2020.10.14

∞ 悖论 如 Zeno　　如果世界有最小的尺度(取消连续性)就可以解决

$\updownarrow$ 与连续有关 | lim, $\delta(x)$

Λ 能标

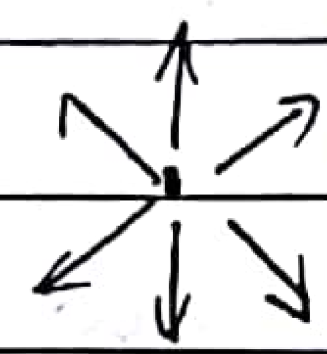
数学上的 ε-δ 语言

在经典物理中,已经遇到了如 $\frac{1}{r}$ 势发散问题,但可以规避.

但在场论中 $f(\vec{x}) \longrightarrow$ 连续

$$E = \int (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$$

计算一个点电荷(静止)能量 $\begin{cases} U = \frac{1}{r} \\ \vec{E} \sim \frac{\hat{r}}{r^2} \end{cases}$



ref: Jackson Classical EM

$$U \propto \int \frac{\vec{r}^2}{r^6} d^3\vec{r} \propto \int \frac{\vec{r}^2}{r^4} dr \propto \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr \propto \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r_0}\right)$$

引入截断

结果:

$$mc^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 (r_0)}$$

相对论

氢原子能级

$$13.6\text{eV} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_B} \quad (a_B = 0.529\text{Å})$$

$$0.511\text{MeV} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$$

相比 $\frac{r_0}{a_B} = \frac{13.6\text{eV}}{0.511\text{MeV}} \sim 10^{-5}$

根本原因是人们在极小尺度上的物理的无知,只能用低能有效模型加以描述
(在特定能标)

如 $g\,\delta^{(2)}(\vec{x})$ 发散 $\xrightarrow[g_\Lambda]{\text{特定能标}\Lambda}$ 理论变为有限 $\longrightarrow$ 实验有限

形式上: $E = f(\Lambda, g_\Lambda)$　Human ignornance

有限

eV, g_{eV}

GeV, g_{GeV}

同时变动

注意: Am. J. Phys 关于物理教育的杂志

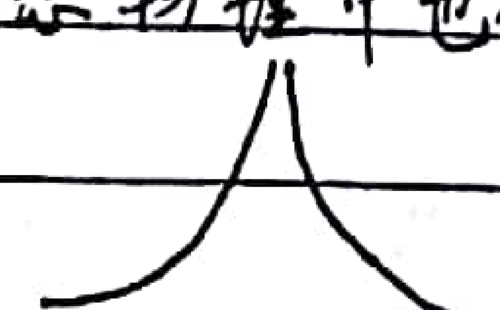
另外,相变的地方会发散

*长期以来,凝聚态物理学家并未意识到发散

因为有自然的最大能标 $\Lambda = (\pi/a)$,有 Debye 常数

但后来发现,凝聚态物理中也有发散(不是紫外发散,而是红外发散)

相变处也会发散



热容、磁化率等

$$C, \chi \sim \frac{1}{(T - T_c)^{\alpha}}$$

Gellman

$\downarrow$

Wilson. 1982

相变点附近性质

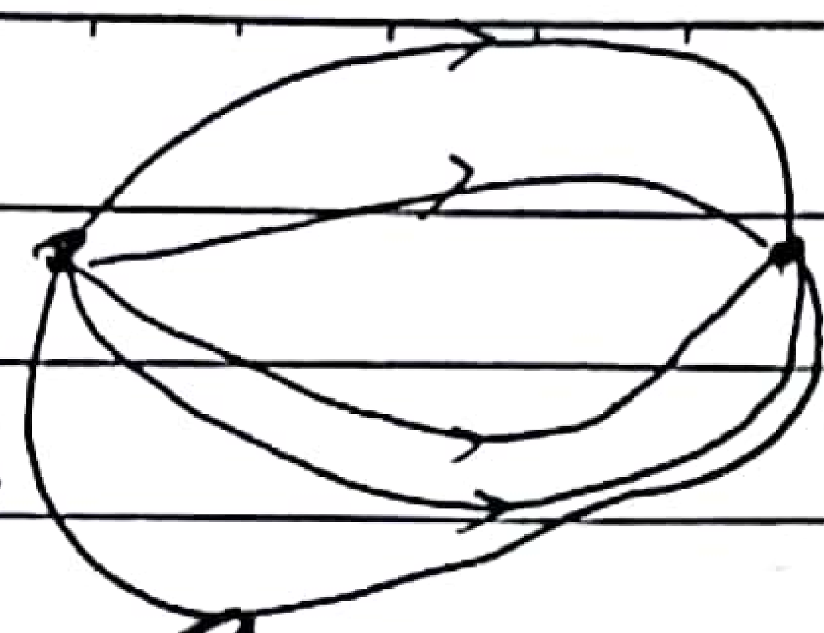
*化学院吴奇(CHUK): 学生不能做博士阶段的方向

Date. No.

Path Integral

~~Dyson与Feynman对话~~

Feynman说电子可以任意走，甚至可以超光速
Dyson: You are crazy



~~很可能 $v>c$~~

路径积分解决的问题：

将最小作用量原理 $\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\delta S=0} \\ \mathcal{L} \end{array} \right.$ 重新引入量子力学.

经典力学 $\left\{ \begin{array}{l} 1.\ \mathcal{L}=T-V \text{ (物理意义不明确)} \\ 2.\ H=T+V \\ 3.\ \delta S=0 \end{array} \right.$

路径积分的几个层次 $H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$

1. path integral $\longleftrightarrow$ $[x,p]=i\hbar$ Schrödinger eq } Advanced QM

$$P(a,b,t)=\int_a^b Dx\,Dp\; e^{i\int_0^t \mathcal{L}d\tau}$$

2. 二次量子化下 $[a,a^\dagger]$

$? \longleftarrow H=\omega a^\dagger a$

$\downarrow$ 多模式

$? \longleftarrow H=\omega_{ij}a_i^\dagger a_j+U(a_i,a_i^\dagger)$

$\downarrow$ 连续化

$? \longleftarrow H=\int dx(\quad)$

} QFT

今天内容 $\left\{ \begin{array}{l} \text{场量子化} \\ \text{红外发散\&不稳定性} \end{array} \right.$

场：一切连续的东西 $f(x)$

场量子化/波函数量子化/正则量子化(canonical)/二次量子化

☆ Ben Simons (canonical)

国内很多老师 $\left\{ \begin{array}{ll} [x,p]=i\hbar & \text{一次量子化} \\ [\psi,\psi^\dagger]=\delta(x-x') & \text{二次量子化} \end{array} \right.$

… (三次量子化)

最好的解释是1927年Dirac的QED原始论文.

$\psi=\sum_n C_n\varphi_n$

$\left\{ \begin{array}{l} i\dot{C}_n=\frac{\partial E}{\partial C_n^*} \\ i\dot{C}_n^*=-\frac{\partial E}{\partial C_n} \end{array} \right.$

$\{C_n^*, C_n\}$ 作为共轭量

$\left\{ \begin{array}{l} \rho_n=C_n^*C_n \\ \theta_n \end{array} \right.$

$C_n=\sqrt{\rho_n}\,e^{i\theta_n}$

Nagaosa

一切都来自于Possion括号 $\left\{ \begin{array}{l} \{q_i,q_j\}=0 \\ \{p_i,p_j\}=0 \\ \{p_i,q_j\}=\delta_{ij} \end{array} \right.$

Date. No.

例: 1d 声子模型 (Simons book / M. Stone 书)

—o—o—o—

$$H=\sum \frac{1}{2}m\dot{x}_n^2+k(x_n-x_{n+1})^2$$

$$=\underbrace{\sum \frac{1}{2}m\dot{x}_n^2+2kx_n^2}_{\text{Harmonic oscillator}}\underbrace{-2k\cancel{x_n}x_{n+1}}_{\text{Interaction}}$$

第1种处理方法: $\sum_n \hbar\omega(a_n^\dagger a_n+\frac{1}{2})-\sum_n 2kx_nx_{n+1}$

$$\begin{cases}[a_n,a_m]=0\\ [a_n^\dagger,a_m^\dagger]=0\\ [a_n,a_m^\dagger]=\delta_{nm}\end{cases}\Longrightarrow \boxed{x_n=g a_n+g^* a_n^\dagger}$$

$$a_n(t)=a_ne^{-i\omega_nt}$$

$$\begin{cases}x_n=ga_n+g^*a_n^\dagger\\ p_n=m\dot{x}_n=-i\omega_nm[ga_n-g^*a_n^\dagger]\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}[x_n,p_m]=i\hbar\delta_{nm}\\ [x_n,x_m]=0\\ [p_n,p_m]=0\end{cases}$$ Possion bracket 形式的一次量子化 (类似 $[x,p]=i\hbar$)

第2种处理方法

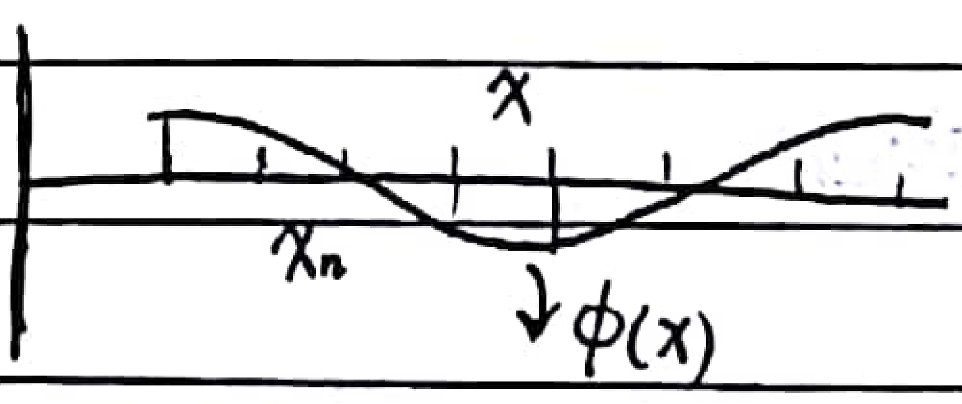
$$\underbrace{\sum_n f(n)}_{\text{离散求和}}=\underbrace{\int f(x)dx}_{\text{场}}$$

连续化: $x_n=x(n)=\phi(n)$ ↙ 场量/波函数

$p_n=p(n)=\phi^\dagger(n)$

对应 $\begin{cases}[\phi(x),\phi^\dagger(y)]=\delta(x-y)\\ [\phi(x),\phi(y)]=0\\ [\phi^\dagger(x),\phi^\dagger(y)]=0\end{cases}$ $\boxed{\text{场量子化}}$

$\begin{cases}\phi(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{位置}}}{x}): \text{在}x\text{点的振动幅度}\\ \phi^\dagger(x): x\text{点处动量}\end{cases}$



~~求解~~

~~$H=\sum_n \omega a_n^\dagger a_n \quad g(a_n^\dagger a_{n+1}+h.c.)$~~

求解

$$\mathcal{L}=\overbrace{\frac{1}{2}m\dot{x}_n^2}^{T}-\overbrace{(\frac{1}{2}m\omega^2x_n^2-kx_nx_{n+1})}^{V}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{a}_n}=\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a_n}\right)$$

↕连续

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}(x)}\right)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)}$$

如 $\left(\begin{array}{c}\int Dx\, e^{i\int\mathcal{L}(x,\dot{x})dt}\\ \Downarrow\\ \lim_{n\to\infty}\int Dx_1Dx_2\cdots Dx_n\cdot e^{iS_t(\cdots)}\\ \downarrow x_i=x(t_i)=\phi(t_i)\\ \int D\phi\, e^{i\int\mathcal{L}(\phi,\dot{\phi})dt} \text{ — QFT形式}\end{array}\right)$

$\downarrow \frac{\partial}{\partial x_n}(x_n x_{n+1} + x_{n-1} x_n)$.

$\cancel{m\ddot{x}_n = -m\omega^2 x_n}$

$m\ddot{x}_n = -m\omega^2 x_n + 2k(x_{n+1} + x_{n-1})$

$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + x_n' a + \frac{1}{2} x_n'' a^2 \\ x_{n-1} = x_n - x_n' a + \frac{1}{2} x_n'' a^2 \end{cases}$

$m\ddot{x}_n = -m\omega^2 x_n + 2k(2x_n + a^2 x_n'')$

$\cancel{m\ddot{\phi}(x,t) = \underbrace{-m\omega^2 \phi(x,t) + 4k\phi(x,t)}_{约掉} + 2k\frac{d^2}{dx^2}\phi(x,t)}$

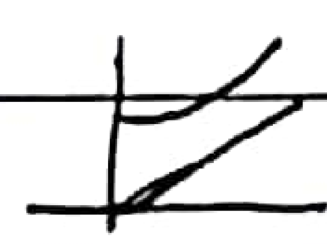
$m\ddot{\phi}(x,t) = 2k\frac{d^2}{dx^2}\phi(x,t)$ —— 声波方程.

$\begin{cases} i\frac{\partial}{\partial t}\psi = (-\frac{d^2}{dx^2} + V)\psi \\ m\frac{d^2}{dt^2}\phi = 2k\frac{d^2}{dx^2}\phi \end{cases}$

声子：线性色散.

线性色散

问题：一维问题是否稳定？

声波 → 声子 → $\varepsilon_k = v|k|$  2支

求在x点振动大小的方差

$\langle x^2 \rangle = \langle (a^\dagger + a)^2 \rangle \propto \overline{2n+1} \propto \bar{n}$

$\langle \phi^\dagger(x)\phi(x) \rangle \quad \left(\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k e^{ikx}\phi_k\right)$

$= \sum_{kk'} \frac{1}{V}\langle \phi_k^\dagger \phi_{k'} \rangle e^{ix(k-k')}$

$= \sum_k \frac{1}{V}\langle \phi_k^\dagger \phi_k \rangle$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{e^{\beta v|k|}-1} dk$

当 $k \to 0$. $\int_0^\pi \frac{1}{e^{\beta vk}-1} dk \sim \int_0^\pi \frac{dk}{\beta vk}$ → 发散(红外)

*红外发散：长波的有贡献，短波反而贡献小.

二维线性色散可以稳定：$\sim \int_0^\pi \frac{d^2k}{e^{\beta vk}-1} \sim \int \frac{d^2k}{k}$ → 有限

~~* Goldstone theorem 保证~~ $\sim \int \frac{dk}{e^{\beta vk^2}-1}$ → ~~有限~~发散 → $\sim \int \frac{d^2k}{e^{\beta vk^2}-1}$ → 发散

对于二次型色散，1d，2d 都不稳定　　但Goldstone theorem保证必须是线性色散

Wagner-Mermin Theorem (1968)：某种形式下的二维系统都是无序的

当时与数值计算有出入，{2d-Ising model 一定有相变

~~核心问题~~

*低维物理系统(尤其是2d)有没有相变.

最重要的2个人：Thouless，Kosterlitz

注意：声子没有化学势
(添加一个粒子所需的能量)

化学势 μ → gap

Bose-Einstein凝聚(1d，2d不会有，奇点导致破坏，不稳定

Date.　　No.

① $\mu=0$ for phonon

② Einstein BEC $\begin{cases} d=1,2\text{，无BEC (不存在长程序)} \\ d=3\text{　有BEC (有长程序)} \end{cases}$　　$\boxed{\text{固体物理水平}}$

③ 1d phonon $\Rightarrow \underbrace{\varepsilon_k = v|k|}_{\text{Goldstone定理保证}} \Rightarrow \langle \phi^\dagger(x)\phi(x)\rangle \to \infty \Rightarrow$ 1d system 不稳定

④ 2d $\varepsilon_k = v|k|^2 \Rightarrow$ 也不稳定(红外)

⑤ Wagner-Mermin定理 $\Rightarrow$ 2d system + 短程 $\Rightarrow$ 不可能有长程序

☆早期不相信Graphene存在的原因

☆可能和BEC不存在的原因相似　　$\boxed{\text{固体理论水平}}$

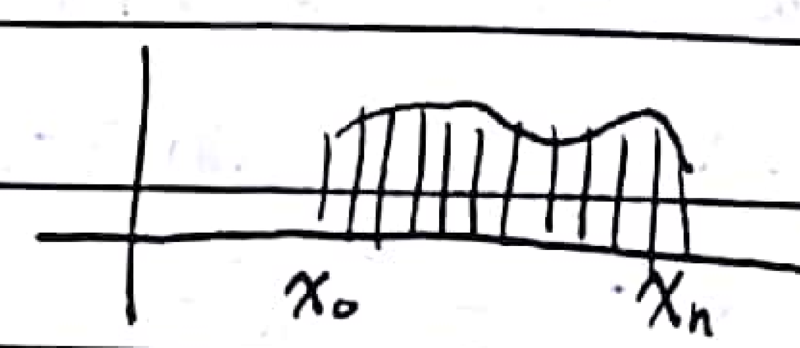
⑥ 理论观察不一致 (2d Ising / ... 存在相变)　　关键在于RG

最终 $\left.\begin{array}{l}\text{Thouless} \\ \text{Kitlitz}\end{array}\right\}$ BKT相变　　$\boxed{\text{QFT水平}}$

Path Integral

$$\langle q_n, t_n | q_0, t_0\rangle = N\int [dq]\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t \mathcal{L}[q]dt}$$

$$= \int Dq\, e^{\frac{i}{\hbar}\int \mathcal{L}[q]dt}$$



Dq与dq之间差一个常数

一般 $\int dq\, e^{-Aq^2+Jq}$　　$\int Dq\, e^{-Aq^2+Jq} = e^{\frac{J^2}{4A}}$

令 $\int Dq\, e^{-Aq^2} = 1$

$$= \lim_{n\to\infty} \int Dq_1 Dq_2 \cdots Dq_{n-1}\, e^{iS[q]/\hbar}$$

$\Downarrow$ 符号代换

$$= \int D\phi(t_1) \cdots D\phi(t_{n-1})\, e^{iS[\phi]/\hbar}$$

量子力学中的路径积分	QFT中的路径积分
单粒子 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) - V(x)$ $\int Dx\, e^{iS[x]/\hbar}$	$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\phi}^2(t) - V(\phi(t))$
多粒子 $\underbrace{\int Dx_1 \cdots Dx_{n-1}}_{Dx_{i\alpha}}\, e^{iS[x]/\hbar}$	$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x,t)}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$ $\int D\phi\, e^{iS[\phi]/\hbar}$ $= \int D\phi(x,t)\, e^{i\int dx\, dt\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)}$
无穷多粒子 $\int D\phi(x,t)\, e^{\frac{i}{\hbar}\int dt\, d^3x\, \mathcal{L}}$	

Date.　　No.

本节课总结：

① 无穷大 无处不在

② 场 (少 → 多)，类比

③ 场 (连续化) ⇒ 发散 ⇒ 与 cond' matt 密切相关
(紫外/红外)

④ Path Integral → QFT形式的过渡 (类比)

下节课

$\int D\phi\, e^{iS[\phi]/\hbar}$ 怎么计算？