

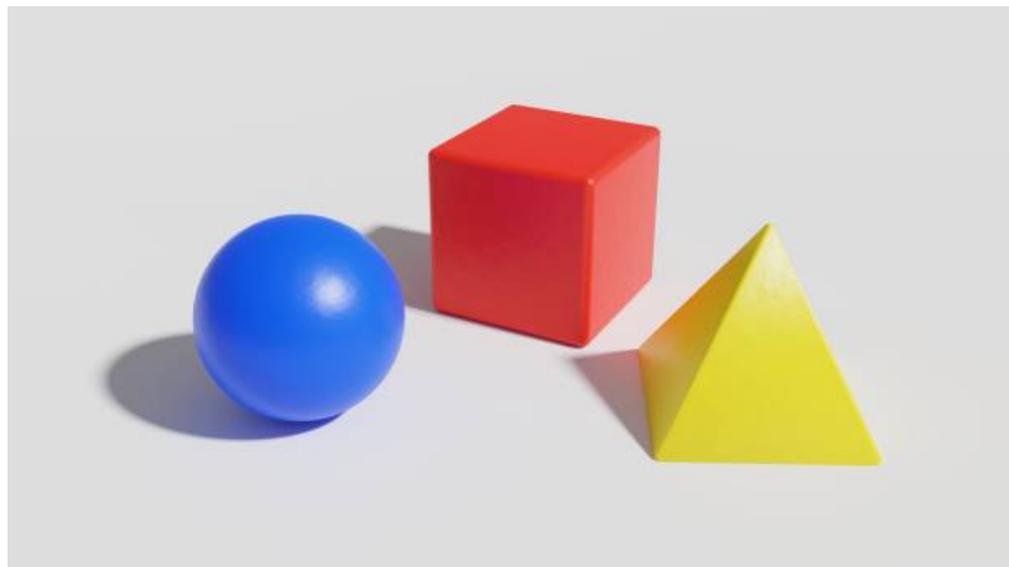
拓扑与几何

物理中的几何相位（专题1）

高阳

拓扑-橡胶膜的几何

研究物体（特定空间）在连续形变（连续变换）下保持不变的性质



研究对象：附带邻域性质的点集

一维

x

二维

(x, y)

三维

(x, y, z)

维度：

(1) 空集=-1维

(2) 如果任意包含P的邻域的边界的维度小于n，则这些n值中的最小数即为P点的维数。

确定一个点所需要的独立的参量数目

康托提出的一一映射

$$f: [0,1] \rightarrow [0,1] \times [0,1]$$

$$x = .5\ 09\ 006\ 07\ 8\ 1\ 2\ 09\ 05\ 9\ 2\ 3\ \dots$$

$$a = .\ 5\ 006\ 8\ 2\ 05\ 2\ \dots$$

$$b = .09\ 07\ 1\ 09\ 9\ 3\ \dots$$



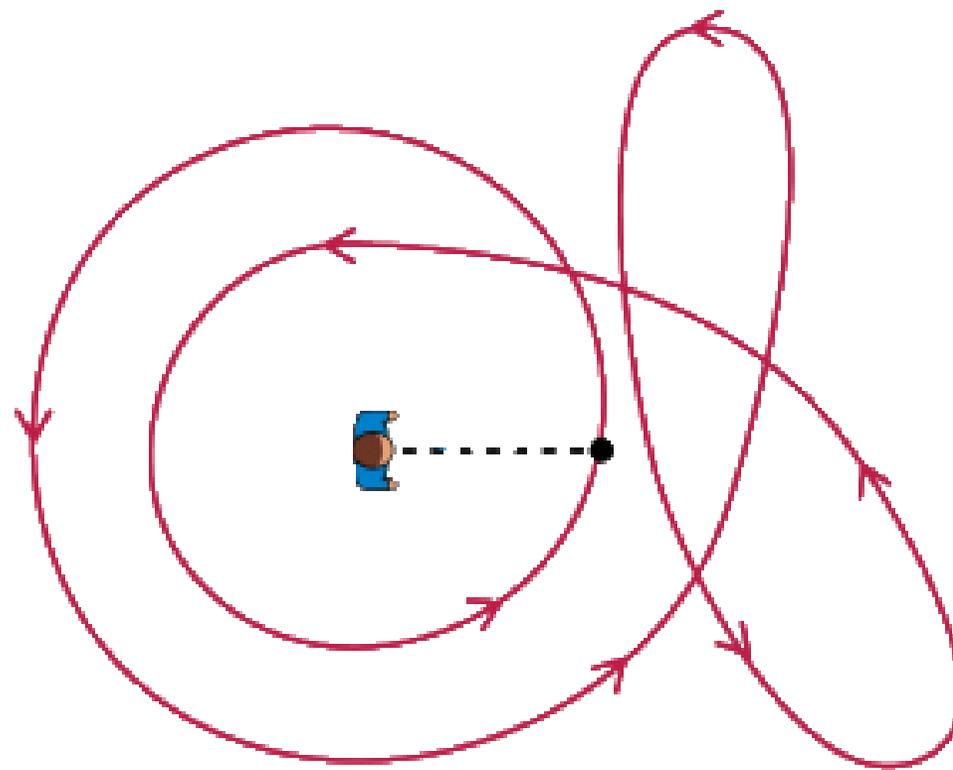
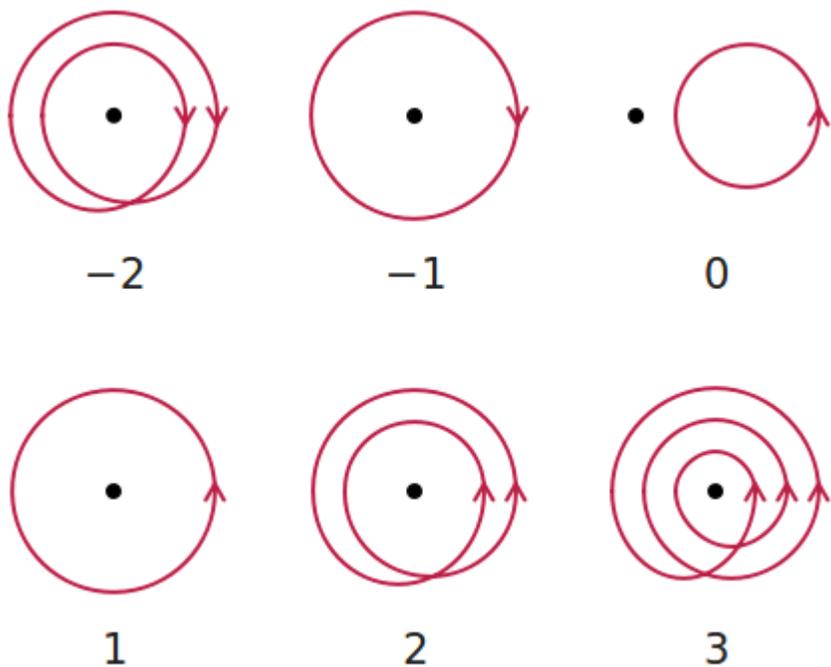
=



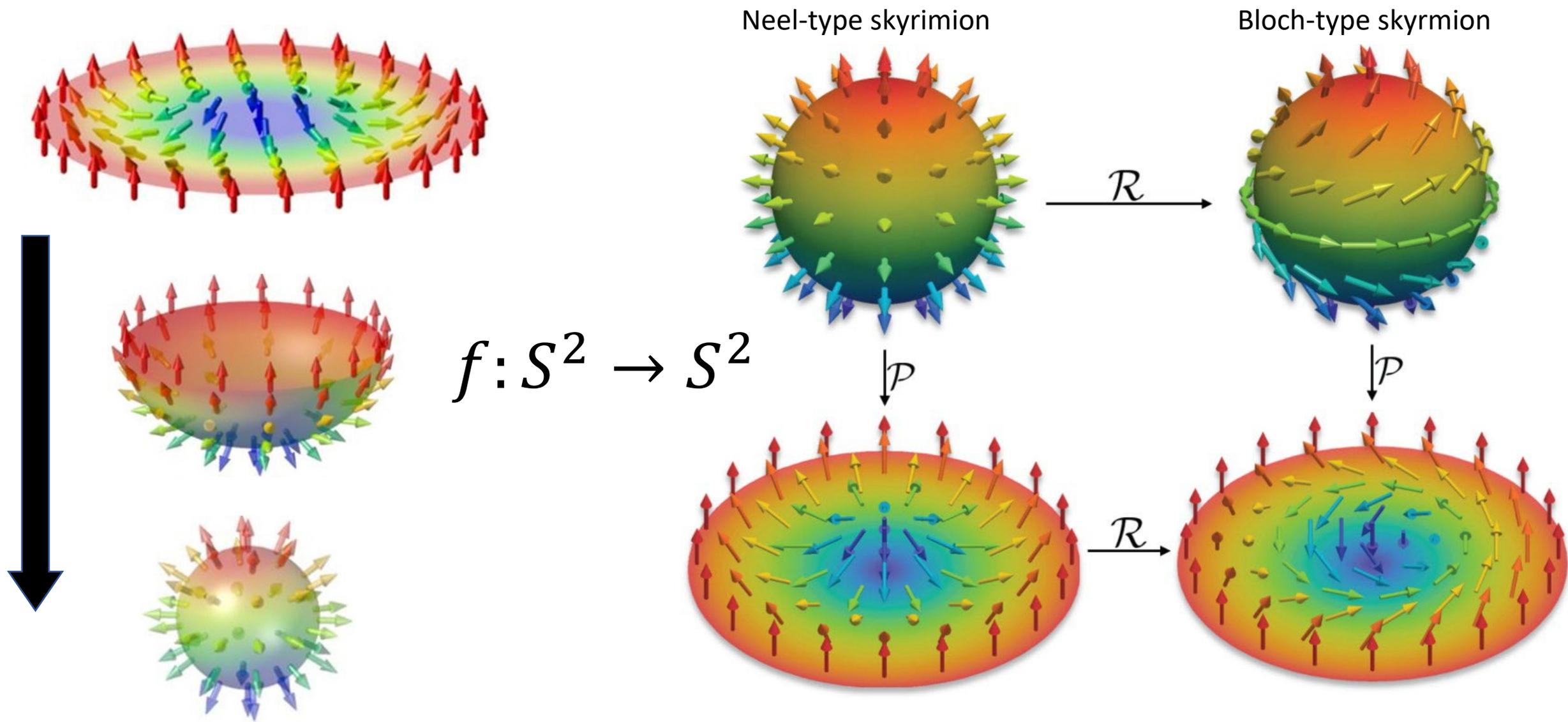
?

拓扑示例1: 一维绕数 (winding number)

$$f: S^1 \rightarrow S^1$$

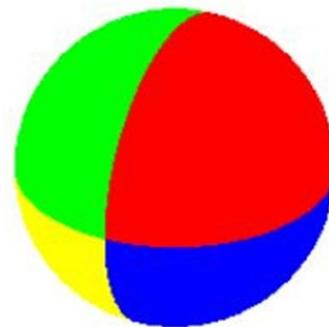


拓扑示例2：二维绕数 (winding number)

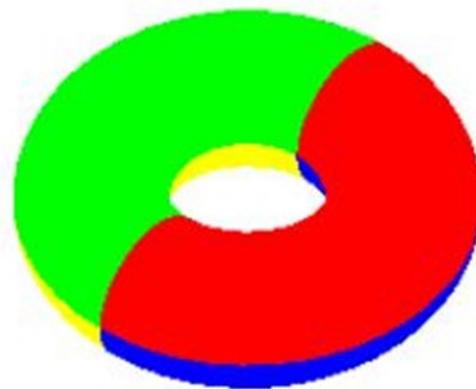


拓扑示例3：欧拉示性数

Name	Image	Vertices V	Edges E	Faces F	Euler characteristic: $V - E + F$
Tetrahedron		4	6	4	2
Hexahedron or cube		8	12	6	2
Octahedron		6	12	8	2
Dodecahedron		20	30	12	2
Icosahedron		12	30	20	2



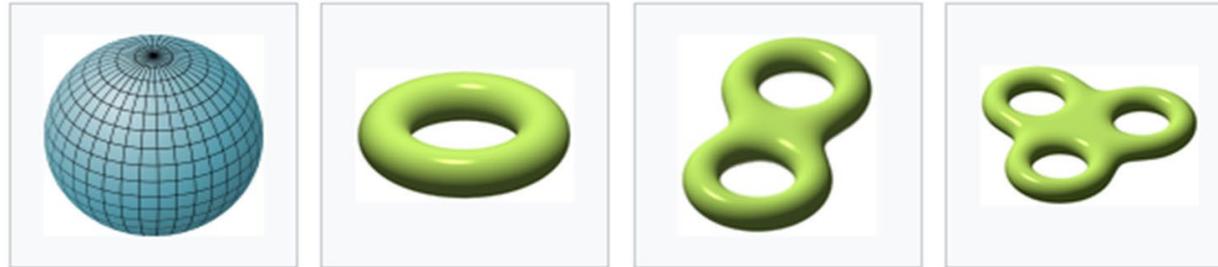
$$\begin{aligned}\chi &= V - E + F \\ &= 2 - 4 + 4 = 2\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\chi &= V - E + F \\ &= 4 - 8 + 4 = 0\end{aligned}$$

与剖分方式无关

欧拉示性数与亏格



$\chi = 2$

$\chi = 0$

$\chi = -2$

$\chi = -4$

$\chi(M) = 2 - 2g$

推广至N维曲面:

$$\chi(M) = \sum_0^N (-1)^k \beta_k$$

β_k 为k-单纯形的个数

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots = \bullet, \text{---}, \triangle, \text{四面体}, \dots$$

高斯-博内定理：拓扑与几何的联系

闭合曲面

$$\chi(S) = \frac{1}{2\pi} \iint K dS$$

高斯曲率

有边界的曲面

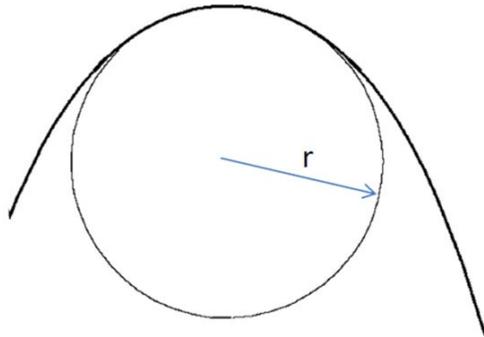
$$\chi(S) = \frac{1}{2\pi} \iint K dS + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial S} k_g ds$$

测地线曲率

高斯曲率的一个分量

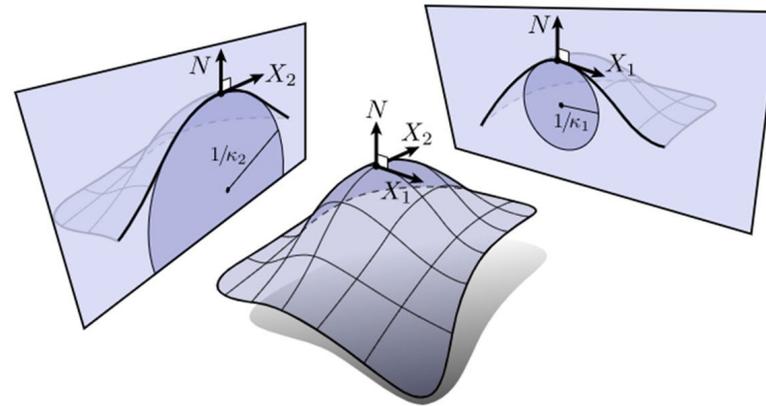
曲线与曲面的曲率

对直线的偏离



$$k = \frac{1}{r} = \frac{d\phi}{ds}$$

考察过P点的曲线



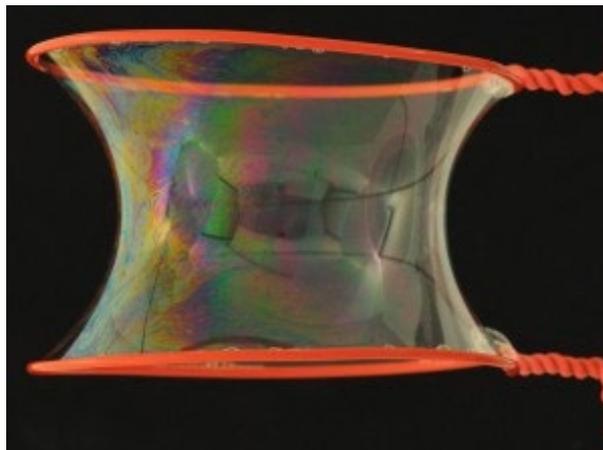
它们将具有不同的曲率，
其中的最大值和最小值为主曲率 k_1, k_2

平均曲率与最小曲面

平均曲率 (外禀) $k = k_1 + k_2$

最小曲面问题: 每个点附近的面积均取极小

决定肥皂膜的形状: 膜的表面张力对应的自由能正比于面积



高斯曲率

高斯曲率 (内禀) $k = k_1 k_2$

曲面的基本形式

曲面上两点的距离

$$\begin{aligned}x &= X(u, v) \\y &= Y(u, v) \\z &= Z(u, v)\end{aligned}$$

$$dr^2 = E du du + F du dv + F dv du + G dv dv$$

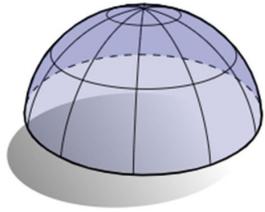
完全由度规决定

高斯极妙定理
除非产生拉伸或压缩,
否则高斯曲率不变

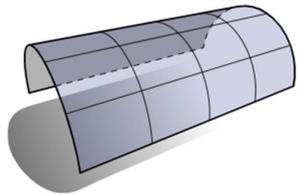


$$k = \frac{1}{2H} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{F}{EH} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{H} \frac{\partial G}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{2}{H} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{H} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{F}{EH} \frac{\partial E}{\partial u} \right) \right] \quad H = \sqrt{EG - F^2}$$

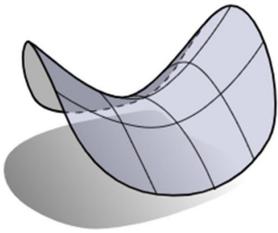
高斯曲率示例



$$k > 0$$

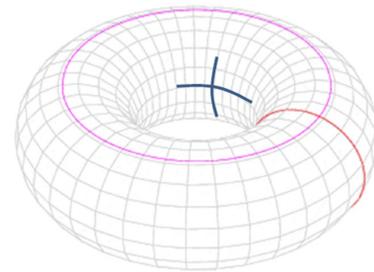


$$k = 0$$



$$k < 0$$

轮胎面（环面）



高斯-博内定理：拓扑与几何的联系(1)

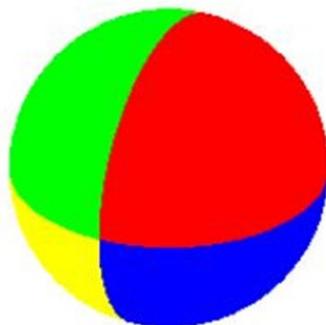
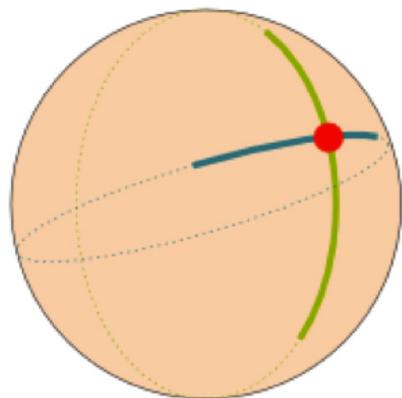
闭合曲面

$$\chi(S) = \frac{1}{2\pi} \iint K dS$$

高斯曲率

球面的曲率： $K = \frac{1}{R^2}$

$$\chi(S) = \frac{1}{2\pi} \iint K dS = \frac{1}{2\pi R^2} \times 4\pi R^2 = 2$$



$$\chi = V - E + F = 2 - 4 + 4 = 2$$

高斯-博内定理：拓扑与几何的联系(2)

有边界的曲面

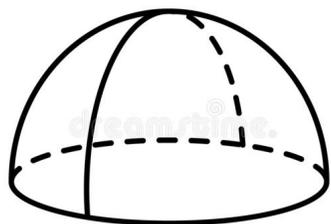
$$\chi(S) = \frac{1}{2\pi} \iint K dS + \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial S} k_g ds$$

测地线曲率

衡量对测地线的偏离

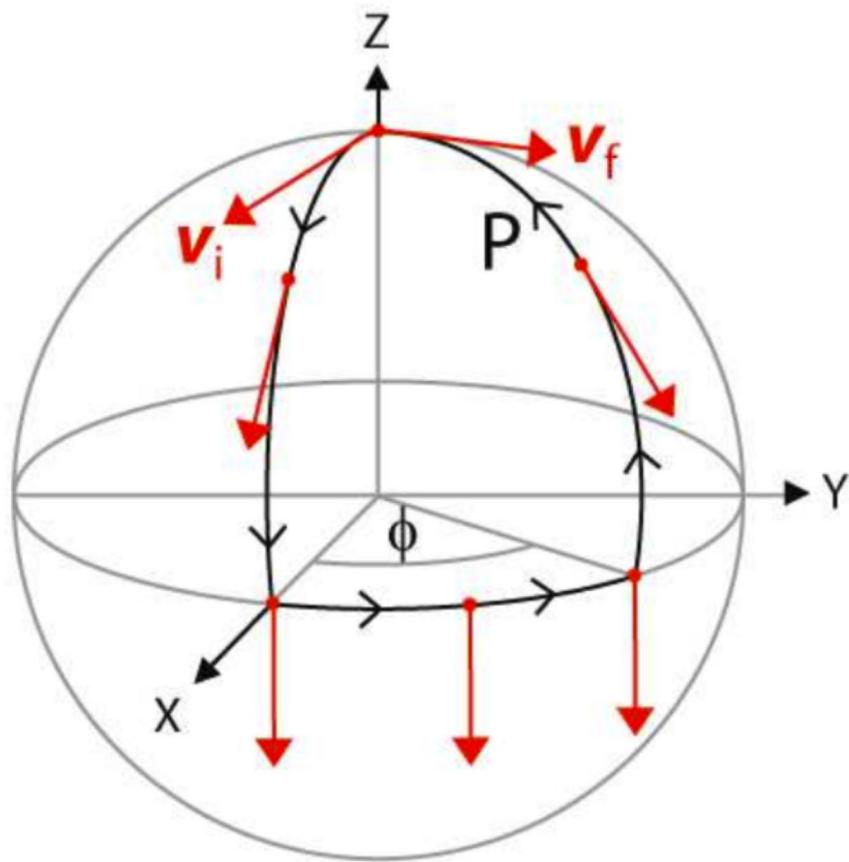
半球，边界为测地线

$$\chi(S) = \frac{1}{2\pi} \iint K dS = \frac{1}{2\pi R^2} \times 2\pi R^2 = 1$$



$$\chi = V - E + F = 2 - 3 + 2 = 1$$

球面三角形的内角和

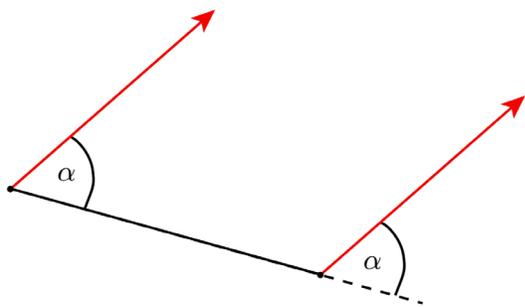


$$\phi = \frac{1}{2\pi} \iint K dS$$

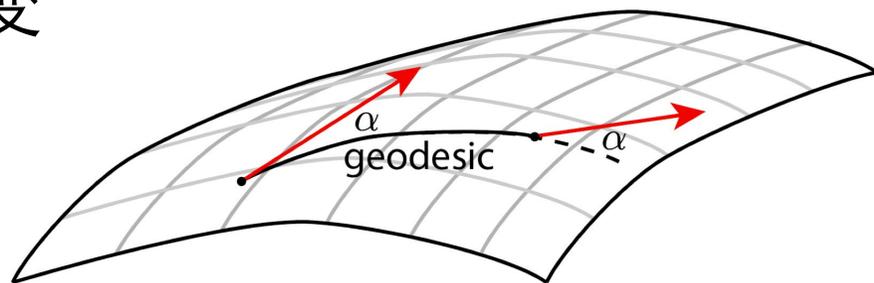
对平直空间的偏离

平行转移

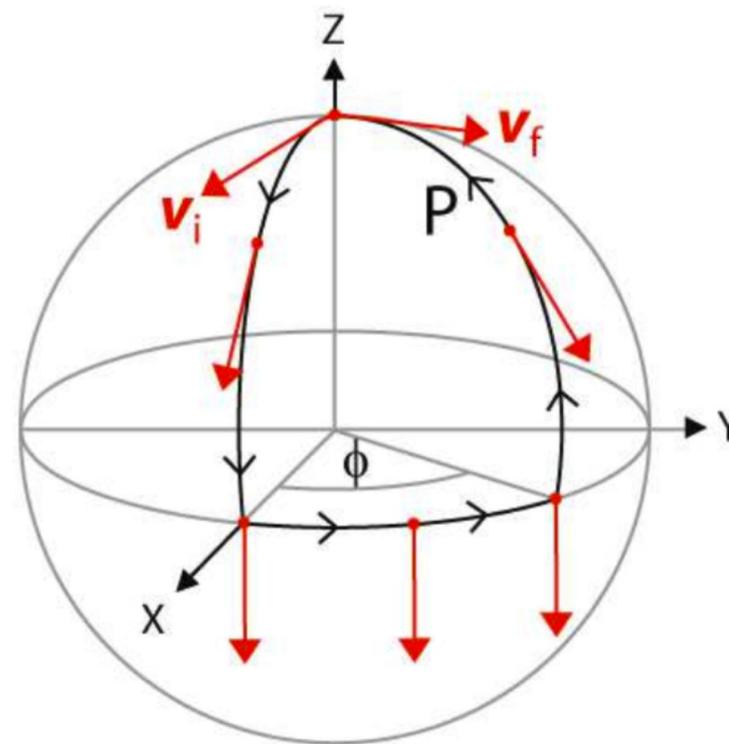
平直空间中的转移：
向量与两点连线的夹角不变



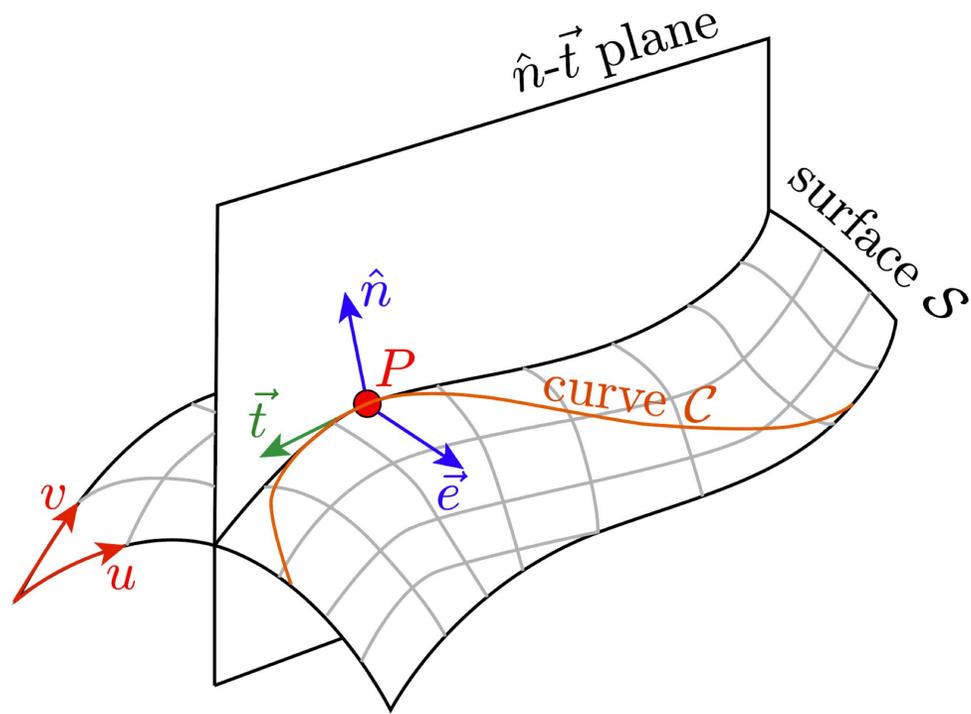
一般曲面空间中的转移：
向量与两点的测地线的夹角不变



球面示例



平行转移约束



平行转移切平面的矢量 \mathbf{a}

切平面的约束 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0$

矢量 \mathbf{a} 的变化 (转动) : $\dot{\mathbf{a}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}$

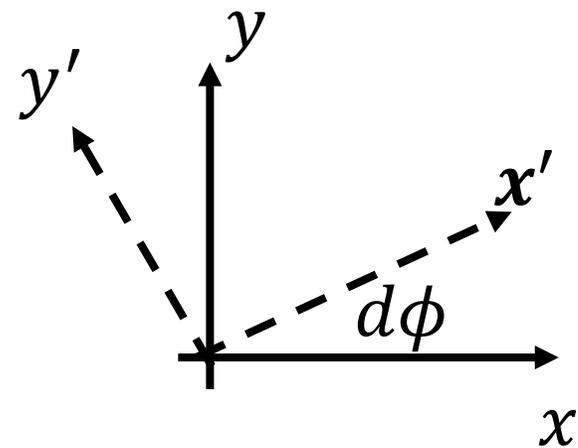
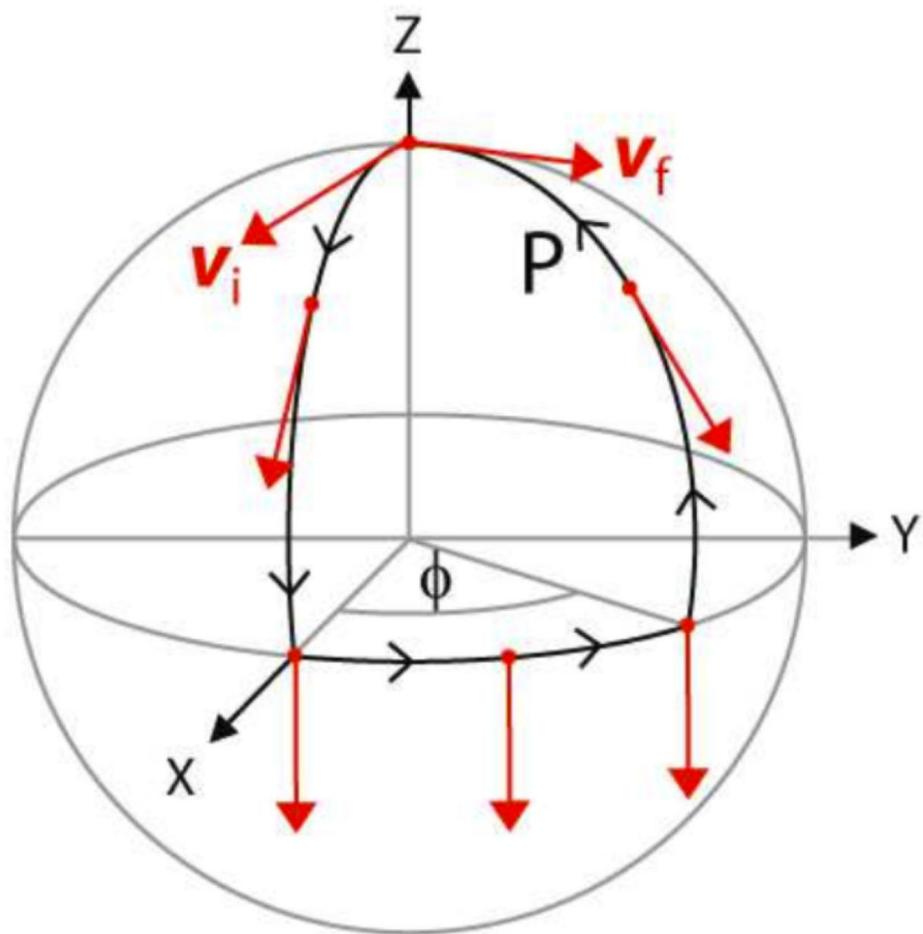
平行转移的约束: $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} = 0$

补充局域坐标架: $\mathbf{b} = \mathbf{n} \times \mathbf{a}$

定义切空间的复矢量: $|\eta\rangle = \mathbf{a} + i \mathbf{b}$

平行转移 $\Leftrightarrow \langle \eta | i \partial | \eta \rangle = 0$

非和乐角



$$|\eta\rangle = x + i y$$

$$\begin{aligned} \langle \eta | i \partial | \eta \rangle d\lambda &= i \langle \eta | \eta' \rangle - i \\ &= i e^{-i d\phi} - i \\ &= d\phi \end{aligned}$$

$$\phi = \oint \langle \eta | i \partial | \eta \rangle d\lambda$$

量子力学中的对应

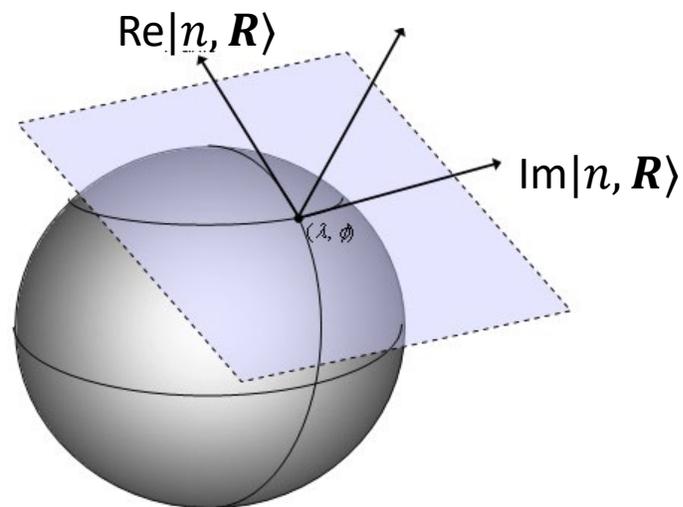
	曲面几何	量子力学中的对应
坐标架	局域坐标	参数空间
基矢	切平面的基矢	哈密顿量本征矢
平行转移	$\langle \eta i\partial \eta \rangle = 0$	$\langle \psi i\partial \psi \rangle = 0$
非和乐性	非和乐角	贝利相位
曲率	高斯曲率	贝利曲率
拓扑数	欧拉数	陈数

参数空间

哈密顿量依赖于参数，本征态也会有此性质

$$H(\mathbf{R})|n, \mathbf{R}\rangle = E_n(\mathbf{R})|n, \mathbf{R}\rangle \longleftarrow \text{相角不确定}$$

本征矢为复数，以其实部和虚部类比于参量空间的“切空间”



$$|\eta\rangle = \mathbf{a} + i \mathbf{b} \rightarrow |n, \mathbf{R}\rangle$$

量子态的演化

薛定谔方程

$$i\partial_t|\psi\rangle = H(\mathbf{R}(t))|\psi\rangle$$

瞬时本征矢分解

动力学相位

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n(t) e^{-i\theta_n(t)} |n, \mathbf{R}(t)\rangle$$

$$\theta_n(t) = \int^t \frac{dt'}{\hbar} E_n[\mathbf{R}(t')]$$

求解

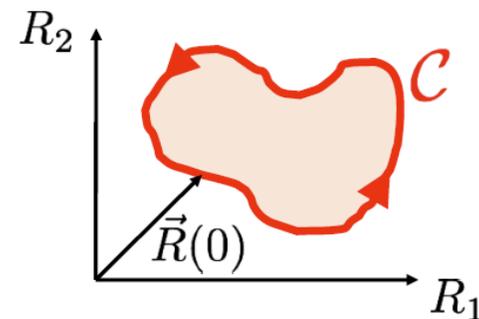
$$\begin{aligned} \partial_t c_n(t) &= - \sum_m c_m(t) \langle n, \mathbf{R}(t) | \partial_t | m, \mathbf{R}(t) \rangle \\ &= - c_n(t) \langle n, \mathbf{R}(t) | \partial_t | n, \mathbf{R}(t) \rangle \\ &\quad - \sum_{m \neq n} c_m(t) \langle n, \mathbf{R}(t) | \partial_t | m, \mathbf{R}(t) \rangle \end{aligned}$$

贝利相位：绝热循环演化

绝热条件： $\mathbf{R}(t)$ 变化足够缓慢， n 指标没有变化

$$\partial_t c_n(t) = -c_n(t) \langle n, \mathbf{R}(t) | \partial_t | n, \mathbf{R}(t) \rangle$$

循环演化： $\mathbf{R}(T) = \mathbf{R}(0)$



取如下解形式

$$c_n(t) = e^{i\gamma_n(t)}$$

相位满足如下方程

$$\partial_t \gamma_n(t) = i \langle n, \mathbf{R}(t) | \partial_t | n, \mathbf{R}(t) \rangle = i \langle n, \mathbf{R}(t) | \partial_{\mathbf{R}} | n, \mathbf{R}(t) \rangle \cdot \dot{\mathbf{R}}$$

贝利相位

$$\gamma_n(t) = i \oint \langle n, \mathbf{R}(t) | \partial_{\mathbf{R}} | n, \mathbf{R}(t) \rangle d\mathbf{R}$$

平行转移：量子版本

构造如下态矢量

$$|\eta_n\rangle = e^{i\gamma_n(t)} |n, \mathbf{R}\rangle$$

其将满足如下方程

$$\langle \eta_n | \partial_t | \eta_n \rangle = 0$$

此态矢量在参量空间中被平行转移

贝利相位即为非和乐角

