2020 1202 管

主题：$\boxed{\text{重整化群}}$

复习：重整化 { 抵消项 $\phi=Z\phi_r$, $m\to m_r$, $\lambda\to\lambda_r$, $h=h_r+\delta h$ ... 消圈 ⇒ β
↕有密切关系
RG (Wilson)

→ (cmp model 复杂，用起来不方便，抵消项数多
粒子物理常用 QED,QCD（简单 model 常用）)

适合于研究"相变"（Scale invariant $\boxed{\phi(\lambda x)=\lambda^{-v}\phi(x)}$）

{ gapped $g(x)\sim e^{-x/\xi}$（短程关联）⇒ 经典
gapless/相变点 $g(x)\sim\frac{1}{x^v}$（长程相互作用）⇒ 细节无关（与 Λ 无关）

细节无关 如 Ising model → Block 手 ⇓ (Kardanoff)

相变由低能物理决定 ⇒ 去掉高能，剩下低能 L

不断乘入 rescal ⇒ 找 fixed point ⇒ model 不变

课程开始：cmp 的书基本都是 RG

RG 都是半群：$R_{g'}R_g(\lambda)=R_g(\lambda')=\lambda''$

⇒ $R_{g'g}(\lambda)=\lambda''$ ⇒ $R_{g'}R_g=R_{g'g}$ 但无逆

☆ Model ϕ^4 model ⇒ peskin chap 12 $d=4$ 推 LGM

Cmp 一模一样 model：① 磁化 $\vec{m}(x)$ (vector) ⇒ $d=3$ (Ref: { Simons, textbook
Kardon，统计场物理

/ 关于 LGM：Gell-man, Low：标量场 $g_{ij}(\partial_\mu\Sigma^i)(\partial^\mu\Sigma^j)$ → Sigma

peskin：$\phi=\phi_{cl}+\delta\phi=(6,\cdots,0)+\vec{\pi}$)

② BEC for 相互作用系统 $d=3$

目的：解决 cmp 问题

比较：$d=3+1$

① $Z=\int D\phi\, e^{-\int dx[\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2+\frac{m^2}{2}\phi^2+\frac{\lambda}{4!}\phi^4]}$ (ϕ^4)

② $H(\vec{m})=\frac{t}{2}(Dm)^2+k\vec{m}^2+\lambda\vec{m}^4$

$Z=\int D\vec{m}\, e^{-\beta\int H d\vec{x}}=\int D\vec{m}\, e^{-\beta\int[\frac{t}{2}(D\vec{m})^2+k\vec{m}^2+\lambda\vec{m}^4]d\vec{x}}$ (磁化)

可看作 3 分量的 ϕ^4 理论 $d=3$

③ $H=\int dx\,\phi^*(-\frac{\hbar^2}{2m}D^2-\mu)\phi+g|\phi|^4$ (BEC interaction)

$\phi\in\mathbb{C}$，$\phi=\phi_1+i\phi_2$

$Z=\int D\phi^* D\phi=e^{-\beta\int dx\,\phi^*(-\frac{\hbar^2}{2m}D^2-\mu)\phi+g|\phi|^4}$

由 $\boxed{h=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2-\frac{m^2}{2}\phi^2-\frac{\lambda}{4!}\phi^4}$

☆ 标度维数（peskin chap 10）参数与能标之间的关系

2 种不同定义：$g\sim L^v$ or $g\sim\Lambda^{-v}$

由 $S=\int dx\, h=\int dx[\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2-\frac{m^2}{2}\phi^2-\frac{\lambda}{4!}\phi^4+g_n\phi^n]$

$[X]=[L]=1$ ∴ $[dx]=[L^d]=d$，$[S]=0$ ∴ $[h]=[L^{-d}]=-d$

又 $[\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2]=[(\frac{\phi}{L})^2]$ ⇒ $[L^d][(\frac{\phi}{L})^2]=0$ ⇒ $[\phi]=1-\frac{d}{2}$

$[\frac{m^2}{2}\phi^2]=-d=2[m]+2-d$ ⇒ $[m]=-1$

$[\frac{\lambda}{4!}\phi^4]=-d=[\lambda]+4-2d$ ⇒ $[\lambda]=d-4$

$[g_n\phi^n]=-d=[g_n]+n-\frac{nd}{2}$ ⇒ $[g_n]=n(\frac{d}{2}-1)-d$

(若 $n=3$，则 $[g_3]=3(\frac{d}{2}-1)-d=\frac{1}{2}(d-6)$)

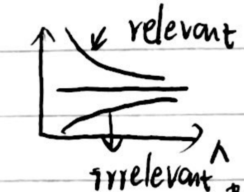
$[m]=-1$ 意味着 $\boxed{m\sim L^{-1}\sim\Lambda}$ 与 d 无关（维度）

同理 $g_4\sim L^{d-4}\sim\Lambda^{4-d}$

$g_3\sim L^{\frac{1}{2}(d-6)}\sim\Lambda^{\frac{1}{2}(6-d)}$

取名：λ^{ν} $\delta r = \Lambda^{\nu}$

- relevant $\quad \nu > 0 \Rightarrow$ 低能时很强 $\Rightarrow$ 不能用微扰
- marginal $\quad \nu = 0$
- irrelevant $\quad \nu < 0 \Rightarrow$ 低能不重要
  - perturbation works



标度变换定义：

指数意义 / 当标度变换 $x \to x' = \lambda x$ 时的标度行为

$S = \int dx \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 = \int dx' \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi(x')}{dx'}\right)^2$

令 $x' = \lambda x$，S 不变

$= \lambda^{d-2}\int dx \left(\frac{d\phi(\lambda x)}{dx}\right)^2$

定义 $\phi(\lambda x) = Z\phi(x)$（场 wf 重整化）

$= \lambda^{d-2} Z^2 \int dx \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2$

$\Rightarrow Z^2 = \lambda^{2-d} \Rightarrow Z = \lambda^{1-\frac{d}{2}} \Rightarrow [\phi] = [Z] = 1 - \frac{d}{2}$

又 $\int dx\, g_4 \phi^4 = \int g_4' \phi^4(x') dx' = \int \lambda^d g_4' \phi^4(\lambda x) dx$

$= \lambda^d g_4' Z^4 \phi^4(x) dx \Rightarrow \lambda^d g_4' Z^4 = g_4$

令 $g_4' = Z' g_4 \Rightarrow Z' Z^4 \lambda^d g_4 = g_4 \Rightarrow Z' = \lambda^{-d}\lambda^{2d-4}$

$= \lambda^{d-4} \Rightarrow [Z'] = d-4 \Rightarrow \boxed{Z' \simeq \lambda^{d-4} \sim \Lambda^{4-d}}$

不讲 费曼图（图论知识 $\to$ $V - L + F = 2$（Euler）

用振荡项时对发散度作预判

partition function / Wick rotation 之用

计算：$Z = \int D\phi\, e^{-\int dx\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right]} \to H$ or energy

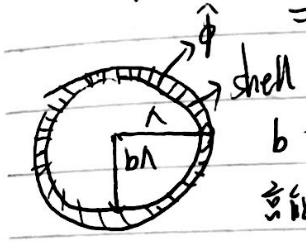
ref：peskin 书 chap 12.1 P394–P400 you 后纪来

cutoff 问题：
- 维度正规化 $\Rightarrow$ Feskin（gauge 场保持 gauge 不变）
- 老师用的是 cutoff

$Z = \int [D\phi]_\Lambda\, e^{-\int dx\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right]}$

$\downarrow \prod_{|k| \le \Lambda} D\phi(k)$（$\Lambda$ 是任意的，之后用了截断 $\Rightarrow \Lambda$ 与 Z 有关

$\Rightarrow$ 3.99 后，临界指数与 Z 有关



$b = 1 - dl \simeq e^{-dl}$，$dl \to 0^+$

高能与低能的区分是人为的，不是自然的

$\therefore \int [D\phi]_\Lambda = \int [D\phi]_{b\Lambda}[D\hat{\phi}]_{b\Lambda - \Lambda}$

$\therefore Z = \int [D\phi]_\Lambda [D\hat{\phi}]_{b\Lambda-\Lambda}\, e^{-\int dx \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi + \partial_\mu\hat{\phi})^2 + \frac{m^2}{2}(\phi+\hat{\phi})^2 + \frac{\lambda}{4!}(\phi+\hat{\phi})^4}$

其中 $(\partial_\mu\phi + \partial_\mu\hat{\phi})^2 = (\partial_\mu\phi)^2 + (\partial_\mu\hat{\phi})^2 + \int 2(\partial_\mu\phi)\cdot(\partial_\mu\hat{\phi})\, dx$

$\equiv 0$

$\int \partial_\mu\phi\, \partial_\mu\hat{\phi}\, dx \xrightarrow[\text{变换}]{\text{FT}} \int k_\mu e^{-ikx} q^\mu e^{-iq\cdot x} dx$

$|k| < b\Lambda \quad b\Lambda \le |q| \le \Lambda$

这个积分有贡献只有 $k+q=0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{所以无交叉项}} \to$ 同（

$(\phi + \hat{\phi})^4 = \phi^4 + \hat{\phi}^4 + 4\phi^3\hat{\phi} + 4\phi\hat{\phi}^3 + 6\phi^2\hat{\phi}^2$

$S[\phi]=\int dx\ \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2+\frac{m}{2}\phi^2+\frac{\lambda}{4!}\phi^4$

$=\int[D\phi]_{b\Lambda}\ e^{-S[\phi]}\int[D\hat\phi]_{b\Lambda-\Lambda}^{shell}\ e^{-\int dx\ \frac{1}{2}(\partial_\mu\hat\phi)^2+\frac{m^2}{2}\hat\phi^2+\frac{\lambda}{4!}\hat\phi^4+}$

$\frac{\lambda}{6}\phi^3\hat\phi+\frac{\lambda}{6}\phi\hat\phi^3+\frac{\lambda}{4}\phi^2\hat\phi^2 \to$ 4次和 λ 有关 $(\lambda=\lambda_\Lambda)$

☆基本写法：$\int dx\ f(x)p(x)=\frac{\int f(x)p(x)dx}{\int p(x)dx}\cdot\int p(x)dx=\langle f\rangle_p\int p(x)dx$ → 分布

☆ 如何做 perturbation？ λ项 perturbation

☆ $\lambda+m$ 项 (peskin $|m|\ll\Lambda$) $\to U$ 对 $S[\phi]$ 而修正 + Const (与 ϕ 无关)

$=\int[D\phi]_{b\Lambda}e^{-S[\phi]}Z^{?}\langle e^{-\int dx\,(\frac{\lambda}{4!}\hat\phi^4+\frac{\lambda}{6}\phi\hat\phi^3+\frac{\lambda}{6}\phi^3\hat\phi+\frac{\lambda}{4}\phi^2\hat\phi^2)}\rangle_{\hat Z}$

$Z^{?}=\int[D\hat\phi]_{b\Lambda-\Lambda}e^{-\int dx\ \frac{1}{2}(\partial_\mu\hat\phi)^2+\frac{m^2}{2}\hat\phi^2}$

$=\int[D\phi]_{b\Lambda}e^{-S[\phi]}Z^{?}\langle e^{-U}\rangle_{Z^?}$

利用 $\langle e^{-U}\rangle=e^{-\langle U\rangle+\frac{1}{2}(\langle U^2\rangle-\langle U\rangle^2)+\cdots}$ (累积量展开)

↓ 截断到 δ^2

or $e^{\sum\frac{(-1)^2}{2!}\langle u^2\rangle_c}$ = 展开

一阶：$\phi\hat\phi\hat\phi\hat\phi=0$ $\quad\hat\phi\phi\phi\phi=0$ $\quad\phi\phi\hat\phi\hat\phi$ 有贡献 $\quad\hat\phi^4$ const. 可扔

$\therefore e^{-\int dx\ \phi^2(x)\langle\hat\phi^2(x)\rangle_?}$ ☆ $\langle\phi(x)\phi(y)\rangle=g(x-y)$ 关联函数只与距离有关

$\therefore\langle\hat\phi^2(x)\rangle_?\to$ const. 且 $g(0)$

$\therefore$ 一阶贡献 $e^{-\frac{\lambda}{4}\int dx\ \phi^2(x)\langle\hat\phi(x)\rangle_{?}}=e^{-\frac{\Delta m}{2}\int dx\ \phi^2(x)}$

$\Delta m=\frac{\lambda}{2}\langle\hat\phi(x)\rangle_?$ ☆ shell 重要性质 ⇒ 很多FD不贡献 (无法同时满足约束)

→ $\frac{1}{V^2}\sum_{kk'}$ → 否则 不会收敛结果

☆ Textbook $\langle T\phi(x)\phi(y)\rangle=\boxed{\frac{1}{V}\sum_k}\frac{ie^{-ik(x-y)}}{k^2-m^2+i\varepsilon}$ 成对 p290 eq (before Wick rotation)

$\sum_k f(k)=\frac{V}{(2\pi)^3}\int f(k)dk \Rightarrow \frac{1}{V}\sum_k f(k)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int f(k)dk$ 加上 $\frac{1}{V}$ 保持 finite

$\therefore\Delta m=\frac{\lambda}{2}\langle\hat\phi^2(x)\rangle_?=\frac{\lambda}{2}\frac{1}{V}\sum_{b\Lambda\le|k|\le\Lambda}\frac{1}{k^2+m^2}=\boxed{\frac{\lambda}{2}\ \text{(loop)}}$ (只是对shell求和)

→ $b\Lambda\le\Lambda$

↑ $|k|\le b\Lambda$

$=\frac{\lambda}{2}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{b\Lambda\le|k|\le\Lambda}dk\ \frac{1}{k^2+m^2}=\frac{\lambda}{2(2\pi)^d}\frac{1}{\Lambda^2+m^2}C_d(\Lambda^d-b^d\Lambda^d)$

☆ $V_d=C_dR^d$ (球) → 环面积

总结：$\boxed{Z'''=\int[D\phi]_{b\Lambda}e^{-\int dx\ \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2+\frac{m^2+\Delta m}{2}\phi^2+\frac{\lambda}{4!}\phi^4}}$

rescal $|k|\le b\Lambda$ 令 $k=bk'\Rightarrow(\frac{k}{b})\Rightarrow|k'|\le\Lambda$

同时 $bx=x'\Rightarrow x\to bx$ $[\phi]$ 相应变化

注：配分函数不能改变 ⇒ 否则 自由度改变

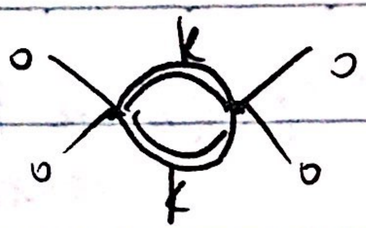
二阶贡献 (引入 Landau)

↓ 相互作用 修正

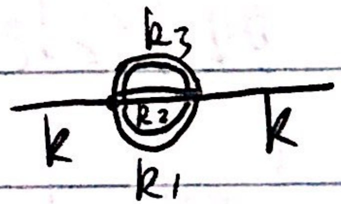
$\hat\phi^6\phi^2$

WP 重整化

$\hat\phi^2\phi^6$ 可产生 新的相互作用 $\lambda_6\phi^6$ 是 irrelevant (表现发散度)



$$\propto \frac{1}{V}\sum_k \lambda^2 \frac{1}{(k^2+m^2)^2} = \frac{\Lambda^2}{(2\pi)^d}\frac{1}{(\Lambda^2+m^2)^2} C_d \Lambda^d (1-b)$$



$b\Lambda \le |k_3| \le \Lambda$

$k_1+k_2+k_3=0$

自由能与k有关一定会对自由能作出修正

补. $\begin{cases}[\phi]=1-\frac{d}{2}\\ [\lambda]=4-d\end{cases}$ 若 $d=4$ 为 ϕ^4 marginal

$d=2$ 则 $[\phi]=0 \Leftrightarrow \sin[\phi]$ 这里允许所

$\Rightarrow$ BKT相变 (Thouless)