag{A.7}$$

这时
所以有

$$\begin{cases} a^{ij}w_{ij} \leqslant 0, & G(\rho,2r) \\ w = 0, & G^0(\rho,2r) \\ w \geqslant 0, & \partial B_{2r} \cap \partial G(\rho,2r) \\ w \geqslant 0. & \partial A(2\rho r) \cap \partial G(\rho,2r) \end{cases}$$

则极值原理有

$$\inf_{G'(\rho,2r)} \nu \leqslant 3(\inf_{G(\rho,r)} \nu + \frac{8\mu_1\rho r}{\lambda})$$

在 $G'(\rho,2r)$ 中对 u 用内部弱 harnack 不等式，

$$(\int_{G'(\rho,2r)} \frac{u^p}{|G'(\rho,2r)|})^{\frac{1}{p}} \leqslant C(\inf_{G'(\rho,2r)} u + \frac{r^2\mu_1}{\lambda}).$$

且注意到 $\frac{u}{2r} \leqslant \nu \leqslant \frac{u}{r}$, 得到

$$(\int_{G'(\rho,2r)} \frac{\nu^p}{|G'(\rho,2r)|})^{\frac{1}{p}} \leqslant C(\inf_{G(\rho,r)} \nu + \frac{r\mu_1}{\lambda}). \tag{A.8}$$

□

运用以上两个引理我们开始做边界二阶导赫尔德估计。以下 $\rho = \min\{\frac{1}{4}, \frac{\lambda}{128n\Lambda}\}$ 固定。

定理 A.0.1. 让 u 为以下方程的 $C^{1,1}(\partial\Omega) \cap C^4(\Omega)$ 的 k 允许解

$$\begin{cases} \sigma_k(D^2u) = f(x), & \Omega \\ u_\nu = \varphi(x,u). & \partial\Omega \end{cases} \tag{A.9}$$

并且已知 $|u| + |Du| + |D^2u| \leqslant K$。则存在常数 α 和 C 依赖于 n, K, f, φ 有估计

$$\mathrm{osc}_{G(\rho,r)} u_{i\nu} \leqslant Cr^\alpha \quad 对任意 \quad i = 1, \cdots, n. \tag{A.10}$$

证明. 令 $g=u_\nu-\varphi(x,u)$。由 $\lambda(D^2u)\in\Gamma_k,|D^2u|\leqslant K$ 和 $f\geqslant c>0$ 知

$$\lambda\leqslant F^{ij}\leqslant\Lambda.$$

易知 g 满足方程

$$|F^{ij}g_{ij}|\leqslant\mu_1(K,n,f,\varphi),\qquad\Omega \tag{A.11}$$
$$g=0.\qquad\partial\Omega \tag{A.12}$$

记 $v=\frac{g}{d}$。$m_r=\inf_{G(\rho,r)}v$ 和 $M_r=\max_{G(\rho,r)}v$.

则考虑 $G(\rho,2r)$ 上的非负函数 $g-m_{2r}d$，其满足方程 (A.11)。由内部 harnack 估计得到

$$\begin{aligned}\sup_{G'(\rho,2r)}(v-m_{2r}) &\leqslant C(\inf_{G'(\rho,2r)}(v-m_{2r})+r\mu_1)\\ &\leqslant C(m_r-m_{2r}+r\mu_1),\end{aligned}$$

这里第二个不等式可由引理A.0.2的证明中得到。

同理考虑非负函数 $M_{2r}d-g$, 得到不等式

$$\sup_{G'(\rho,2r)}(M_{2r}-v)\leqslant C(M_{2r}-M_r+r\mu_1).$$

结合上面两式有

$$M_{2r}-m_{2r}\leqslant C(M_{2r}-m_{2r}-M_r+m_r+r\mu_1).$$

若记 $w(r)=M_r-m_r$，则存在很小的常数 r_0 有

$$w(r)\leqslant\frac{C-1}{C}w(2r)+r\mu_1\quad\text{对任意的}\quad r<r_0.$$

应用如下引理A.0.3得到估计

$$\mathrm{osc}_{G(\rho,r)}\frac{g}{d}\leqslant Cr^\alpha\quad\text{对任意}\quad i=1,\cdots,n. \tag{A.13}$$

由边界条件 (A.12) 及让 $d\to0$ 得到

$$\mathrm{osc}_{G(\rho,r)\cap\partial\Omega}u_{\nu\nu}\leqslant Cr^\alpha.$$

而若 τ 为边界法向, 则由边界条件 (A.12) 自然有

$$\mathrm{osc}_{G(\rho,r)\cap\partial\Omega}u_{\tau\nu}\leqslant Cr^\alpha.$$

所以得到边界估计,

$$\mathrm{osc}_{G(\rho,r)\cap\partial\Omega}u_{i\nu}\leqslant Cr^\alpha\quad\text{对任意}\quad i=1,\cdots,n. \tag{A.14}$$

为了得到边界点例如 $x_0=0$，附近的估计，我们记 $a=g_{\nu(0)}(0)$，令

$$\begin{aligned}\widetilde{u}: &= u - \frac{ad^2}{2},\\ \widetilde{g}: &= g + ad.\end{aligned}$$

又因为 $\widetilde{g}$ 满足和 g 类似的方程

$$\begin{aligned}|F^{ij}\widetilde{g}_{ij}| &= |F^{ij}g_{ij} + aF^{ij}d_{ij}|\\ &\leqslant \mu_1(K, n, f, \varphi).\end{aligned}$$

同理得

$$\mathrm{osc}_{G(\rho,r)}\frac{\widetilde{g}}{d} \leqslant Cr^{\alpha} \quad \text{对任意} \quad i = 1, \cdots, n. \tag{A.15}$$

由完全非线性一致椭圆方程的理论 u 有内部二阶导数赫尔德估计，所以有

$$\begin{aligned}\sup_{x,y\in A(2r_0)} d_{x,y}^{\alpha}\frac{|F^{ij}\widetilde{g}_{ij}(x) - F^{ij}\widetilde{g}_{ij}(y)|}{|x-y|^{\alpha}} &\leqslant C,\\ \sup_{x,y\in A(2r_0)} d_{x,y}^{\alpha}\frac{|F^{ij}(x) - F^{ij}(y)|}{|x-y|^{\alpha}} &\leqslant C\end{aligned}$$

由线性方程的 Shauder 内估计 [13, 定理 6.2] 有

$$\begin{aligned}&\sup_{y\in G(\rho,r)} d_y|D\widetilde{g}(y)|\\ \leqslant\ & C(|\widetilde{g}|_{C^0(G(\rho,r))} + \sup_{x,y\in G(\rho,r)} d_{x,y}^{2+\alpha}\frac{|F^{ij}\widetilde{g}_{ij}(x) - F^{ij}\widetilde{g}_{ij}(y)|}{|x-y|^{\alpha}}).\end{aligned} \tag{A.16}$$

对任意的 $y \in G(\rho, 2r_0)$, 令 $r = 2d_y$，假设存在 $x, x_1, y_1 \in \overline{G}(\rho, r)$, 使得

$$\begin{aligned}|\widetilde{g}|_{C^0(G(\rho,r))} &= \widetilde{g}(x),\\ \sup_{x,y\in G(\rho,r)} d_{x,y}^{2+\alpha}\frac{|F^{ij}\widetilde{g}_{ij}(x) - F^{ij}\widetilde{g}_{ij}(y)|}{|x-y|^{\alpha}} &= d_{x_1,y_1}^{2+\alpha}\frac{|F^{ij}\widetilde{g}_{ij}(x_1) - F^{ij}\widetilde{g}_{ij}(y_1)|}{|x_1-y_1|^{\alpha}}.\end{aligned}$$

则运用 (A.16) 有

$$\begin{aligned}|D\widetilde{g}(y)| &\leqslant \tfrac{C}{d_y} \quad (\widetilde{g}(x) + d_{x_1,y_1}^{2+\alpha}\frac{|F^{ij}\widetilde{g}_{ij}(x_1) - F^{ij}\widetilde{g}_{ij}(y_1)|}{|x_1-y_1|^{\alpha}})\\ &\leqslant \quad C(\frac{\widetilde{g}(x)}{d_y} + d_y).\end{aligned}$$

最后结合A.15和注意到 $\partial\Omega$ 上 $\widetilde{g} \equiv 0$ 和 $D\widetilde{g}(0) = 0$，得到

$$
\begin{aligned}
|D\tilde{g}(y)-D\tilde{g}(0)| &\leqslant C(\frac{r^{\alpha}d_x}{d_y}+r^{\alpha}) \\
&\leqslant Cr^{\alpha}.
\end{aligned}
$$

即得到边界点附近的估计

$$
osc_{G(\rho,r)}u_{i\nu}\leqslant Cr^{\alpha},\quad 对任意\quad i=1,\cdots,n. \tag{A.17}
$$

□

引理 A.0.3. 假设 w 是在 $(0,r_0]$ 的非减函数，且对任意的 $r\leqslant r_0<1$ 都有不等式

$$
w(\frac{r}{2})\leqslant \theta w(r)+\mu_1 r^{\mu}, \tag{A.18}
$$

其中 $0<\theta<1,\mu\leqslant 1$ 为给定常数。则对任意的 $r\leqslant r_0$，存在常数 C 依赖于 θ,μ 和 $\alpha\in(0,1)$ 依赖于 θ 使得

$$
w(r)\leqslant C[(\frac{r}{r_0})^{\alpha}w(r_0)+(\frac{r}{r_0})^{\mu\alpha}]. \tag{A.19}
$$

证明. 假设存在正整数 n, 使得 $\frac{r_0}{2^n}\leqslant r\leqslant\frac{r_0}{2^{n-1}}$。并且不妨设 $\theta>\frac{3}{4}$。由 w 是非减函数,

$$
\begin{aligned}
w(r) &\leqslant w(\frac{r_0}{2^{n-1}}) \\
&\leqslant \theta w(\frac{r_0}{2^{n-2}})+\mu_1(\frac{r_0}{2^{n-2}})^{\mu} \\
&\leqslant \theta^{n-1}w(r_0)+r_0^{\mu}\mu_1(\theta^{\mu(n-2)}+\cdots+(\frac{\theta}{2^{n-3}})^{\mu}+(\frac{1}{2^{n-2}})^{\mu}) \\
&\leqslant \theta^{n-1}w(r_0)+\frac{\mu_1 r_0^{\mu}\theta^{\mu(n-2)}(1-(2\theta)^{-\mu n+\mu})}{1-(2\theta)^{-\mu}} \\
&\leqslant \theta^{n-1}w(r_0)+\frac{1}{(1+\frac{1}{2})^{\mu}-1}2^{\mu}\mu_1 r_0^{\mu}\theta^{\mu(n-1)}.
\end{aligned}
$$

由于假设 $\log\frac{r_0}{r}\leqslant n\log 2$, 则有常数 $0<\alpha=\frac{\log\theta}{\log\frac{1}{2}}<1$, 使得

$$
\begin{aligned}
w(r) &\leqslant \theta^{-1}\quad \theta^{\frac{\log\frac{r_0}{r}}{\log 2}}w(r_0)+C(\mu)\theta^{-\mu}\mu_1 r_0^{\mu}\theta^{\frac{\mu\log\frac{r_0}{r}}{\log 2}} \\
&\leqslant \quad \theta^{-1}(\frac{r}{r_0})^{\alpha}w(r_0)+C(\mu)\theta^{-\mu}r_0^{\mu}\mu_1(\frac{r}{r_0})^{\mu\alpha}.
\end{aligned}
$$

□

再来得到边界二阶导赫尔德估计。

定理 A.0.2. 令 $u \in C^3(\overline{\Omega}) \cap C^4(\Omega)$ 为纽曼边值问题的 k 允许解

$$\begin{cases} \sigma_k^{\frac{1}{k}}(D^2u) = f(x), & \Omega \\ u_\nu = \varphi(x,u). & \partial\Omega \end{cases} \tag{A.20}$$

并且已知 $|u| + |Du| + |D^2u| \leqslant K$。则对任意一个边界切方向例如 τ，存在常数 α 和 C 依赖于 n, K, f, φ 有估计

$$|D^2u|_{C^\alpha(G(\rho,r))} \leqslant C.$$

证明. 记 $h(x,\tau) := u_{pq}\tau^p\tau^q$。因为我们已有二阶导数的全局估计，所以我们不妨假设 $0 \leqslant h \leqslant 1$。

方程求一二阶导得

$$\begin{aligned} \widetilde{F}^{ij}u_{ijp} &= f_p, \\ \widetilde{F}^{ij,lm}u_{ijp}u_{lmq} + \widetilde{F}^{ij}u_{ijpq} &= f_{pq}. \end{aligned}$$

我们在边界附近 $A(2r_0)$ 中每点建立标架$\{e_1, \cdots, e_{n-1}, \nu\}$,其中 $e_1, \cdots, e_{n-1}$ 为边界切方向的延拓，$\nu = -\frac{Dd}{|Dd|}$ 并用指标 n 来表示。

利用凹性我们计算 h 满足的方程为

$$\begin{aligned} \widetilde{F}^{ij}h_{ij} &= \widetilde{F}^{ij}u_{pqij}\tau^p\tau^q + 4\widetilde{F}^{ij}\tau_i^p\tau^q u_{jpq} + 2\widetilde{F}^{ij}\tau_{ij}^p\tau^q u_{pq} + 2\widetilde{F}^{ij}\tau_i^p\tau_j^q u_{pq} \\ &\geqslant f_{\tau\tau} - C(\sum_{\substack{p<n \\ i,j\leqslant n}} |u_{ijp}| + 1), \end{aligned}$$

其中 C 依赖于 K,λ,Λ,n。

由方程的一阶导数方程得到

$$|u_{nn\tau}| \leqslant C\frac{\sum_{\substack{j<n \\ i\leqslant n}} |u_{ij\tau}|}{F^{nn}} + f_\tau.$$

所以

$$\widetilde{F}^{ij}h_{ij} \geqslant -C(\sum_{\substack{p,j<n \\ i\leqslant n}} |u_{ijp}| + 1).$$

令 $\xi_1, \cdots, \xi_M$ 为包含所有切向 e_i 及组合 $\frac{e_i \pm e_j}{\sqrt{2}}$，$i,j = 1, \cdots, n-1$ 的单位向量。

令

$$h_l(x) = h(x, \xi_l), \qquad l = 1, \cdots, M.$$
$$v' = \sum_{l=1}^{M} (h_l)^2.$$

选择待定地 $\epsilon \in (0,1)$，考虑函数

$$w_l = h_l + \epsilon v', \qquad l = 1, \cdots, M.$$

w_l 满足以下方程，

$$\begin{aligned} \widetilde{F}^{ij}(w_l)_{ij} &\geqslant -\mu_1(K, n, \lambda, \Lambda, f) \qquad A(2r_0), \\ (w_l)_\nu &\leqslant \mu_2(\varphi, \Omega, n, K) \qquad A^0(2r_0). \end{aligned}$$

这时令

$$\begin{aligned} M_l'(r) &= \sup_{G(\rho,r)} h_l \qquad l = 1, \cdots, M; \\ W_l(r) &= \sup_{G(\rho,r)} w_l \qquad l = 1, \cdots, M; \\ w'(r) &= \sum_{l=1}^{M} \operatorname{osc}_{G(\rho,r)} h_l. \end{aligned}$$

这样我们就可以对非负函数 $W_l(2r) - w_l$ 应用引理A.0.1得到

$$\left(\frac{1}{G'(\rho,2r)} \int_{G'(\rho,2r)} (W_l(2r) - w_l)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C(W_l(2r) - W_l(r) + \mu_1 r^2 + \mu_2 r).$$

注意到

$$\begin{aligned} M_l'(2r) - h_l &\leqslant W_l(2r) - w_l + 2\epsilon K w'(2r), \\ W_l(2r) - W_l(r) &\leqslant M_l'(2r) - M_l'(r) + 2\epsilon K w'(2r). \end{aligned}$$

推出

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{G'(\rho,2r)} \int_{G'(\rho,2r)} (M_l'(2r) - h_l)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ \leqslant\ & C(M_l'(2r) - M_l'(r) + \mu_1 r^2 + \mu_2 r + K\epsilon w'(2r)). \end{aligned}$$

由 Motzkin-Wasow 引理 [13, 定理 17.13]: 存在正常数 λ^*, Λ^*, N 和单位向量 $\zeta_1, \cdots, \zeta_N$ 依赖 n, λ, Λ。使得 $\widetilde{F}^{ij}$ 可以写成如下形式

$$\begin{aligned} \lambda^* \leqslant\ & \beta_l \leqslant \Lambda^*, \\ \widetilde{F}^{ij} =\ & \sum_{l=1}^{N} \beta_l \zeta_l^i \zeta_l^j. \end{aligned}$$

这里 $\zeta_1,\cdots,\zeta_N$ 包含向量 e_i 和 $(e_i\pm e_j)/\sqrt{2}, i=1,\cdots,n$，$i<j$。我们选取之前的 $M=N-1$，$\zeta_N=e_n=\nu$。

令

$$
\begin{aligned}
\zeta' &= \zeta-(\zeta\cdot e_n)e_n\\
\xi_l &= \frac{\zeta'}{|\zeta'|},\\
g_l &= |\zeta_l'|^2 h(x,\xi_l)+2\zeta_l^n\zeta_l^j u_{jn}+(\zeta_l^n)^2 u_{nn},\\
\widetilde{g}_l &= g_l-|\zeta_l'|^2 h_l(x),\\
g_N &= u_{nn}.
\end{aligned}
$$

由 (A.10) 推出

$$
|\widetilde{g}_l(x)-\widetilde{g}_l(y)|\leqslant Cr^\eta \quad x,y\in G(\rho,r),\quad l=1,\cdots,N.
$$

令

$$
\begin{aligned}
M_l(r) &= \sup_{G(\rho,r)} g_l \qquad l=1,\cdots,N;\\
m_l(r) &= \sup_{G(\rho,r)} g_l \qquad l=1,\cdots,N;\\
w(r) &= \sum_{l=1}^N \mathrm{osc}_{G(\rho,r)} g_l.
\end{aligned}
$$

对任意的 $l=1,\cdots,N$, 我们得到

$$
\begin{aligned}
&(\frac{1}{G'(\rho,2r)}\int_{G'(\rho,2r)}(M_l(2r)-g_l)^p)^{\frac{1}{p}}\\
\leqslant\ & C(M_l(2r)-M_l(r)+\mu_1 r^2+\mu_2 r+r^\eta+K\epsilon w(2r)).
\end{aligned}
\tag{A.21}
$$

由 $\sigma_k^{\frac{1}{k}}$ 的凹性，我们有

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=1}^N \beta_l(g_l(y)-g_l(x)) &= \widetilde{F}_{ij}(D^2u(y))(u_{ij}(y)-u_{ij}(x))\\
&\leqslant f(y)-f(x).
\end{aligned}
$$

对任意的 $x\in G(\rho,2r)$，$y\in G(\rho,r)$ 有

$$
\beta_l(g_l(y)-g_l(x)) \leqslant f(y)-f(x)+\sum_{i\neq l}^N \beta_i(g_i(x)-g_i(y)).
$$

对上式 $x\in G(\rho,2r)$ 取极大得

$$g_l(y) - m_l(2r) \leqslant \frac{1}{\lambda^*}(r|Df| + \Lambda^* \sum_{i \neq l}^{N}(M_l(2r) - g_i(y))).$$

再运用 (A.21) 在 $y \in G'(\rho, 2r)$ 上积分有

$$\begin{aligned}
&(\frac{1}{G'(\rho, 2r)} \int_{G'(\rho,2r)} (g_l - m_l(2r))^p)^{\frac{1}{p}} \\
\leqslant\ & C(\sum_{i \neq l}^{N} M_i(2r) - M_i(r) + \mu_1 r^2 + \mu_2 r + r^\eta + K\epsilon w(2r)) \\
\leqslant\ & C(w(2r) - w(r) + \mu_1 r^2 + \mu_2 r + r^\eta + K\epsilon w(2r)).
\end{aligned}$$

和 (A.21) 相加然后把 l 从 1 加到 N 得到

$$w(2r) \leqslant C(w(2r) - w(r) + r^\eta + K\epsilon w(2r)).$$

若取 $\epsilon < \frac{1}{CK}$ 使得 $\theta := \frac{C-1+CK\epsilon}{C} < 1$ 即得到

$$\begin{aligned}
w(r) &\leqslant \frac{C - 1 + CK\epsilon}{C} w(2r) + Cr^\eta \\
&\leqslant \theta w(2r) + Cr^\eta.
\end{aligned}$$

最后由引理A.0.3得到

$$|D^2u|_{C^\alpha(G(\rho,r))} \leqslant C.$$

□

致　谢

在中国科技大学完成硕博连读学业的六年里，我所从事的学习和研究工作，都是在导师以及系里其他老师和同学的指导和帮助下进行的。在完成论文之际，请容许我对他们表达诚挚的谢意。

首先感谢导师麻希南教授多年的指导和教诲，是他把我带到了完全非线性偏微分方程和几何分析的研究领域。麻老师严谨的研究态度及不懈努力的工作精神，对数学研究的热爱及积极乐观的人生观，都深深地感染着我。麻老师对学生非常负责，不仅每周仔细指导我们上讨论班研读各类文献，这让我们可以深入地学习各种数学。还经常带我们出去开会增长见识，让我们对最新的数学进展有所了解。这些都将成为我学术生涯的宝贵原始积累而受益终身。学习上有麻老师的耐心指导，生活上要感谢周琪师母多年的细心关怀，谢谢您们在我困难时期给予的帮助。总之当时选择跟麻老师学习是我人生中非常正确的决定！

博士最后一年要感谢国家基金委的资助让我可以去麦吉尔大学跟管鹏飞教授学习数学。感谢管老师将近一年的耐心指导以及后两年给我提供的博后位置，这定将使我对数学有更加深刻理解，视野也会更加开阔。也感谢林芳华教授给我短期访问上海纽约大学的机会，和他的聊天让我知道作数学要脚踏实地不断地努力学习各种新东西方能有所作为。

感谢给我上过课的老师：李嘉禹老师，张希老师，孔胜利老师，宣本金老师，陈传强师兄，赵立丰老师，宋百林老师，刘聪文老师，陈智老师，钟勇老师，许小卫老师。是您们的指导给我的研究工作打下了基础。

感谢徐露，欧乾忠，韩菲，侍述军，叶运华，张伟，胡波文，黄鲲，叶江，卢文，陈传强，夏超，徐金菊等师兄师姐们的指点和照顾；感谢朱静勇，艾万君，胡京辰，沈大伟，林秉文，杨文杰，白晓等几位同学，与你们的讨论使我受益良多；感谢王珺，张德凯，翁良俊，叶剑，韦韡，锁晶晶等师弟师妹，我们在 1431 实验室共同学习共同生活，一起走过了这段愉快而难忘的岁月。也特别感谢何伟骅博士在我刚来合肥时给予的帮助。感谢你们在我最宝贵的年华里，是你们伴随着我的成长。

感谢科大数学学院和研究生院给我提供的各种奖学金，使得我生活上比较宽裕可以更好地作研究。

最后，感谢我父亲邱长华，母亲李志霞一贯的鼓励和支持，我爱您们！特别想对突然离开的父亲说声：爸，谢谢您一生的无私付出，这十多年一直在外地念书没有机会孝敬您。今后我会好好地生活工作，请您在天堂不要牵挂。

邱国寰

2016 年 6 月 8 日

在读期间发表的学术论文与取得的研究成果

已发表论文：

1. Gradient estimates on Hessian equations for Neumann problem (with Xinan Ma and Jinju Xu), SCHENTIA SINICA Mathematica, 2016, 46(3).
2. A generalization of Reilly's formula and its applications to a new Heintze-Karcher type inequality (with Xia Chao), Int. Math. Res. Not. IMRN 2015, no. 17, 7608-7619.
3. A family of higher order iso-perimetric inequalities, Commun. Contemp. Math. 17 (2015), no. 3, 1450015, 20 pp.

待发表论文：

1. Classical Neumann Problems and Alexandrov-Fenchel inequalities (with Chao Xia), Preprint.
2. The Neumann problem for Hessian Equations (with Xinan Ma), arXiv:1508.00196.