

1 QED 历史与发散问题

这部分历史沿革可见 Weinberg's QFT I 的 Chapter 1[?]. 1927 年, Dirac 最早引入 QED 的处理方法; 1947 年, Willis Lamb 描述了氢原子中 $2s_{1/2} - 2p_{1/2}$ 的额外 Zeeman 分裂, 在解决这个问题过程中遇到了与实际实验相关的无穷大问题; 20 世纪 50 年代路径积分产生, 场论计算也遇到了越来越多的无穷大问题.

物理学家遇到的根本问题是理论预测是发散的, 但实验结果是有限的. 处理方法有两种: 一是放弃理论, 这是长达 20 年中物理学家中的主流; 另一种是尝试去重新理解——”与无穷大共存”. 就像实验中如系统变化超过探测器响应时间, 就一定探测不到. 我们也不可能认识任意的能标 ($\Lambda \rightarrow \infty$ 就无法认识)! 因此, 相互作用如果根据能标而改变, 就可能得到有限值!

2 δ - potential

下面用量子力学中常见的 δ -势问题出发引入重整化的概念:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + g\delta(\vec{x})\right)\psi = E\psi \quad (1)$$

形成 Bound state.

任意小的吸引势都会使束缚态, $E \rightarrow -\infty$, if $g < 0$. 但实验中观察到的 E 都是有限的, $E = \text{finite}$. 下面针对各个维度的具体情况加以讨论:

2.1 1D case δ -potential ($E < 0$)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + g\delta(x)\right]\psi(x) = E\psi(x) = -|E|\psi(x) \quad (2)$$

标度分析 (非常重要!): E 具有 energy 的量纲, 且应该是 $\frac{\hbar^2}{2m}$ 和 g 两个常数的组合: $E = E\left(\left[\frac{\hbar^2}{2m}\right], [g]\right)$.

$$\left. \begin{array}{l} \left[\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right] = \text{energy} \\ \left[\frac{d^2}{dx^2}\right] = \frac{1}{L^2} \end{array} \right\} \left[\frac{\hbar^2}{2m}\right] = \text{energy} \cdot L^2 \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} [g \cdot \delta(x)] = \text{energy} \\ [\delta(x)] = 1/L \\ (* \int \delta(x) \cdot dx = 1) \end{array} \right\} [g] = \text{energy} \cdot L \quad (4)$$

故 $E = \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^\alpha g^\beta = E^\alpha L^{2\alpha} E^\beta L^\beta$

$$\begin{array}{l} 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 1 \end{array} \quad \text{so} \quad \alpha = -1, \beta = 2. \quad (5)$$

具体求解:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi = -|E|\psi \quad (6)$$

$$\begin{cases} \psi_R = e^{-\sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}x}\psi(0) \\ \psi_L = e^{\sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}x}\psi(0) \end{cases} \quad (7)$$

连续条件

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\psi'_L(0) - \psi'_R(0)) = g\psi(0)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}[\psi(0) + \psi(0)] = g\psi(0)$$

$$\frac{\hbar^2|E|}{2m} = \frac{g^2}{4} \implies E = -\left(\frac{2mg^2}{4\hbar^2}\right)$$

这与标度分析结果相同.

2.2 2D case δ -potential ($E < 0$)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + g\delta(\vec{x})\right] \psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x}) = -|E|\psi(\vec{x})$$

标度分析: E 具有 energy 的量纲, 且应该是 $\frac{\hbar^2}{2m}$ 和 g 两个常数的组合: $E = E\left(\left[\frac{\hbar^2}{2m}\right], [g]\right)$.

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right] &= \text{energy} \\ \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right] &= \frac{1}{L^2} \end{aligned} \right\} \left[\frac{\hbar^2}{2m}\right] = \text{energy} \cdot L^2$$

$$\left. \begin{aligned} [g \cdot \delta(\vec{x})] &= \text{energy} \\ [\delta(\vec{x})] &= 1/L^2 \\ (* \int \delta(\vec{x}) \cdot dx dy = 1) & \end{aligned} \right\} [g] = \text{energy} \cdot L^2$$

故 $\frac{\hbar^2}{2m}$ 和 g 两个常数量纲都是 $\text{energy} \cdot L^2$, 组合量纲一定是 $(\text{energy} \cdot L^2)^\alpha$, 不可能得到 energy 的量纲!!!

为了解决这个问题, 只能额外引入一个量 $\Lambda \sim 1/L$, 此时

$$E \propto \left(\frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\right) e^{-4\pi/(g/(\hbar^2/2m))}$$

可见 E 一定是 $\hbar^2/2m$ 和 g 的比值.

讨论:

如果 g 和 Λ 无关 $\implies E = -\infty$ (一定发散);

如果 g 和 Λ 有关, 用实验上的 E 代入, 可以求出 g 与 Λ 之间的关系——重整化过程 (Renormalization). 引入额外的 Λ 时, 已经没办法做出预言了! 只能做解释.

① 很多时候 m 也可以和 Λ 有关, 此处为简单只讨论 g 与 Λ 相关的情况.

② 这里的关键问题在于, 实验中的 E 与能标无关, 但理论表达式又与能标有关. 只能采取折衷方案.

Kenneth G. Wilson 因建立了在相变和临界现象中的重整化群变换理论, 在 1982 年获得诺贝尔物理学奖.

从上面的讨论可见, 要想解释清楚实验, g 必须和 Λ 一起变化! 这个思想可以用固体物理中的能标 $[k] \sim \frac{\pi}{a}$ 为例:

$$\begin{aligned} \Lambda \sim \frac{\pi}{a} &\longrightarrow g\left[\frac{\pi}{a}\right] \\ \Lambda \sim 0.1\frac{\pi}{a} &\longrightarrow g\left[0.1\frac{\pi}{a}\right] \end{aligned} \quad \text{可以得到相同的结果}$$

具体求解:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right) - \lambda\delta(\vec{x})\right] \psi(x) = E\psi, \quad \lambda > 0 \quad (B = -E, B > 0)$$

* 补充 (1) Fourier transformation

$$\begin{cases} f(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} f(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\ = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int f(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\ f(\vec{k}) = \int f(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d\vec{x} \end{cases} \quad (16)$$

* 补充 (2) δ -function

$$\begin{cases} \int e^{ikx} dx = 2\pi\delta(k) \\ \int e^{ikx} dk = 2\pi\delta(x) \end{cases} \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ikx} dk = \sum_k e^{ikx} \quad (17)$$

证明:

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} e^{ikx-\varepsilon x} dx + \int_{-\infty}^0 e^{ikx+\varepsilon x} dx \\ &= \frac{1}{\varepsilon - ik} + \frac{1}{\varepsilon + ik} \\ &= \left(\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + k^2} \right) \quad (\text{Lorentz 函数, 最大值在 } k=0 \text{ 处}) \end{aligned} \quad (18)$$

而

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + k^2} dk \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + q^2\varepsilon^2} dq \quad (k = \varepsilon q) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2dq}{1 + q^2} = 2\pi \end{aligned} \quad (19)$$

可见 $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ikx} dk = \sum_k e^{ikx}$

回到求解过程本身, 将

$$\begin{cases} \psi(x) = \sum_k e^{ik\cdot x} \psi(k) \\ \delta(x) = \sum_q e^{iq\cdot x} \end{cases} \quad (20)$$

代入, 有

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{\hbar^2}{2m} k^2 \psi(k) - \lambda \sum_{q,k} e^{i(q+k)\cdot x} \psi(k) &= E \sum_k e^{ik\cdot x} \psi(k) \\ \psi(k) \frac{\hbar^2}{2m} k^2 - \lambda \sum_q \psi(k-q) &= E\psi(k) \\ \psi(k) \frac{\hbar^2}{2m} k^2 - \lambda\psi(0) &= E\psi(k) = -B\psi(k) \\ \psi(k) &= \frac{\lambda}{\frac{\hbar^2}{2m} k^2 + B} \psi(0) \end{aligned} \quad (21)$$

又由于

$$\psi(0) = \sum_k \psi(k) = \sum_k \frac{\lambda}{\frac{\hbar^2}{2m} k^2 + B} \psi(0) = \psi(0) \quad (22)$$

可得关系

$$\sum_k \frac{\lambda}{\frac{\hbar^2}{2m} k^2 + B} = 1 \quad (23)$$

这里可以很直观地看出: 吸引势有解 ($-\lambda < 0$), 排斥势无解 ($-\lambda > 0$).

下面为了计算方便, 可令 $\lambda := \lambda_0 \frac{\hbar^2}{2m}$, $B = \frac{\hbar^2}{2m} B_0$, 上面地关系可简化为

$$\sum_k \frac{\lambda_0}{k^2 + B_0} = 1 \quad (24)$$

(1)1D case:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda_0}{k^2 + B_0} dk = 1 \quad (25)$$

收敛于 $\int \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k}$, 有解. 可得

$$E = - \left(\frac{2mg^2}{4\hbar^2} \right) \quad (26)$$

(2)2D case:

$$\left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int d^2k \frac{\lambda_0}{k^2 + B_0} = 1 \quad (27)$$

尝试估算

$$\begin{aligned} & \lim_{\Lambda \leftarrow \infty} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\Lambda \frac{\lambda_0 k}{k^2 + B_0} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda_0 k}{k^2 + B_0} dk \\ &\sim \int_0^\Lambda \frac{\lambda_0 k}{k^2 + B_0} dk + \lambda_0 \int_\Lambda^{+\infty} \frac{1}{k} dk \\ &\sim \ln(\infty) - \ln \Lambda \end{aligned} \quad (28)$$

是发散的.

一方面, 实验上精度好和精度差地探测器确实会有精度差别, 但不可能有量级差距; 另一方面, 理论预测结果又与 B_0 量纲有关. 如果假设结果与 Λ 有关, 具体计算如下

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_0} &= \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2 + B_0} \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \int_0^{\Lambda^2} \frac{d\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}^2 + B_0} \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{\Lambda^2 + B_0}{B_0} \right) \approx \frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{B_0} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

即 $B_0 = \Lambda^2 e^{-\frac{4\pi}{\lambda_0}}$, 而 $E = -B = \frac{\hbar^2}{2m} B_0$, 故 binding energy 为

$$E = - \frac{\hbar^2 \Lambda^2}{2m} e^{-\frac{4\pi}{\lambda(\Lambda)} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)} \quad (30)$$

等号左边与 Λ 无关, 等号右边与 Λ 有关. 为了让等号两边一致, 必须付出一个代价: 使与 Λ 有关的参数互相抵消, 使右边也与 Λ 无关.

2.3 3D case δ -potential ($E < 0$)

留作作业

3 Regularization

严格来说, 重整化 (Renormalization) 和正规化 (Regularization) 这两个概念是不同的. 重整化流程大概可以分为以下 3 步:

- (1) 引入 cut-off Λ , 使发散的积分有限;
- (2) 再令 $\Lambda \rightarrow \infty$;
- (3) 用裸的参数将无穷大抵消掉.

前两步称为正规化, 可见正规化其实是重整化的一部分. 下面介绍两种正规化手续

3.1 Cutoff regularization

Cut-off 正规化过程的目的: 调整参数 $m(\Lambda), \lambda(\Lambda), g(\Lambda), e(\Lambda)$ 等与 Λ 的关系, 从而得到有限的观察值. 以此问题为例:

若通过实验可观测量已经确定了能标 $\mu (\mu < \Lambda)$, 可引入重整化的参数 λ_R , 有下面结果

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda_\Lambda} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\Lambda \frac{kdk}{k^2+B_0} \\ \frac{1}{\lambda_R} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\mu \frac{kdk}{k^2+B_0} \end{cases} \quad (31)$$

其中 λ_Λ 是裸参数; λ_R 重整化参数, 是有限值. 将二者相减:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_\Lambda} - \frac{1}{\lambda_R} &= \frac{1}{4\pi} \int_\mu^\Lambda \frac{kdk}{k^2+B_0} \quad (\lambda \gg \mu \gg B_0) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_\mu^\Lambda \frac{dk}{k} \\ &= \frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right) \end{aligned} \quad (32)$$

故

$$\frac{1}{\lambda_\Lambda} = \frac{1}{\lambda_R} + \frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right) \quad (33)$$

即: 裸参数 = 重整化参数 (实验结果) + 发散部分.

或者说,

$$\frac{1}{\lambda_R} = \frac{1}{\lambda_\Lambda} - \frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right) \quad (34)$$

即: 重整化参数 (实验结果) = 裸参数 - 发散部分.

在具体的计算中, 可以用 λ_Λ , 也可以用 λ_R 求后面的 β -function.

3.2 Dimensional regularization

在 QED 中为了保证 Lorentz 对称性, 有一种称作维数正规化得技术. 虽然本课程是凝聚态场论, 很少涉及 Lorentz 对称性, 但维数正规化有时会比 cut-off 正规化更简单, 在凝聚态物理中仍然有广泛应用. 比如 Wilson-Fisher 的经典文章 "Critical exponents in 3.99 dimensions." 这里的分数维度其实就是使用维度正规化, 代表着隐藏的能标, 而不是真实的 3.99d.

还是以 2D δ -potential ($E < 0$) 为例. 但令 d 可变, 使 $d = d_0 - \varepsilon = 2 - \varepsilon$, 有

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d^d k}{k^2 + B_0} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= \frac{1}{4\pi} \Omega_d \int_0^{+\infty} \frac{k^{d-1} dk}{k^2 + B_0} \\ &= \frac{1}{4\pi} \Omega_d \int_0^{+\infty} \frac{k^{1-\varepsilon}}{k^2 + B_0} dk \\ &\sim \int_0^{+\infty} \frac{k^{1-\varepsilon}}{k^2} dk \\ &\propto \int_0^{+\infty} \frac{1}{k^{1+\varepsilon}} dk \longrightarrow \text{finite} \end{aligned} \quad (36)$$

其中 Ω_d 是 d 维立体角. 上面的过程是用 ε 对维度 d 的修正来代替取 cutoff Λ 来做正规化.

3.3 两种正规化方法之间的关系

Cutoff regularization 和 Dimensional regularization 两种正规化方法本质上是等价的, 可以直接令二者相等

$$\int_0^\Lambda \frac{d^d k}{k^2 + B_0} = \int_0^\infty \frac{d^{d-\varepsilon} k}{k^2 + B_0} \quad (37)$$

$$\Omega_2 \int_0^\Lambda \frac{k dk}{k^2 + B_0} = \Omega_{2-\varepsilon} \int_0^{+\infty} \frac{k^{1-\varepsilon} dk}{k^2 + B_0}$$

可以建立 ε 与 Λ 之间的关系.

$$\begin{aligned} \text{Left} &\sim \ln \Lambda \\ \text{Right} &\sim \int_0^{+\infty} \frac{k^{1-\varepsilon}}{k^2 + B_0} \\ &= \text{finite} + \int_C^{+\infty} \frac{k^{-\varepsilon}}{k} dk \\ &= \text{finite} + \int_C^\infty k^{-(1+\varepsilon)} dk \\ &= \text{finite} + \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{cases} \text{Left} &= a \ln \Lambda + \text{finite} \\ \text{Right} &= b/\varepsilon + \text{finite} \end{cases} \quad (39)$$

当 $\Lambda \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$

$$\boxed{\varepsilon \propto \frac{1}{\ln \Lambda}} \quad \begin{cases} \Lambda \text{ 越大, } \varepsilon \text{ 越小} \\ \Lambda \text{ 越小, } \varepsilon \text{ 越大} \end{cases} \quad (40)$$

4 Wilson's RG

对上式两边取 \ln :

$$\ln(-E) = \ln\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right) + 2 \ln \Lambda - 4\pi \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\lambda(\Lambda)} \quad (41)$$

对 Λ 求微分, 左边 E 项与 Λ 无关, 故微分为 0. 原式变为

$$\begin{aligned} \frac{2}{\Lambda} d\Lambda + 4\pi \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\lambda^2} d\lambda &= 0 \\ 4\pi \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\lambda^2} \frac{d\lambda(\Lambda)}{d\Lambda} &= -\frac{2}{\Lambda} \\ \Lambda \frac{d\lambda}{d\Lambda} &= -\left(\frac{4m\lambda^2}{4\pi\hbar^2}\right) = -\frac{m\lambda^2}{\pi\hbar^2} < 0 \end{aligned} \quad (42)$$

定义 β -function $\beta(\lambda) := \left(\frac{d\lambda}{d\Lambda}\right) \Lambda$.

$$\beta(\lambda) = \Lambda \frac{d\lambda}{d\Lambda} = \frac{d\lambda}{d \ln \Lambda} \quad (43)$$

讨论:

①假设 β 是常数 (为方便求解) 可以求解得

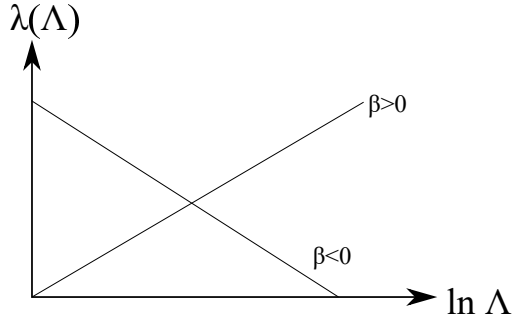


Figure 1:

$$\lambda = \lambda_0 + \beta \ln \Lambda \quad (44)$$

图中可见: $\beta > 0$, 能标越低, 相互作用越来越弱; $\beta < 0$, 能标越低, 相互作用越来越强. 由于我们讨论的多是低能物理, 所以 $\beta < 0$ 得情况更重要.

②如果 β 不是常数 (难于求解, 但趋势不变)

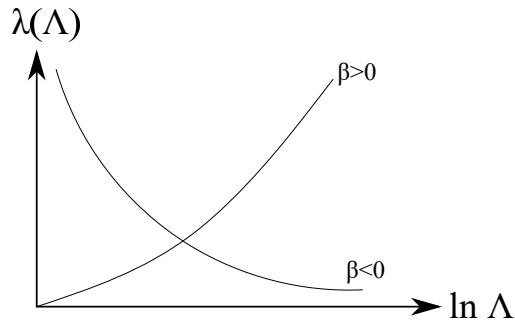


Figure 2:

因为参数 $\lambda = \lambda(\Lambda)$ 与 Λ 有关

$$\ln(-E) = \ln\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right) + 2 \ln \Lambda - 4\pi \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\lambda(\Lambda)} \quad (45)$$

(finite) (finite) (∞) (∞)

可以保证最后两个无穷大项可能抵消.