第四次上课的总结：为什么路径积分可以做计算?

$$P(A \to B) = \int_A^B d[q_i] e^{\frac{i}{\hbar} S[q_i]}$$

我花一次课的时间，主要讨论一个问题， 即为什么路径积分这个无穷维度的积分可以计算。这是很多学生在学习路径积分都会碰到的疑惑。我当年在读书的时候，也有很多困惑，即为什么要搞一个如此复杂的积分。它到底有什么优势？为什么我们要舍弃好好的 Hamiltonian 的计算，而采用如此复杂的计算过程。此外，我们在做计算的时候，一个二维积分就把许多人难倒了，为什么一个无穷维的积分我们可以做计算？ 这些问题也体现了路径积分的“大智慧”。我们在做计算的过程中，经常需要把复杂的问题变得简单，但是 Feynman 的工作似乎正好相反。我花了很长的时间，看了很多个不同的模型，尤其是理解了发散和重整化的一些基本思想，才算真正明白了这种处理的优越性和不可替代性。所以我个人觉得，理解为什么无穷维积分可以计算，可能是学生面对 QFT 的一个首先需要解决的问题。这种可计算性，和高斯积分有关。而高斯积分是最标准的概率分布模型。所以路径积分---概率论---随机过程等，有着最密切的关系。

如果我们假设我们对这些问题没有任何基础。要解决这个问题，简单来说，可能有如下几个选择：
1. N 维积分的严格可解模型 （可能性较小，只有少数模型可以求解，绝大部分模型不行，所以这条路不是一个好的选择）。
2. N 维积分可以化简为单变量和两变量微积分问题，从而可以求解（最适合）。
3. 对于相互作用的问题以及不可计算的模型，可以用微扰法处理。
4. 微扰法非常复杂，各种可能性都存在，需要用一个简单的方式表示，即图表示（Feynman 图）。它存在某些规律和基本性质（Wick 定理、Dyson 方程、Linked cluster 定理等）。

上面的几个选择基本构成了我们对 QFT 的大部分理解。但是这个问题并没有完全结束，或者太乐观，因为在用图表示某些积分的时候， 我们马上会碰到发散的问题。这种发散需要重整化方式处理。这也是场论最精髓的地方。

在讲可解模型的时候，我采取逆向思想的方法。首先从高斯函数出发，然后构造 N 份拷贝，所以我们得到

$$\int dx1\, dx2\, \ldots Exp[-(\sum ai\, xi\text{^}2\,)] = Sqrt[2Pi]\text{^}N/(a1a2a3\,..).$$

对于复数的情况，这个积分也是可以的。这个积分可以推广到任何实数对称矩阵，如下形式:

$$\int DX\, Exp[-X\text{^}T\, A\, X/2] = 1/Sqrt[Det[A]]$$

这是因为 A 矩阵可以用 O(N)矩阵对角化，而 det(O(N)) = 1，所以我们得到 Jacobi 行列式为 1。对于复数情况，也是同样的做法，但是它的对角化是 U（N）矩阵，所以 Jacobi 行列式是单位 1 的复数。

在很多情况下，我们可以认为，由于 Jacobi 行列式和场无关，所以无论它是什么值，都是可以不考虑的。在反常 QFT 中，这个行列式可能和场有关，此时需要考虑它的影响 （see Fujikawa approach to anomaly in QFT）。这中反常效应也和拓扑场论有关。

如果我们转到动量空间，同样面临这个问题。我们看到，实空间和动量空间相差一个 U 变换，它的矩阵元素为

$$U_{ij} = Exp[i\, ki\, xj]/Sqrt[V]$$

我们可以证明 U 是么正的，所以同样没有 Jacobi 行列式。

上面我们给出了三个具体的例子(real Gaussian，complex Gaussian 和 Fourier transformation)，它们都有如下几个特点。第一、Jacobi 行列式为 1 或者单位圆上的复数；第二、Jacobi 行列式和场无关。因此，我们在写 QFT 的时候，可以直接将 DX 变换为另外一个形式，而忽略 Jacobi 的影响。这几个例子可以让大家很好地理解为什么在做路径积分计算地时候，我们只需要计算 Action S 的变换关系，而忽略对 DX 的变换的讨论。

后面我们讨论了如何利用 Exp[-A x^2 + J x]，如何实现 effective action 以及如何对这问题做计算。这一部分只是简单提到，未来会进一步讨论。

作为作业，我给学生布置了 xiaogang wen 书本上的对自由空间和 harmonic oscillator 的路径积分的讨论。这两个模型可以在 real space 上处理，并借助 det (AN)的递推关系，得到进一步的结果。这是少数可以严格求解的模型，对于其它模型，则很难处理。这种模型的另外一个缺点是对相互作用的处理，它处理起来也不方便。

总的来说，这节课的目的是讨论 QFT 为什么可以计算这个基本问题。前面提到的几个好处，比如相互作用，我们将在后面讲 RG 的时候进一步讨论。