

图 47

本节列举的规则和 $T = 0$ 时计算格林函数修正项的相应规则有简单关系. 容易验证, 只须在 $T = 0$ 时格林函数 G 修正项的表达式中将所有频率 ω 换成 $i\omega_n$ (对玻色粒子 $\omega_n = 2n\pi T$, 费米粒子 $\omega_n = (2n+1)\pi T$), 并将对频率的积分换成求和:

$$\frac{1}{2\pi} \int d\omega \cdots \rightarrow iT \sum_{\omega_n} \cdots,$$

就可以得到对温度格林函数 \mathfrak{G} 的修正项.

最后讨论, 上述方法如何过渡到 $T = 0$ 的情形. 当 T 趋近零时对频率的求和中大的 n 起主要作用, 因而这些和可换成积分. 注意 $\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = 2\pi T$, 就得到

$$T \sum_{\omega_n} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int d\omega.$$

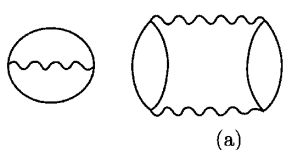
应强调指出, $T = 0$ 时 $\mathfrak{G}(\omega)$ 决不和 $G(\omega)$ 重合. 以后将确定它们之间的关系.

§15 热力学势 Ω 的微扰论级数

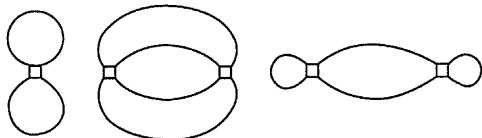
有时直接计算热力学势 Ω , 比先找格林函数, 再求热力学量要方便. 热力学势的修正项通过 \mathfrak{G} 矩阵的平均值表示 (见 (12.11) 式):

$$\begin{aligned} \Delta\Omega &= -T \ln \langle \mathfrak{G} \rangle, \\ \mathfrak{G} &= \exp \left\{ - \int_0^{1/T} \hat{H}_{\text{int}}(\tau) d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (15.1)$$

原来 (15.1) 式中的对数可以用一般形式写出; 更确切些说, 可以建立直接计算 Ω 的图解法. 从以前所述显而易见, 描述 Ω 的微扰论级数的图形乃是封闭环. 双粒子相互作用两种方案的典型图形示于图 48(a) 和图 48(b), 与声子作用的图形示于图 49(事实上图 49(a) 的图形等于零).

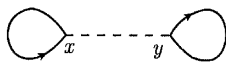


(a)

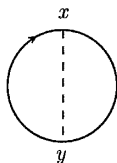


(b)

图 48



(a)



(b)

图 49

微扰论一定级图形分为两类——相连和不相连图形。后者乃是两个或更多无任何线相连的封闭环。如果按照维克定理将 (\mathcal{G}) 级数的任意项

$$\frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{1/T} \cdots \int_0^{1/T} d\tau_1 \cdots d\tau_n \langle T_\tau (\hat{H}_{\text{int}}(\tau_1) \cdots \hat{H}_{\text{int}}(\tau_n)) \rangle \quad (15.2)$$

写开，从 $\hat{H}_{\text{int}}(\tau_1)$ 中的某个算符开始收缩，最后不空过任何一个 \hat{H}_{int} 而回到 $\hat{H}_{\text{int}}(\tau_1)$ ，则得到相连图形。任何其他情况下都出现不相连图形。

设 n 级不相连图形由 k 个封闭环构成。先假定 k 个环都含有不同数目的顶点。这样的图对应：

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^n}{n!} \int d\tau_1^{(1)} \cdots d\tau_{m_1}^{(1)} \langle T_\tau (\hat{H}_{\text{int}}(\tau_1^{(1)}) \cdots \hat{H}_{\text{int}}(\tau_{m_1}^{(1)})) \rangle_c \\ & \times \int d\tau_1^{(2)} \cdots d\tau_{m_2}^{(2)} \langle T_\tau (\hat{H}_{\text{int}}(\tau_1^{(2)}) \cdots \hat{H}_{\text{int}}(\tau_{m_2}^{(2)})) \rangle_c \\ & \cdots \int d\tau_1^{(k)} \cdots d\tau_{m_k}^{(k)} \langle T_\tau (\hat{H}_{\text{int}}(\tau_1^{(k)}) \cdots \hat{H}_{\text{int}}(\tau_{m_k}^{(k)})) \rangle_c, \end{aligned} \quad (15.3)$$

其中

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n (m_1 \neq m_2 \neq \cdots \neq m_k),$$

符号 $\langle \cdots \rangle_c$ 表示对应于一定相连图形的求平均。现在将一切包含我们选定的 k 种封闭环的拓扑等价图形求和。为此只须将 (15.3) 式乘以这类图形的数目 F_k 。后者等于将 n 个不同算符 \hat{H}_{int} 按 k 个同“容器” $\langle \cdots \rangle_c$ 分配的排列数，其中每个“容器”可容纳 m_1, m_2, \cdots, m_k 个算符，即

$$F_k = \frac{n!}{m_1! m_2! \cdots m_k!}.$$

结果为

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{m_1}}{m_1!} \int d\tau_1^{(1)} \cdots d\tau_{m_1}^{(1)} \left\langle T_\tau \left\{ \hat{H}_{\text{int}}(\tau_1^{(1)}) \cdots \hat{H}_{\text{int}}(\tau_{m_1}^{(1)}) \right\} \right\rangle_c \\ & \times \frac{(-1)^{m_2}}{m_2!} \int d\tau_1^{(2)} \cdots d\tau_{m_2}^{(2)} \left\langle T_\tau \left\{ \hat{H}_{\text{int}}(\tau_1^{(2)}) \cdots \hat{H}_{\text{int}}(\tau_{m_2}^{(2)}) \right\} \right\rangle_c \\ & \cdots \frac{(-1)^{m_k}}{m_k!} \int d\tau_1^{(k)} \cdots d\tau_{m_k}^{(k)} \left\langle T_\tau \left\{ \hat{H}_{\text{int}}(\tau_1^{(k)}) \cdots \hat{H}_{\text{int}}(\tau_{m_k}^{(k)}) \right\} \right\rangle_c. \end{aligned} \quad (15.4)$$

注意, 我们实质上可以立即放弃关于每个求平均 $\langle \cdots \rangle_c$ 对应一定类型相连图的假定, 而简单地认为 $\langle \cdots \rangle_c$ 乃是所有具有给定顶点数目的相连图形之和. 因而可以肯定, 一切包含有 m_1, m_2, \cdots, m_k 个顶点的 k 个封闭环的图形之和乃是

$$\Xi_{m_1} \Xi_{m_2} \cdots \Xi_{m_k},$$

其中

$$\Xi_m = \frac{(-1)^m}{m!} \int d\tau_1 \cdots d\tau_m \left\langle T_\tau \left\{ \hat{H}_{\text{int}}(\tau_1) \cdots \hat{H}_{\text{int}}(\tau_m) \right\} \right\rangle_c, \quad (15.5)$$

就是 $\langle \mathfrak{G} \rangle$ 中所有 m 级相连图形之和. 显然,

$$1 + \Xi_1 + \Xi_2 + \cdots = \langle \mathfrak{G} \rangle_c. \quad (15.6)$$

如果数字 m_1, m_2, \cdots, m_k 中有相同者, 则图形分解成 $p_1 + p_2 + \cdots + p_k$ 个闭环, 它们各有 m_1, m_2, \cdots, m_k 个顶点 ($m_1 \neq m_2 \neq \cdots \neq m_k$), 则可以证明, (15.5) 式应换成^①

$$\frac{1}{p_1!} \Xi_{m_1}^{p_1} \frac{1}{p_2!} \Xi_{m_2}^{p_2} \cdots \frac{1}{p_k!} \Xi_{m_k}^{p_k}, \quad (15.7)$$

或者, 相同地

$$\frac{1}{p_1!} \Xi_1^{p_1} \frac{1}{p_2!} \Xi_2^{p_2} \cdots \frac{1}{p_l!} \Xi_l^{p_l}, \quad (15.8)$$

其中数字 p_l ($p_l = 0, 1, 2, \cdots$) 表明, 在整个不相连图形中含有多少个 l 级闭环. 将 (15.8) 式对所有的 p_l 求和 (不同 p_l 的求和显然是彼此无关的), 就得到:

$$\langle \mathfrak{G} \rangle = \sum_{p_1, p_2, \cdots} \frac{1}{p_1!} \Xi_1^{p_1} \frac{1}{p_2!} \Xi_2^{p_2} \cdots$$

① 这个论断的正确性可检验如下. 当数字 m_1, m_2, \cdots, m_k 中有相同者时, F_k 就等于把 $p_1 m_1 + p_2 m_2 + \cdots + p_k m_k = n$ 个算符 \hat{H}_{int} , 按各含 m_1, m_2, \cdots, m_k 个位置的 $p_1 + p_2 + \cdots + p_k$ 个容器 $\langle \cdots \rangle_c$ 排列的数目, 而且每 p_1, p_2, \cdots, p_k 个容器是相同的. 这时 F_k 等于

$$F_k = \frac{n!}{p_1! (m_1!)^{p_1} p_2! (m_2!)^{p_2} \cdots p_k! (m_k!)^{p_k}}.$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{p_1} \frac{1}{p_1!} \Xi_1^{p_1} \sum_{p_2} \frac{1}{p_2!} \Xi_2^{p_2} \dots = e^{\Xi_1} e^{\Xi_2} \dots \\
 &= \exp \{ \Xi_1 + \Xi_2 + \dots \}.
 \end{aligned} \tag{15.9}$$

最后将 (15.9) 式代入 (15.1) 式, 就有

$$\Delta \Omega = -T(\Xi_1 + \Xi_2 + \dots) = -T\{(\mathfrak{G})_c - 1\}. \tag{15.10}$$

这样我们就得到了十分重要的结果: 为了计算热力学势的修正项, 只须求得相连图形对 $\langle \mathfrak{G} \rangle$ 的贡献.

我们已经指出过, $\langle \mathfrak{G} \rangle$ 的图形是封闭环, 其计算规则基本上同于 \mathfrak{G} 函数. 唯一的差别在于图形的系数.

我们在 §12 中指出, 如果考虑拓扑等价图形 (其数目正好是 $n!$ 个) 的贡献, 则 \mathfrak{G} 函数的微扰论级数 (12.13) 的系数 $\frac{1}{n!}$ 正好消去. 计算 $\langle \mathfrak{G} \rangle_c$ 时情况变了. 级数 (12.12) 式 n 级项的等价图形数目等于 $(n-1)!$ ^①, 结果每个图形 (如果认为只有拓扑不等价图形才是不同的) 前面出现系数 $\frac{1}{n}$. 由于出现了和 n 密切相关的系数, 就使 Ω 的微扰论级数的计算颇为不便, 特别是当不能局限于级数的有限项, 而必须对图形的无穷序列求和时.

我们举几个计算修正项 $\Delta \Omega$ 的例子, 为了简单起见, 只限于和声子相互作用的情况. 在微扰论第二级近似只有图 49(b) 的相连图形不为零. 按维克定理计算它的贡献, 得到 $\Omega_2 = -T \Xi_2$ (使用四维符号):

$$\Omega_2 = \pm \frac{1}{2} T g^2 \int d^4 x d^4 y \mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)}(x-y) \mathfrak{G}_{\beta\alpha}^{(0)}(y-x) \mathfrak{D}^{(0)}(x-y).$$

只要在积分中引入新变量 $x' = x - y$, 就容易看出 Ω_2 正比于系统的体积 V . 在任何一级近似都是这样. 事情也正应如此, 因为我们知道热力学势 Ω 的形式是

$$\Omega = -VP(\mu, T),$$

其中 P 是压力, 为化学势和温度的函数. 因此我们以后只给出 ΔP 的公式;

$$P = P_0(\mu, T) + \Delta P,$$

其中 P_0 是自由粒子系统的压力.

① 在 (12.12) 式中以一切可能方式置换 $n-1$ 个算符 \hat{H}_{int} , 就得到所有拓扑等价图. \hat{H}_{int} 算符之一应固定. 在计算 \mathfrak{G} 时, 外线的首尾, 即 (12.13) 式中算符 $\psi_\alpha(\tau_1, \tau_1) \bar{\psi}_\beta(\tau_2, \tau_2)$ 是固定的.

对 ΔP_2 有

$$\Delta P_2 = \mp \frac{1}{2} g^2 \int d^4 x \mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)}(x) \mathfrak{G}_{\beta\alpha}^{(0)}(x) (-x) \mathfrak{D}^{(0)}(x). \quad (15.11)$$

变换到动量表象, 我们得到

$$\begin{aligned} \Delta P_2 = & \mp \frac{1}{2} g^2 \frac{T^2}{(2\pi)^6} (2s+1) \sum_{\omega_1, \omega_2} \int dp dk \\ & \times \frac{1}{i\omega_1 - \varepsilon_0(\mathbf{p}) + \mu} \frac{1}{i(\omega_1 + \omega_2) - \varepsilon_0(\mathbf{p} + \mathbf{k}) + \mu} \\ & \times \frac{\omega_0^2(\mathbf{k})}{\omega_2^2 + \omega_0^2(\mathbf{k})}. \end{aligned}$$

其图形示于图 50.

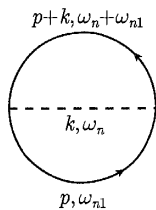


图 50

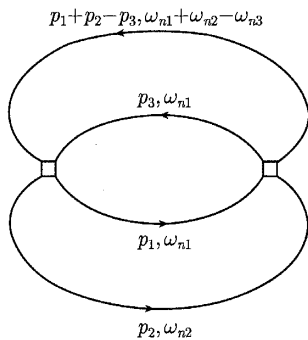


图 51

讨论任意 $2n$ 级图形. 这样的图形有 $3n$ 条线和 $2n$ 个顶点. 然而 $2n$ 个守恒律中有一个是恒等式, 只要其他 $2n-1$ 个守恒律成立. 这样, $2n$ 级图中共有 $n+1$ 个独立积分. 多出的一个守恒律使 $\langle \mathfrak{G} \rangle$ 的图中出现附加因子 $\delta(\mathbf{p} = 0)$, 它正比于系统的体积 V ^①. 图形各元素和格林函数 (以及其他相互作用时的顶角部分) 的对应规则, 仍同于 \mathfrak{G} 函数的图. ΔP 的 $2n$ 级修正项的系数等于

$$M_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} g^{2n} \left(\frac{T}{(2\pi)^3} \right)^{2n} (\mp 1)^F (2s+1)^F,$$

其中 F 是由一条 \mathfrak{G} 粒子线组成的封闭环数目.

① 根据定义:

$$\delta(\mathbf{p} = 0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{r} = \frac{V}{(2\pi)^3}.$$

下面给出双粒子相互作用时 ΔP 的表达式. 对于形如 (13.7) 式的相互作用, 压力的二级修正项对应图 51. 它等于:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4} \frac{T^3}{(2\pi)^9} \sum_{\omega_1, \omega_2, \omega_3} \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 \frac{1}{i\omega_1 - \varepsilon_0(\mathbf{p}_1) + \mu} \\
 & \quad \times \frac{1}{i\omega_2 - \varepsilon_0(\mathbf{p}_2) + \mu} \frac{1}{i\omega_3 - \varepsilon_0(\mathbf{p}_3) + \mu} \\
 & \quad \times \frac{1}{i(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) - \varepsilon_0(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) + \mu} \\
 & \quad \times \mathcal{J}_{\alpha\beta, \gamma\delta}^{(0)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_3) \\
 & \quad \times \mathcal{J}_{\gamma\delta; \beta\alpha}^{(0)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_3; \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1).
 \end{aligned}$$

§16 戴逊方程. 多粒子格林函数

§16.1 戴逊方程

在 $T \neq 0$ 的统计问题中和温度等于零时一样, 几乎永远不能只限于微扰论级数的前几项作为对格林函数的修正. 实际上任何物理提法正确的问题中, 图解法的形式上的展开参数——相互作用哈密顿量 \hat{H}_{int} ——都并不小, 因而微扰论级数中某些无穷项序列可能给出同一数量级的贡献.

前一章里我们看到了量子场论方法中借助图解进行无穷级数的求和. 在此方法中级数之和可表示成一个图形, 其元素——线和顶点——本身又是无穷个图形之和. 这种图形元素和表达式的对应规则, 与微扰论图形一样. 因此可能为格林函数建立各种方程式. 第 2 章里我们已遇到过一个这种方程式——戴逊方程式, 它把格林函数通过系统的质量算符表示.

图解法的两个性质对于建立这种方程式颇为重要, 这就是图形的拓扑结构和图形与解析式的对应规则. $T = 0$ 时的图形与松原方法中的一样, 而对应规则的差别仅在于前者中是对频率的积分, 在后者中换成对不连续虚“频率” $i\omega_n$ 的求和; 更确切些说, 对应一定图形的温度格林函数 \mathcal{G} 的修正项, 可从对应同一图形的 $T = 0$ 时的格林函数 G 的修正项得出, 为此只须在后者中换 ω 为 $i\omega_n$, 并将积分按下式换成求和:

$$\frac{1}{2\pi} \int d\omega \cdots \rightarrow iT \sum_{\omega_n} \cdots$$

(参阅 §14 末尾).

上述情况使我们只改变一下记号, 就能直接把 §10 的全部结果用于 $T \neq 0$ 时. 例如, 在松原方法中戴逊方程式仍成立. 对于有双粒子相互作用的系统, 它的形状