

Kosterlitz and Thouless 原始论文的有趣总结

1. 在 Kosterlitz, Thouless 1972 年的一篇短文中,作者参考了 Friedel 在固体材料中缺陷的结果。Friedel 证明 edge dislocation (1964 年)存在能量

$$E = \frac{n a^2 (1+r)}{4\pi} \text{Ln}(A/A_0)$$

此时 Entropy 为

$$S = k_B \text{Log}[A/a^2]$$

所以存在不等式

$$k_B T < k_B T_c = n a^2 (1+r)/4\pi$$

他们将这个概念拓展到超流中。注意到,在 2D 平面中,XY 模型的复数和二位缺陷的 Burgers vector 本质上是一样的。

2. 在 1972 年的长文中,作者系统研究了 BKT 相变问题。这篇文章的出发点非常有趣。出发点由两个矛盾的现象构成。

- Pererls (1935)年指出来,在二维系统中,晶格的长波声子模式会破坏长程有序,所以对于二维材料的 Bragg 谱应该是非常宽的 peak,而不是尖锐的。1966 - 1968 年,这种无长程有序由 Mermin 和 Wager 等人严格证明,其基础是 Bogoliubov 不等式有关。Hohenberg 等人证明(1967 年)对于玻色子,其 order parameter 应该为零。
- 但是当时,对于很多二维物理系统,存在相变。Stanley and Kaplan 等人在自旋模型中,在高温下存在严格的相变。在相变点附近磁化率发散。

作者没有提到 Onsager, Kramers-Wegner 等人的工作。这是 40 年代的工作,比 BKT 的工作要早得多。他们证明在 Ising 模型中存在严格的 phase transition. Krameters-Wegner 利用 dual 关系,严格证明高温和低温下有不同的关系。

在这个工作之前,已经有许多人研究了 2d 库伦气体的相互作用问题。这个模型有些时候叫做 Dyson 二维气体模型(1962 年)。这篇文章引用了 Hange and Hemmer 的工作。在后来几年,大量的工作研究二维库伦气体模型。当然,Hange and Hemmer 允许 singular 点存在,得到了 $k_B T_c = q^2$,但是 Kosterlitz and Thouless 不允许这个点存在,得到 $k_B T_c = q^2/2$ 。在处理上稍微不同。

Ref: A Brownian-Motion Model for the Eigenvalues of a Random Matrix , 1962 , Journal of Mathematical Physics , [Freeman J. Dyson](#)

Kosterlitz and Thouless 的文章提到的两个相互矛盾的观点。这个总结比许多教材都要好。所以到 Kosterlitz 和 Thouless,已经有大量相关的理论研究了,并得到了类似的 BKT 相变问题。RG 在当时才刚刚提出来,所以 Kosterlitz , Thouless 用的不是 RG 的方法来处理的这个问题。这个方法似乎很少在教材上提到。