第四次作业

李安卓尔 PB19020487

2023 年 4 月 3 日

在有电场的情况下，波包半经典运动方程如下

$$\dot{\mathbf{r}}_c = -\frac{1}{\hbar}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{k}_c} + \mathbf{k}_c \times \vec{\Omega}_n(\mathbf{k})$$

$$\hbar \dot{\mathbf{k}}_c = -e\vec{E}(\mathbf{x}_c)$$

为了得到这个运动方程，我们利用 Bloch 态构造一个波包 $|W\rangle = \int d^3k w(\mathbf{k},t)\,|\psi_n(\mathbf{k})\rangle$ 其中 $|w(\mathbf{k},t)|^2$ 为分布函数，可以认为它在波包中心的 k_c 附近展宽很小，一个可以类比的例子为 $|w(\mathbf{k},t)|^2 = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_c)$. 这样子就让波包的动量有了一个良好的定义。同时为了让波包中心在实空间有良好的定义，我们定义波包对位置算符的均值 $\langle W|\,\mathbf{r}\,|W\rangle$ 为波包中心在实空间的位置。

- 推导在实空间下波包中心和分布函数 $w(\mathbf{k},t)$ 的关系

$$-\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}_c}\arg w\left(\mathbf{k}_c,t\right) + A_n\left(\mathbf{k}_c\right) = \mathbf{r}_c \tag{1}$$

  一个可能用到的恒等式为

$$\langle \psi_n\left(\mathbf{k}'\right)|\mathbf{r}|\psi_n(\mathbf{k})\rangle = -i\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}}\delta\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}'\right) + \delta\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}'\right)\left\langle u_n(\mathbf{k})\left|i\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}}\right|u_n(\mathbf{k})\right\rangle \tag{2}$$

- 波包的拉格朗日量为

$$L = \left\langle W\left|i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right|W\right\rangle - \langle W|H|W\rangle \tag{3}$$

  推导拉格朗日量具体形式如下

$$L = \hbar\mathbf{k}_c\cdot\dot{\mathbf{r}}_c + \hbar\dot{\mathbf{k}}_c\cdot A_n\left(\mathbf{k}_c\right) + e\phi\left(\mathbf{r}_c\right) - E_n\left(\mathbf{k}_c,\mathbf{r}_c\right) \tag{4}$$