第五次上课的总结：传播子、linked cluster 定理和概率论的关系

我打算用一次课的时间介绍传播子、linked cluster theorem 和概率论的关系。我以前讲过三年的多体理论，就我的感觉，这一部分是学生的难点。在传统的教材中，一般需要介绍 Gellman-Low 定理，相互作用表象，Wick 收缩以及 Dyson 方程，每个内容都是极其复杂。对于学生而言，如果不亲自证明一次，是难以理解它们的。所以，很多老师在讲课的时候，可能会忽略一些严格的证明。

Linked cluster 定理在其它地方也经常见到。一次偶然的机会，我查到了它和概率论的关系。在概率论中，我们经常会遇到两种不同的展开，一种是 moment （矩）展开，一种是累积量（cumulant）展开。熟悉统计物理的学生不难理解，我们平时的配分函数，本质上是某种傅立叶变换或者 Laplace 变换。累积量和矩的很重要的区别在于，矩是层层嵌套的，也即是说，第 100 阶的矩可能包括 1 阶、2 阶、10 阶等所有的贡献。但是累计量就不一样，第 10 阶的累计量等于 10 阶的矩中扣除所有可能的低阶的矩的贡献，所以它体现的完全是 10 个变量之间的关联。所以，我们期待，累积量随着阶数越大，它的贡献越小。

类似的关系，本质上就是格林函数中的格林函数和连通格林函数（Linked Green function）之间的关系。格林函数本质上是一种关联函数。它可以分解为少体之间的关联，扣除所有可能的低阶个体之间的关联，就是连通格林函数之间的贡献。这种美妙的关系，可能在早期的统计物理等的发展中发挥了巨大作用。我一直怀疑，Dyson，Wick 等人，也是受到概率论的启发。量子力学是算子，但是在相干态表示下，它其实就是一些数。从这个角度来说，经典和量子没有本质的区别。学生如果明白这个道理，则学习这个内容即不会太困难。否则会非常吃力。

为此，我花了很多的时间讨论<Exp[i k x]>的计算。这个证明具有典型性。在 Abrikosov 的场论书中，以及 Peskin 的书中，都用到了这个定理的证明---如果读者做详细比较会发现，这个证明和概率论中累计量展开的证明是一模一样的。它所用的技巧也是一样的。

在 Kardar 的 QFT of fields 书中，计算了如下量的平均值<O>。我们可以证明，如果作用量写成 Exp[-H0 - U], 所以上面的平均值可以写成

<O> = \sum_n <OU^n>_0^c(-1)^n/n!

其中 0 表示我们在 H0 的权重下计算平均值，c 表示 connected，即 linked 图的贡献。这个定理也可以严格证明。但是在 Kardar 书中只给出了一个简单的说明。这个说明的好处是图像非常清楚。我在一个文件中给出了严格证明---但是上课不讲了。这个定理的证明很有用，可以用在很多场合。我经常和学生讲，如果理解了这个定理的证明，也就理解了 Feynman 的一个的精髓。Feynman 图会碰到许多复杂的计算，而且阶数越高，图就会越复杂。但是这个定理保证，最后的图可以大大简化。许多图，并不需要通过计算，就明白它们不重要（可以严格和分母抵消）。这是概率论最美妙的结果之一---另外的一个美妙的结果是大数定理和中心极限定理。

为此，我上课按照这个顺序讲：

1. Gaussuan 函数的积分，我计算 \int exp[-a x^2] x^{2n} Dx = K /a^n. 这个积分在 A. Zee 的书本中有专门介绍。我们发现，这个系数 K 完全由可能的配对数决定。这个定理是 Wick 收缩的最直接的应用。对于高斯积分，这个语言可以推广到高维情况。
2. <Exp[i k x]>的计算以及累计量展开。
3. Kardar 的定理（see QFT of fields by Kardar）。 Kardar 和 Nagoasa 都有两本书。Kardar 的书很有特色，值得大家好好学习。

我介绍了为什么非连接图对物理没有贡献。一般来说，我会这样理解。即当一个粒子在传播的时候，那些和该粒子没有直接相互作用的粒子是不会对这个粒子有直接影响的。这应该是一个非常物理的理解。很难想象在合肥一个实验室的电子的传播会受到南京一个地方产生的电子空穴的影响。如果它们有贡献，则这个理论是不自洽的。从这个角度，也许学生可以理解为什么只有连通

图才会对物理有贡献。这个讨论，我一直希望找到一些书本给予更加细致的讨论，但是一直没有找到。如果有人找到了，麻烦告知我一下。

最后我简单讨论了 phi4 理论，它的定义和基本性质。下一节课，我将系统介绍 phi4 理论的重整化过程。在这个过程中，我需要用到 Green 函数, Linked cluster 定理、Wick 收缩和 Dyson 方程等。Dyson 方程我会后面介绍。在这些定理中，最重要的是这一节课的 Linked cluster theorem。