Date.　　No.

2020.10.28（第五次课）

回顾：(1) $g\delta^{(2)}(\vec{x})$，任意小的吸引都会导致负无穷能量

$\downarrow$

g_Λ

cutoff 由物理体系决定，如固体物理中 $\Lambda=\frac{\pi}{a}$.

(2) 路径积分

Path Integral: $\int DX(t)\, e^{iS[x]}$　　$X(t)$: t时刻振幅

↑ 参数为时间

DFT: $\int D\phi(\vec{x},t)\, e^{iS[\phi,\partial_\mu\phi]}$

(∞自由度)　↑ 参数为位置，时间

(3) 具体计算

$\lim_{N\to\infty}\int D\phi(x_1)\, D\phi(x_2)\cdots D\phi(x_N)\, e^{iS[\phi]}$

$S[\phi]=$ 简单部分 + 复杂部分

(二次型)　(相互作用)
(作为微扰)

但这里的微扰可能很没有道理，比如 $\to\infty$，但计算结果和实验符合.

① 实空间计算 $\xrightarrow{\text{(作业)}}$ $\det(A_N)\to$ Wen书

② ※ 动量空间计算 $\Longrightarrow$ $\vec{k}$ 好量子数 $\Rightarrow$ ∞积分变成 Gauss integral

(绝大多数问题，$\vec{k}$ 都是好量子数)

③ 变换 $O(N)$, $U(N)$ $\begin{cases} \mathbb{C}\to\mathbb{C}\text{的变换} \\ \text{FT变换} \end{cases}$

~~$*$ Jacobi: $\int dx_1\cdots dx_N=\int J\, dy_1\cdots dy_N$~~

$J=\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)_{N\times N}$　　$|J|=1$

~~在反常中 J 会有变化~~

~~$\psi\to e^{i\alpha(x)}\psi$, Anomalous QFT, Fujikawa approach~~

形式上似乎解决了 QFT 计算的主要问题，但实际上只要实际计算，一做微扰就会发散！必须要用到重正化.

我们不知道 g_Λ

唯一知道的是特征能标下的耦合常数 g_{Λ_0}　(如固体物理中 $\Lambda_0=\frac{\pi}{a}$，特征温度等)

$\Lambda\gg\Lambda_0$

g_Λ 必须和 g_{Λ_0} 对应起来，能回到 g_{Λ_0}

Date.　　No.

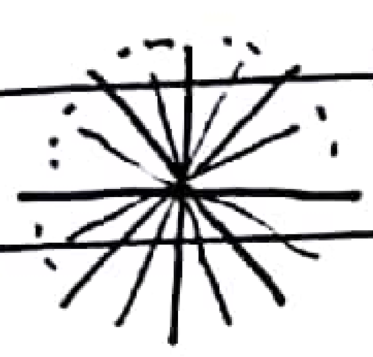
今日主要内容 $\begin{cases}\text{linked cluster theorem}\\ \text{Wick contraction}\\ \text{Feynman diag}\end{cases}$

只使用最简单的二次型形式 $\Longrightarrow$ Gauss积分 $\Longrightarrow$ 概率分布

* 概率论最早期 Fermat, Pascal

$$\int e^{-ax^2}\cdot\sqrt{\frac{a}{2\pi}}\,dx = 1$$

$$\int x^{2n} e^{-ax^2}\sqrt{\frac{a}{2\pi}}\,dx \overset{\text{当}n=10}{=\!=} \frac{654729075}{a^{10}}$$



2n条腿 的 连接方法

$$\frac{C_{2n}^2\, C_{2n-2}^2\, C_{2n-4}^2\cdots}{n!} = \frac{(2n)(2n-1)}{2\times1}\cdot\frac{(2n-2)(2n-3)}{2}\cdots = \left(\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}\right)$$

一样多

在A. Zee的书上, 放在主页上

$$\int x\cdot x\cdot x\cdot x\cdots x\; e^{-ax^2}\sqrt{\frac{a}{\pi}}\,dx$$

$$\frac{\int x^2 e^{-ax^2}dx}{\int e^{-ax^2}dx} = \frac{1}{a}$$

回到 $\int x^{2n} e^{-ax^2}\sqrt{\frac{a}{2\pi}}\,dx \overset{\text{当}n=10}{\Longrightarrow} \frac{654729075}{a^{10}}$ (分子代表有多少种组合 $\frac{20!}{2^{10}\cdot 10!}$) (分母代表 propogator)

本质上就是传播子!

Gauss函数的特点: 只有两两之间的关联, 只有"两条腿"之间的连接, 不必考虑"三条腿", "四条腿", …

※二次型函数的重要特点
- $\langle x^{2n}\rangle$ 有简单解释
- $\langle x^{2n+1}\rangle = 0$
- ~~只有两体相互作用, 无多体相互作用~~.

计算 $\langle e^{ikx}\rangle = \int P(x)\, e^{ikx}dx = (\quad)\, e^{-(\frac{k}{4a})^2}$

任意分布

换一种写法

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(ik)^n}{n!}\langle x^n\rangle \;-\; \boxed{\text{moment 分解 (矩)}}$$

Cumulant (累积量) 展开

$\langle x\rangle =$

$\langle x^2\rangle = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 + \langle x\rangle^2$

$= \sigma_2 + \langle x\rangle^2$

* 可以分解成 σ_2 的形式

$\langle x^3\rangle = \langle x\rangle^3 + 3\langle x^2\rangle\langle x\rangle + \cdots + \sigma_3$

~~moment~~

※$\langle\sigma\rangle$体现的是x与x之间真正的关联, 不能再分解

如平移无关联: 令 $x = y + \bar{x}$, $\langle y\rangle = 0$

$\sigma_2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$

$= \langle y^2 + \bar{x}^2 + 2y\bar{x}\rangle - \bar{x}^2$

$= \langle y^2\rangle$

※ n体之间的关联, 必须做到不能分解为更低的为止

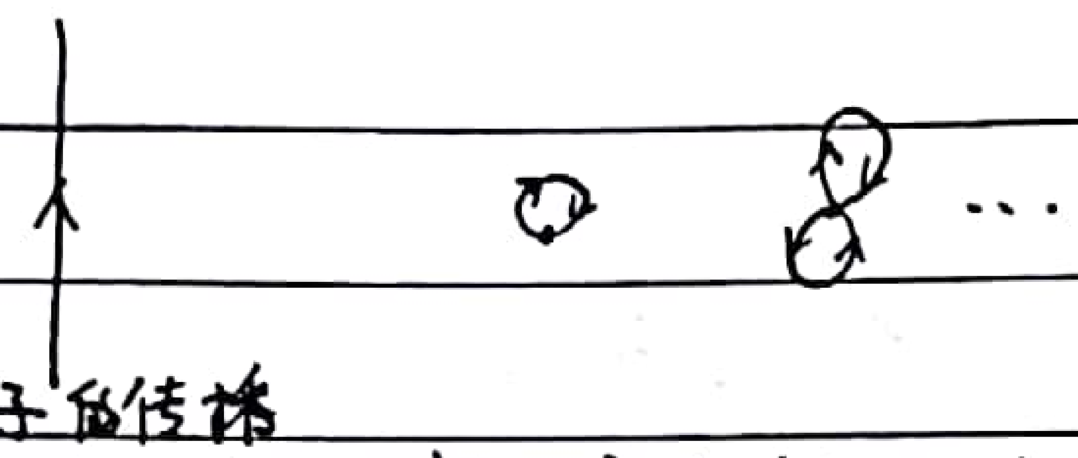
$\langle$

moment 矩分解比较麻烦，不同阶之间都嵌套耦合在一起，

Cumulant 展开就把各阶区分开

Green 函数的本质就在这里

粒子越多，阶数越高



一个粒子的传播

在远方产生湮灭的粒子应该对它应该没有什么影响.

如：$\Omega = \sum_n C_n \langle x^n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sigma_n \simeq \sum_{n=1}^{4/5} d_n \sigma_n$

期望多体关联越来越弱，$\lim_{n\to\infty} \sigma_n \to 0$，有限阶的保留即可！

作业 1. 推导 Peskin 书 4.4 - 4.5 章节

需要用到 P96 - P97 cumulant expansion.

本质上二者等价：

$$\boxed{\sum_n \frac{(ik)^n}{n!} \int P(x)\, x^n\, dx \Longleftrightarrow \sum_n \left(\frac{i\lambda}{4!}\right)^n \int e^{iS_0[\phi]} \left(\int \phi^4\right)^n D\phi}$$

Reading material

1. cumulant 展开
2. Abriksov QFT - linked custer

可以看为成
$$\begin{cases} \int P(x)\, e^{ikx} = e^{\Omega} \\ \Omega = \sum_n C_n \langle x^n \rangle = \sum_n d_n \sigma_n \end{cases}$$

下面的任务就是定出 d_n 系数

$$\Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \left(\langle x^1 \rangle_c^{n_1} \langle x^2 \rangle_c^{n_2} \langle x^3 \rangle_c^{n_3} \cdots \langle x^{10000} \rangle_c^{n_{10000}} \cdots \right)$$

标记

如：
$$\begin{cases} \langle x^2 \rangle = \langle x^2 \rangle_c + \langle x \rangle_c^2 = \sigma_2 \\ \langle x^3 \rangle = \langle x \rangle_c^3 + 3 \langle x^2 \rangle_c \langle x \rangle_c + \sigma_3 = \langle x^3 \rangle_c \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \sum_m \langle x^1 \rangle_c^{m_1} \langle x^2 \rangle_c^{m_2} \langle x^3 \rangle_c^{m_3} \cdots \langle x^l \rangle_c^{m_l} \cdots \text{权重}$$

*所有不能再分解的统统归到 $\langle x^m \rangle_c$ 中

权重计算 $(\sum_l l m_l = n)$

* $2m_2$ 个形成 $\langle x^2 \rangle_c^{m_2}$，$\dfrac{C_{2m}^2 C_{2m-2}^2 \cdots}{m!} = \dfrac{(2m)!}{2^m m!}$ 除以排列顺序

$3m_3$ 个形成 $\langle x^3 \rangle_c^{m_3}$ $\dfrac{C_{3m}^2 C_{3m-2}^2 \cdots}{m!} ? = \dfrac{(3m)!}{(3!)^m m!}$

$$\text{原式} = \sum_n \frac{(ik)^n}{n!} \sum_m \underbrace{\langle x^1\rangle_c^{m_1} \langle x^2\rangle_c^{m_2} \langle x^3\rangle_c^{m_3} \cdots}_{\text{可能展开}} \underbrace{C_n^{m_1}\left(C_{n-m_1}^{2m_2} \frac{(2m_2)!}{(2!)^{m_2} m_2!}\right)}_{\text{权重}} \left[C_{n-m_1-2m_2}^{3m_3} \frac{(3m_3)!}{(3!)^{m_3} m_3!}\right] \cdots$$

$2m_2$

$$② = \sum_n \frac{(ik)^n}{\cancel{n!}} \sum_{\sum_\ell m_\ell \ell = n} \langle x^1\rangle_c^{m_1} \langle x^2\rangle_c^{m_2} \cdots \langle x^\ell\rangle_c^{m_\ell} \frac{\cancel{n!}}{m_1!\,\cancel{(n-m_1)!}} \frac{\cancel{(n-m_1)!}}{\cancel{(2m_2)!}\,(n-m_1-\cancel{2m_2})!} \frac{\cancel{(2m_2)!}}{(2!)^{m_2} m_2!} \cdots$$

对 $\{m_\ell\}$ 可以找到唯一的 n 对应

$$③ = \sum_{m_\ell} \frac{(ik)^{m_1+2m_2+3m_3+\cdots}}{m_1!\,(2!)^{m_2} m_2!\,(3!)^{m_3} m_3! \cdots}$$

② → ③

~~去掉 n，施放 m_ℓ 的限制，$\sum_\ell m_\ell \ell = n$ 限制被去掉了，每个都可以 $\to \infty$.~~

$$= \prod_\ell \left(\sum_{m_\ell} \frac{[(ik)^\ell]^{m_\ell}}{(\ell!)^{m_\ell} m_\ell!} \langle x^\ell\rangle_c^{m_\ell}\right)$$

$$= \prod_\ell e^{\frac{(ik)^\ell}{\ell!} \langle x^\ell\rangle_c}$$

$$= \exp\left[\sum_\ell \frac{(ik)^\ell}{\ell!} \langle x^\ell\rangle_c\right]$$

※ 累积量之间（各阶）没有任何关联，可以算完一阶，算二阶，三阶…，之间没有任何 overlap.

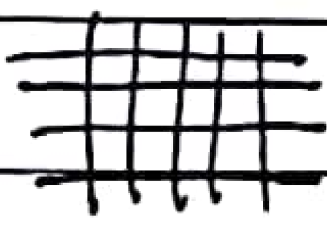
有了上面的计算，可以很自然地给出对应的 QFT 形式

$$\int P(x)\, e^{ikx} dx = \exp\left[\sum_\ell \frac{(ik)^\ell}{\ell!} \langle x^\ell\rangle_c\right]$$

$$\int D\phi\, e^{iS_0 + ig\int \phi^4 dx}$$

$$\overset{\text{离散化}}{=} \prod_i \int D\phi_i\, e^{i\phi_i A_i \phi_i + ig\phi_i^4}$$

$$\simeq \prod_i \int dx_i\, e^{ix_i A_i x_i + igx_i^4}$$



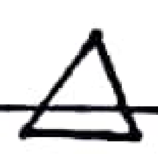
虽然一个是线性，一个是4次方

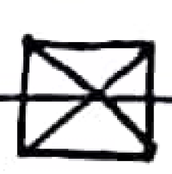
但上面证明思路完全相同

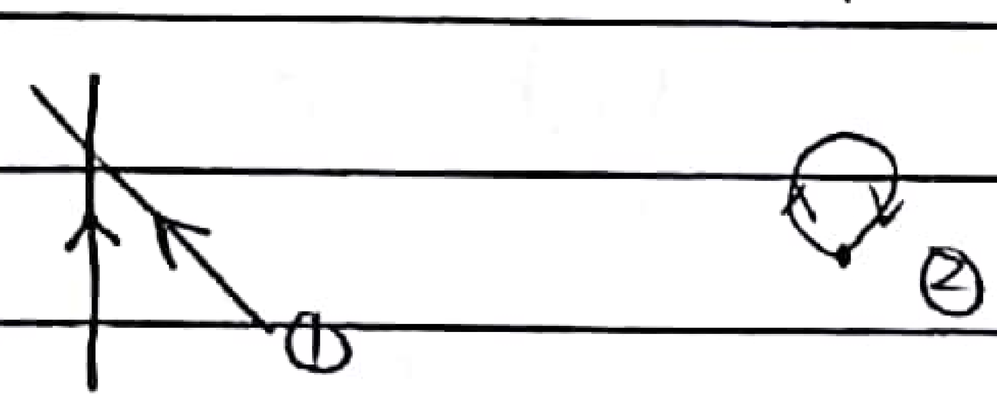
（Peskin 书上 P96-97 页会用到这个结果）

令 $\langle x^1\rangle_c = 0$

$\langle x^2\rangle_c =$

$\langle x^3\rangle_c =$ 

$\langle x^4\rangle_c =$ 

即 

① 会有贡献，② 不会有贡献，会 decay 掉.

$\hat{O}$为任意算符，$Z=\int D\phi\, e^{-H_0-u}$，$u$为相互作用

Date No.

$$\frac{\int D\phi\, e^{-H_0-u}\,\hat{O}}{\int D\phi\, e^{-H_0-u}} = \int\left(\frac{1}{Z}e^{-H_0-u}\right)\hat{O} = \langle O\rangle$$

只有连通图有贡献.

严格证明见 Mahan 书，这里给出一个简单图像

$$\frac{\int D\phi\, \hat{O}\, e^{-H_0}\left(1-u+\frac{u^2}{2}+\cdots\right)}{\int D\phi\, e^{-H_0}\left(1-u+\frac{u^2}{2}+\cdots\right)}$$

其中 $$\frac{\int D\phi\, e^{-H_0}e^{-u}}{\int D\phi\, e^{-H_0}} = \langle e^{-u}\rangle$$

$$\frac{分子 = Z_0\langle e^{-u}\hat{O}\rangle}{分母 = Z_0\langle e^{-u}\rangle} = \frac{\langle \hat{O}e^{-u}\rangle}{\langle e^{-u}\rangle}$$

$$\simeq \frac{\langle \hat{O}\left(1-u+\frac{u^2}{2}\right)\rangle}{\langle 1-u+\frac{u^2}{2}\rangle}$$

$$= \left(\langle\hat{O}\rangle - \langle\hat{O}u\rangle + \frac{1}{2}\langle\hat{O}u^2\rangle\right)\left(1+\langle u\rangle + \langle u\rangle^2 - \frac{1}{2}\langle u^2\rangle\right)$$

① $= \langle\hat{O}\rangle - \underbrace{\left(\langle\hat{O}u\rangle - \langle O\rangle\langle u\rangle\right)}_{\hat{O},u不能再分开的部分，即\langle\hat{O}u\rangle_c}$

② $= \frac{1}{2}\langle\hat{O}u^2\rangle - \frac{1}{2}\langle\hat{O}\rangle\langle u^2\rangle - \langle\hat{O}u\rangle\langle u\rangle$

$= \frac{1}{2}\left(\langle\hat{O}u^2\rangle - \langle\hat{O}\rangle\langle u^2\rangle - 2\langle\hat{O}u\rangle\langle u\rangle\right)$

$= \frac{1}{2}\langle\hat{O}u^2\rangle_c$

即，像 $\langle\hat{O}\rangle\langle u^2\rangle$ 一定无贡献
(*) × (*)

只有 $\langle\hat{O}u^2\rangle$ 这种才会有贡献，即只有连通图有贡献

原式 $= \sum_l \frac{(-1)^l}{l!}\langle\hat{O}u^l\rangle_c$

$G_{ij}\ G_{kl}$

$x_i\ x_j\ x_k\ x_l$

ref: Kardar 书上 P74 (Chapter 5) Stat Physics of Fields

在讨论过微扰论之后，下面集中于处理发散问题：

2种思路 $\begin{cases} \text{·抵消项} \Leftrightarrow \text{重整化} \Rightarrow \text{粒子物理} \\ \text{·重整化群} \Rightarrow \text{凝聚态、相变问题} \end{cases}$

·重整化方法

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

m, λ 发散

令重整化后 $\begin{cases} \boxed{m_R^2} = m^2 + \delta m^2 & \Rightarrow m^2 = m_R^2 - \delta m^2 \\ \boxed{\lambda_R} = \lambda + \delta\lambda & \quad\; \lambda = \lambda_R - \delta\lambda \end{cases}$

也是实验观察到的

具体计算时

$$\underset{\text{Bare field}}{\phi} = \sqrt{Z}\,\underset{\text{Renormalized field}}{\phi_R}$$

Z : Renormalized factor

~~健~~ $\langle\phi\phi\rangle = \frac{Z}{k^2-m^2}$, $Z \neq 1$

※粒子物理可测，高温超导中可测.

$$= \frac{Z}{2}\partial_\mu\phi_R\partial^\mu\phi_R - \frac{m^2 Z}{2}\phi_R^2 - \frac{\lambda Z^2}{4!}\phi_R^4$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_R\partial^\mu\phi_R - \frac{m_R^2}{2}\phi_R^2 - \frac{\lambda_R}{4!}\phi_R^4}_{\text{可观测部分}} + \underbrace{\frac{1}{2}\delta Z\,\partial_\mu\phi_R\partial^\mu\phi_R - \frac{1}{2}\delta m\,\phi_R^2 - \frac{\delta\lambda}{4!}\phi_R^4}_{\text{全部当作微扰处理}}$$

（但其实并不小，甚至可能发散！）

实验~~测~~值 $\begin{cases} m_R \\ \lambda_R \end{cases}$

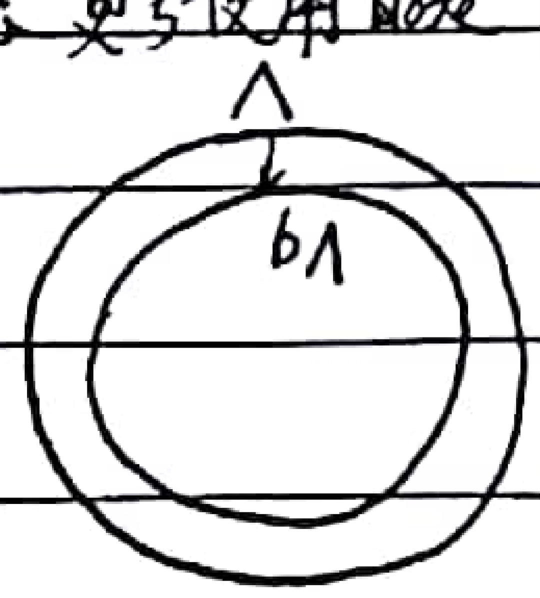
$\begin{cases} Z = 1 + \delta Z \\ m^2 Z = m_R^2 + \delta m \\ Z^2\lambda = \lambda_R + \delta\lambda \end{cases}$

如果可以抵消掉，只剩有限部分（要证明到任意阶都能抵消）称为<u>该理论可重整</u>.

这样，$\mathcal{L}$ = 重正化部分 + 抵消项 $(\delta Z, \delta m, \delta\lambda)$

缺陷与问题：
① 有哪些抵消项，如何得知？ ϕ^3, $(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi)^2$, ...
② 高低阶项很容易找抵消，但高阶项是否抵消？
※ 一篇PRD，构造 $(\partial_\mu\phi)^\alpha$ 理论，讨论高阶项
③ 凝聚态领域极少有人用这种方法讨论问题
高能的几个模型很干净，常用

凝聚态更多使用的是 $\boxed{\text{重整化群 RG}}$



$b<1$
积掉 $b\Lambda \sim \Lambda$ 部分

$\begin{cases} \text{有些高能时 } g \text{ 较小，但低能时 } g \text{ 很大，(典型的超导中的项)} \\ \text{有些高能时 } g \text{ 较大，但低能时 } g \text{ 很小} \end{cases}$

而且方便加上不同的项加以讨论，如加上各种形式的项，加以讨论．更通用
（方便"炒菜"）

266 ~ 277
97 - 100

Date No.

下面讨论 $\underbrace{\text{KG-eq}}$ 也是一维波动方程 $\partial_t^2\phi = v^2\partial_x^2\phi$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$ $\phi\in\mathbb{R}$, 实数场

一般 $d=3+1$ OR 4.

$k^\mu = (\omega, \vec{k})$ 用的度规 $g=(+,-,-,-)$

$k_\mu = (\omega, -\vec{k})$

$\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi = (\partial_t\phi)^2 - (\nabla\phi)^2$

$$Z = \int D\phi\, e^{i\int dt dx \mathcal{L}}$$
$$\doteq \int D\phi\, e^{iS} \quad (S = \int dt dx\, \mathcal{L})$$

☆下一节课, 讲 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4!}$ 的由来 (P93/Peskin书)

$\cancel{\int dz\, dz\, e^{-\frac{1}{2}Azz} dz =}$

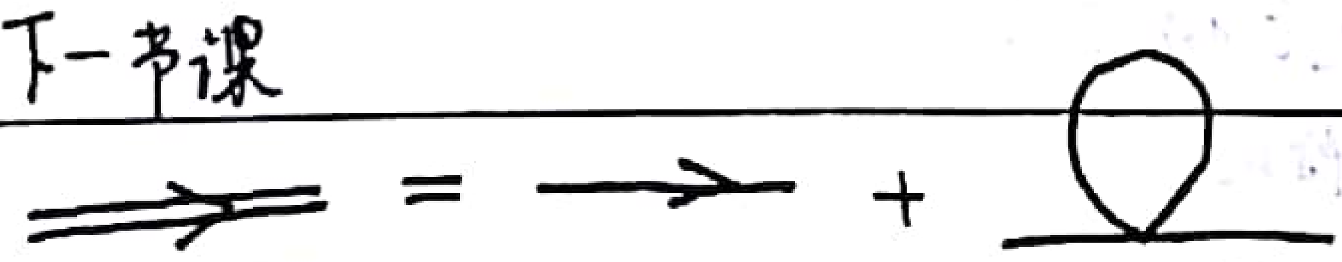
实空间中计算

$$\langle\phi(x)\,\phi(y)\rangle = \frac{\int D\phi\, \phi(x)\phi(y)\, e^{iS}}{\int D\phi\, e^{iS}}$$

$$\left(\langle O\rangle = \frac{\int D\phi\, e^{-H_0-U}\,\hat{O}}{\int D\phi\, e^{-H_0-U}} = \sum_l \frac{(-1)^l}{l!}\langle \hat{O} U^l\rangle_c^0\right)$$

$$S = S_0 - \underbrace{\int dx dt\, \frac{\lambda}{4!}\phi^4}_{U}$$

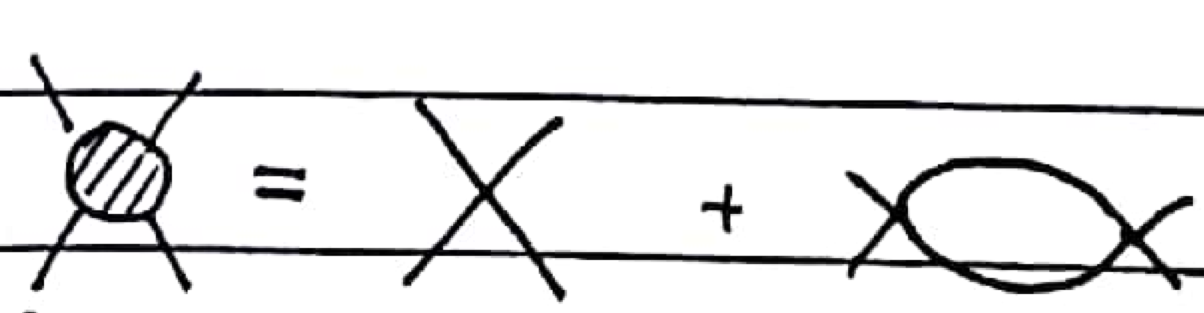
下一节课



+ 抵消项

重整化 $\int \frac{\lambda_R}{4!}\phi_R^4$ $\frac{\delta\lambda_R}{4!}\phi_R^4$ $\frac{\delta_Z(\partial\phi)^2 - \delta_m}{2}$

多体之间散射



ref:

Shankar书 14章