

第7章 孤立子

人们通常对于束缚态的描写,如果是非相对论性的情形,则用薛定谔方程;如果是相对论性的情形,则用其推广,即贝特-萨佩特(Bethe-Salpeter)方程.在原子和分子的场合下,这种描写方法是非常成功的;对于核结构也相当合适.在这些描写当中,普朗克常量起着重要的作用.这些束缚态只在量子力学中才存在.在物质与电磁场相耦合的情形下,经典物理要提供一个能防止辐射而保持稳定的原子是完全不可能的.正是这一失败才导致量子力学的发现.从此以后,人们通常认为在相对论性理论中,为了使稳定的束缚态得以存在,量子力学是必须严格遵守的.我们将会看到,事情并非如此.在非线性场论中,有了适当程度的非线性之后,稳定的束缚态不仅在量子力学并且在经典力学的范畴内也能存在.这种束缚态称为孤立子.

7.1 早期历史

最早讨论这个问题的是J. 司各特·罗素.他给不列颠科学进展协会的报告发表于1845年(参见图7.1).

此后司各特·罗素接着提出:他所遇到的孤立体实际上代表着流体力学中范围很广的一类解.他首先称之为“平移波”,后来称为“孤立波”.和冲击波不同,冲击波在波前处是奇异的,而“孤立波”是到处规则的没有奇异性.孤立波是稳定的不会弥散的,因此它和任何由通常的平面波解组成的波包是不同的.然而司各特·罗素并不能使他所有的同事们都相信.如我们从图7.2(取自瑞利勋爵1876年的文章)中所看到的,孤立波的问题在当时仍是在执领导地位的物理学家中间激烈争论的课题.这一争论一直延续到1895年才得到解决,当时科特韦格和德

关于波动

关于波动的报告. J. 司各特·罗素绅士, 文学硕士, 爱丁堡皇家学会会员, 于 1842 和 1843 年会上所作

委员会会员 { 约翰·鲁宾逊爵士, 爱丁堡皇家学会秘书
J. 司各特·罗素, 爱丁堡皇家学会会员

我相信我还是最好用描述这一我第一次亲身与之相识的情况来介绍这个现象. 当时, 我正在观看沿不宽的水道由两匹马牵引迅速向前的一只小船的运动. 当小船骤然停止时, 水道中为小船所推动的一大堆水却并不停止, 水积聚在船头前面猛烈地搅动着, 然后水浪突然呈现出一个很大的、孤立的凸起, 那是一个滚圆而光滑、周界分明的水堆. 它以巨大的速度向前滚动, 而将小船留在它后面. 这一水堆沿着水道继续进行并没有明显地改变其形状或降低其速度. 我骑马紧跟, 并追上了它, 它仍保持其原来的大约 30 英尺长、1 英尺至 1 英尺半的高度的外形以大约每小时 8 或 9 英里的速度滚滚向前. 渐渐地它的高度下降. 当我追赶一、二英里后在水道的弯曲处它不见了. 这样, 在 1834 年的 8 月, 这是我第一次有机会见到这样一个独一无二的美丽的现象. 这现象我称之为平移波, 这个名字现在已非常普遍地为人们所接受. 这一现象自我发现以来几乎在每一流体阻力中都是一个重要的组成部分; 而属于这类波的有海洋的巨大的升举, 它和行星的节律一起使我们的河流升涨并在我们的海岸上滚动.

图 7.1

弗里斯* 根据非线性流体力学方程——科特韦格和德弗里斯方程的解(现在称之为孤立子解)给出了全面的分析说明. 然而, 剩下的问题是, 是否这种稳定的、非奇异的和不弥散的解能在物理学流体力学以外的其他领域中出现. 通过 1950 年代初费米、巴斯塔和乌拉姆**的工作, 这一问题得到新的推进. 利用最大的计算机之一 Maniac I, 他们研究了 64 个谐振子的能量趋向均匀分配的过程, 在这些谐振子之间存在着某种很弱的非线性耦合. 初始时, 所有的能量都集中在一个谐

* Korteweg D J, de Vries G. *Phil Mag*, 1895, **39**:422.

** Collected Papers of Enrico Fermi. general editor Segré E. Chicago: University of Chicago Press, 1965, Vol. II:978.

振子上. 他们很惊异地发现, 通常关于怎样达到热平衡的概念是十分错误的.

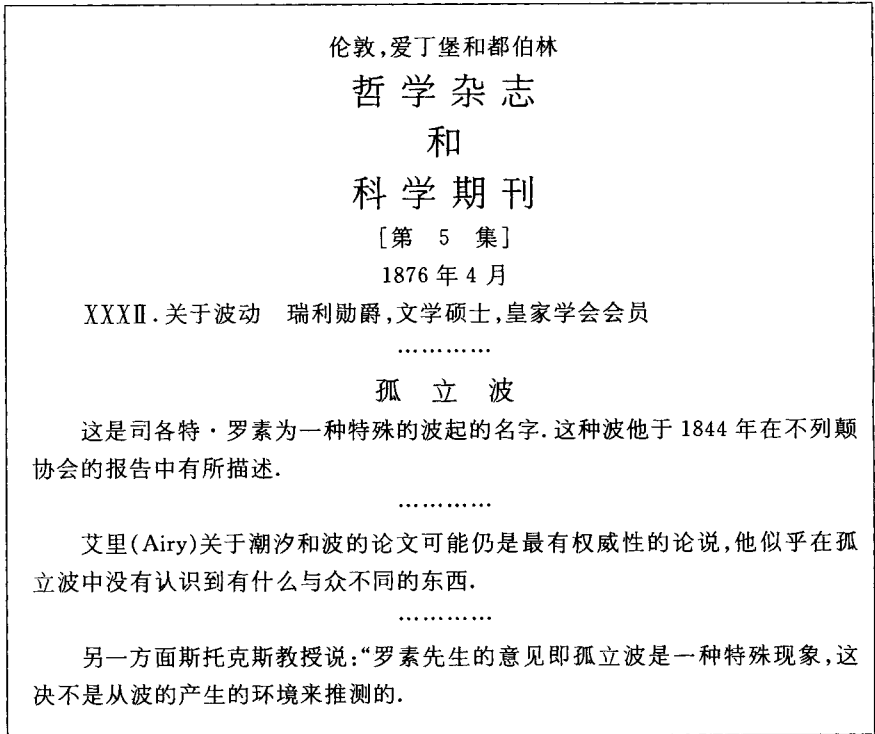


图 7.2

一如我们在图 7.3 中所见到的, 经过大约一万次循环之后, 其能量几乎不变地完全回到初始的模式. 总能量只有百分之几留给极少数的其他振子. [这不是庞加莱循环, 庞加莱循环要求有更长的持续时间.] 这种集体模式的发展是个普遍现象, 可近似地用 Toda (Toda) 格点* 的孤立子解来表示. 孤立子解的重要的普遍特征是: 即使非线性耦合非常弱, 孤立子解仍是存在的:

$$\text{弱耦合} \neq \text{弱振幅}. \quad (7.1)$$

* Toda M. *Progr Theor Phys Suppl*, 1970, 45:174.

非线性问题的研究

E. 费米, J. 帕斯塔和 S. 乌拉姆 文献 LA-1900(1955年5月)

摘 要

在洛斯阿拉莫斯的计算机 MANIAC I 上研究了一个由 64 个质点组成的一维动力学系统. 在邻近质点间含有非线性的力. 考虑的非线性项有二次的, 三次的和破缺线性型. 结果分解为傅里叶分量并作为时间的函数画出.

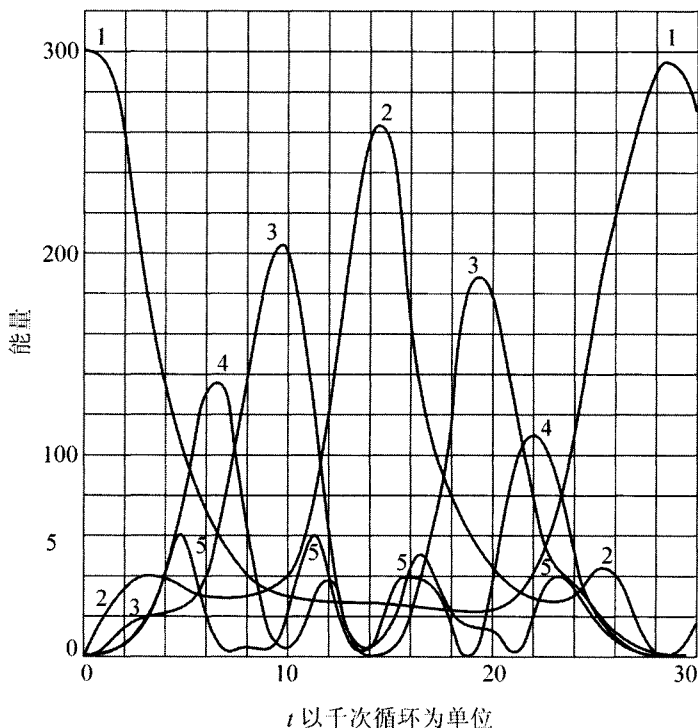


图 1. ——画出的量是能量(头五个模式的动能加势能). 能量的单位是任意的. $N = 32$; $\alpha = 1/4$, $\delta t^2 = 1/8$. 弦的初始形状是单一正弦波. 能量最高的模式不超过我们所给定单位的 20 倍. 计算了大约有 3 万次计算循环.

图 7.3

此后就有大量关于孤立子的文章出现. 1973 年的斯科特, 邱和麦克

劳克林*的评述性文章中列举了总共 267 篇参考文献. 但是所有这些文章都只涉及到经典的孤立子解, 同时几乎都限于一维空间, 而且只是对七种特殊方程而言: 科特韦格-德弗里斯方程, 正弦-戈登方程等. 最近在这一领域里有较大的进展, 既有推广到三维空间的经典解, 还在量子孤立子解方面发展起一些一般的技术(至少在弱耦合下的玻色子场的情形)使得对于每一种经典解, 都存在一种相应的量子解. 这些新的发展将是我们讨论的主要部分.

7.2 定义、分类和若干一般说明

让我们从定义开始:

经典场论的任一空间有限、非弥散的解是经典孤立子.

在整个讨论中, 我们只对相对论性定域场论感兴趣. 为了得到孤立子解, 必须有非线性耦合; 否则, 只有平面波解. 虽然通过平面波的迭加就能得到波包, 但这种波包总是弥散的, 因此不是孤立子.

下面的说明应用于任何玻色子场的孤立子.

1. 一般情形下, 拉氏量可由几种场和几种耦合组成. 可将各种不同的场方便地合起来记成 ϕ , 而将拉氏密度写成

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} \right)^2 - \frac{1}{g^2} V(g\phi), \quad (7.2)$$

式中 g 是无量纲的, 而 V 在 $\phi = 0$ 时为极小. 不失任何普遍性, 这个极小值可选为零. 故可用幂级数展开:

$$\frac{1}{g^2} V(g\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + O(g\phi^3) + O(g^2\phi^4) + \dots, \quad (7.3)$$

其中二次项 ϕ^2 与 g 无关. 若理论中只有一种场, 则 m 是个数. 否则 ϕ 代表有 n 个分量的一列矩阵, $\frac{1}{2} m^2 \phi^2$ 表示 $\frac{1}{2} \bar{\phi} m^2 \phi$, m 是 $n \times n$ 的矩阵. 运动方

* Scott A C, Chu F Y F, McLaughlin D W. *Proc IEEE*, 1973, **61**:144.

程可通过变分原理(2.10)得到,它是

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\mu^2} - \frac{1}{g} V'(g\phi) = 0, \quad (7.4)$$

式中 $V'(\sigma) = \frac{dV(\sigma)}{d\sigma}$, $\sigma = g\phi$. 由于(7.3),上一方程变为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\mu^2} = m^2 \phi + O(g\phi^2) + O(g^2\phi^3) + \dots \quad (7.5)$$

当 $g = 0$, 方程变为线性方程. 因此在方程中 g 标志着不同的非线性耦合. 如前所述, 由于孤立子是不弥散的, 当 $g = 0$ 时并不存在孤立子. 一如我们将会见到的, 所有的孤立子解当 $g \rightarrow 0$ 时都是奇异的.

2. 在经典理论中, 这种奇异性总是一个简单的极点. 为证明这点, 可写

$$\phi_{\text{经典}} = \frac{1}{g} \sigma. \quad (7.6)$$

则拉氏密度变为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g^2} \mathcal{L}_\sigma, \quad (7.7)$$

式中

$$\mathcal{L}_\sigma = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_\mu} \right)^2 - V(\sigma) \quad (7.8)$$

和 g 无关. 由于经典解是由作用量积分的极值确定的, 因此 \mathcal{L}_σ 与 g 无关说明对应的孤立子解 σ 也是与 g 无关的, 从而确立了(7.6). 由此只要 $g \neq 0$, 孤立子解的存在性并不依赖于 g 的强度. 一如我们在(7.1)中所见到的, 这就是为什么即使是弱耦合的情形下也不可能略去孤立子解的道理. 与平面波不同, 当 $g \rightarrow 0$ 时, 孤立子解 $\rightarrow \infty$.

3. 只是最近才发现的一个重要而令人高兴的特点是: 对任何一种玻色子场系统, 只要经典孤立子存在, 则总存在相应的量子孤立子解, 至少在弱耦合的情形是如此.

为预期这点, 最简单的办法是注意到量子理论中的作用量 A 可设为 \hbar^{-1} 乘以经典作用量, 即

$$A = \hbar^{-1} \int \mathcal{L} d^4 x = (\hbar g^2)^{-1} \int \mathcal{L}_0 d^4 x, \quad (7.9)$$

式中 \mathcal{L} 和 \mathcal{L}_0 由(7.7)式相联系. 在量子理论中, 考虑从初始位形到终极

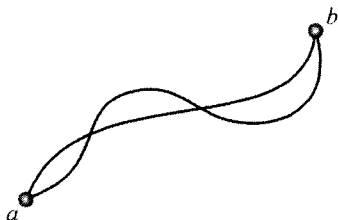


图7.4 在量子理论中, 从 a 至 b 的每条路径都带有正比于 e^{iA} 的振幅, 这里 A 是作用量积分[见第 19 章]

位形的所有路径[见图 7.4]. 每一路径带有正比于 e^{iA} 的振幅, 所有这些振幅的迭加即为态矢量. 当 \hbar 趋于 0 时, 具有稳定相位 $\delta A = 0$ 的路径才是重要的路径, 这就导致经典的描述法. 以 \hbar 的形式展开, 就是著名的 W. K. B 近似法. 由于(7.9), 可以期望 g^2 起到如同 \hbar 所起的作用:

$$g^2 \sim \hbar. \quad (7.10)$$

因此以 g^2 的展开式和以 \hbar 的展开式是等价的; 带头项必须和经典极限相同. 怎样实现这种量子展开式将在 7.6 节中给出. 这里我们仅指明: (7.10) 式解释了为什么在弱耦合的情形下, 经典孤立子的存在性就意味着一个对应的量子解. 例如, 考虑到(7.6)—(7.7), 经典孤立子的能量为

$$E_{\text{经典}} = O(g^{-2}) \quad (7.11)$$

的形式. 在微扰展开式中, 相应量子解的能量为

$$E_{\text{量子}} = E_{\text{经典}} [1 + O(g^2) + O(g^4) + \dots]. \quad (7.12)$$

由此, 至少在形式上

$$\text{当 } g \rightarrow 0 \text{ 时, } E_{\text{量子}} \rightarrow E_{\text{经典}}. \quad (7.13)$$

另一个令人高兴的方面是, 在传统的可重正化的一类理论中, 所有在(7.12)式中的辐射修正 $O(g^2)$, $O(g^4)$, \dots 对孤立子来说可望自动地都是有限的. 这和经典孤立子解到处是规则这一点紧密联系着的. 在非常高的频率下, 一入射平面波为孤立子散射的散射振幅必定是小得可以忽略. 故孤立子解的存在性应不改变理论的高能行为. 对于可重正化的理论来说, 由于所有的辐射修正是有限的, 在现实意义上讲, 极限(7.13)是成立的, 由此经典解联系着量子解. 由于测不准原理, 一量子孤立子不能一直局限在空间中. 量子孤立子的定义是通过(7.12)—(7.13)与对应的经典

解相联结的.

若局限于可重正化相对论定域场论,则所有孤立子解可分为两大类(详细的将在下面几节中给出).

(1) 拓扑孤立子. 必要条件是应存在简并的真空态使得孤立子态在无穷远处的边界条件在拓扑上和物理的真空态不同. 拓扑孤立子解的一些典型例子是一维空间中的正弦-戈登方程*, 二维空间中的尼尔森和奥森森**的涡旋解和三维空间的特霍夫特和普列耶可夫***的磁单极子解.

(2) 非拓扑孤立子. 对于非拓扑孤立子的无穷远处的边界条件和真空态的相同. 由此,不需要简并真空态. 非拓扑孤立子存在的必要条件是应当存在一个附加的守恒定律. 一如我们将在下面几节中要讨论的,非拓扑孤立子也能存在于任何维空间****中.

7.3 一维空间例

为简单计,首先考虑一维空间(加上时间一维)中的孤立子. 由于(7.10)–(7.13),我们只需检验经典系统. 由此,一如将在7.6节中证明的,量子孤立子可由微扰级数推导出来.

1. 拓扑孤立子 设 ϕ 为厄米场. 按(7.2),拉氏密度可写成

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} \right)^2 - \frac{1}{g^2} V(g\phi), \quad (7.14)$$

式中 $x_\mu = (x, it)$, 作替换

$$\phi = \frac{1}{g} \sigma,$$

* 它的定义见习题7.1.

** Nielsen H B, Olesen P. *Nucl Phys*, 1973, **B61**: 45.

*** 'tHooft G. *Nucl Phys*, 1974, **B79**: 276; Polyakov A M. *JETP Lett*, 1974, **20**: 194.

**** Friedberg R, Lee T D, Sirlin A. *Phys Rev*, 1976, **D13**: 2739; *Nucl Phys*, 1976, **B115**: 1, 32.

\mathcal{L} 变为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g^2} \mathcal{L}_\sigma, \quad (7.15)$$

式中

$$\mathcal{L}_\sigma = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_\mu} \right)^2 - V(\sigma). \quad (7.16)$$

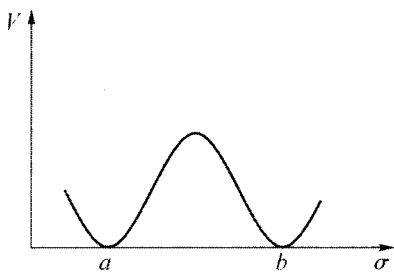


图 7.5 具有拓扑孤立子解的
理论中 $V(\sigma)$ 的示意图

由于拓扑孤立子的必要条件是存在简并的真空态,故 $V(\sigma)$ 必然存在一个以上的极小. 不失普遍性, 可选 V 的极小为 0. 故一如图 7.5 中所示, $V \geq 0$, 且具有一个以上的极小, 比如在 $\sigma = a, b, \dots$ 处 $V(\sigma) = 0$. 运动方程以 σ 表示, 有

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_\mu^2} - \frac{dV}{d\sigma} = 0. \quad (7.17)$$

与时间无关的解由

$$\frac{d^2 \sigma}{dx^2} - \frac{dV}{d\sigma} = 0$$

确定. 可将上式乘以 $\frac{d\sigma}{dx}$ 然后积分, 这导致

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\sigma}{dx} \right)^2 - V(\sigma) = \text{常数}. \quad (7.18)$$

存在一种简单的力学类比: 考虑一点粒子, 其“位置”为 σ , 其“时间”为 x , 在一个“势” $-V(\sigma)$ 中运动, 一如图 7.6 所示. 则上述方程就是在这类比中的能量守恒定律. 在这个类比中, 设在“时间” $x = -\infty$ 时, 粒子的“位置” σ 处于 a . 非常轻轻地推动粒子使之向右开始运动. 在“时间” x 增加时, σ 从 a 移至 b ;

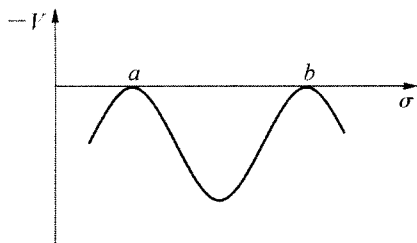


图 7.6 在力学类比问题中的“势” $-V$

由于能量守恒,当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\sigma \rightarrow b$. 其解析表达式为

$$x = \int^{\sigma} \frac{d\sigma'}{\sqrt{2V(\sigma')}}, \quad (7.19)$$

式中包含一积分常数 ξ , 一如图 7.7 所示.

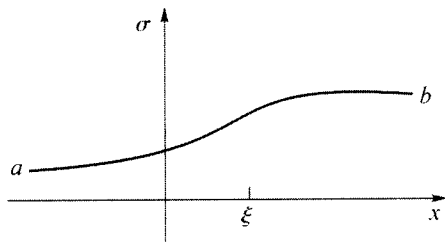


图 7.7 一个拓扑孤立子

现在回到原来的场论问题,由于(7.14)–(7.16),对于一个与时间无关的解,能量密度可写为

$$\epsilon(x) = \frac{1}{g^2} \epsilon_{\sigma}(x),$$

式中

$$\epsilon_{\sigma}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\sigma}{dx} \right)^2 + V(\sigma). \quad (7.20)$$

从图 7.7 以及 $V(a) = V(b) = 0$ 可得能量密度 $\epsilon(x)$ 为图 7.8 中所给出的形式,它在任意时刻在空间上是有限的. 由于场 $\phi = \frac{\sigma}{g}$ 在 $x = \pm \infty$ 的边界条件是不一样的,因此称它为拓扑孤立子解. 其稳定性为无穷远处的

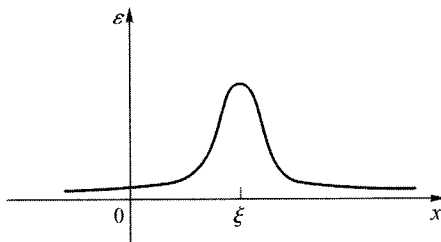


图 7.8 对于图 7.7 中的孤立子的能量密度示意图

边界条件所保证.

在力学类比中,令“时间” $x = -\infty$,“位置” σ 处于 b ,则可导出另外一个解.当 x 增加时, σ 从 b 移至 a .如果称图 7.7 给出的解为孤立子,这个新的解则称为反孤立子,两者具有相同的能量.由此,正反粒子共轭的概念在经典领域里就已经存在.

由于洛伦兹不变性,如果 $\sigma(x)$ 是(7.17)的一个解,则一定也满足同一场方程,这里 $\gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$.由此,对于一个运动着的孤立子或反孤立子解也是存在的.

为了描写一孤立子和一反孤立子之间(或二孤立子之间或二反孤立子之间)的散射,考虑 $t = -\infty$ 时的初始条件,其中一个处于 $x = -\infty$ 以速度 $v > 0$ 运动,另一个处于 $x = +\infty$ 以速度 $-v$ 运动.一般说来,由于碰撞,状态在时间进程之中将发生变化.在正弦-戈登方程(在习题 7.1 中定义)的特殊情形中,由于无限多个守恒定律的出现,每个孤立子或反孤立子的形状和速度将保持不变,即使在这种对头碰之后也是如此.我们称这种特殊情形为**不受破坏的孤立子**.不受破坏的孤立子仅在一维空间中存在.如又要求有相对论不变性,则它只有正弦-戈登方程的情形下才存在.

2. 非拓扑孤立子 为构造非拓扑孤立子,人们无需简并的真空.但一如我们将会见到的,由于要求有附加的守恒定律,则至少必须存在一个复数场.

同样我们将首先考虑一维空间的情形.令 ϕ 为一复数场.按一般形式(7.2),假设拉氏密度为

$$\mathcal{L} = -\frac{\partial\phi^\dagger}{\partial x_\mu} \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} - \frac{1}{g^2} U(g^2\phi^\dagger\phi), \quad (7.21)$$

式中 † 表示厄米共轭.利用变分原理(2.10),可得运动方程为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_\mu^2} - \phi \frac{d}{d(g^2\phi^\dagger\phi)} U(g^2\phi^\dagger\phi) = 0, \quad (7.22)$$

式中,和以前一样 $x_\mu = (x, it)$.我们将假定 $U(\phi^\dagger, \phi)$ 在 $\phi = 0$ 处有一单一的极小.此外, U 的极小值为 0.正如(7.3)中那样

$$\text{当 } \phi \rightarrow 0 \text{ 时, } \frac{1}{g^2} U \rightarrow m^2\phi^\dagger\phi, \quad (7.23)$$

其中 m 为普通的平面波解的质量[见(7.35)—(7.36)以下].

拉氏密度(7.21)在相位变换

$$\phi \rightarrow e^{-i\theta}\phi. \quad (7.24)$$

下是不变的. 故可直接验证:流

$$j_\mu = i\phi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi^\dagger}{\partial x_\mu}\right)} - i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}\right)} \phi \quad (7.25)$$

满足

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \quad (7.26)$$

在我们的情形中,考虑到(7.21),流 j_μ 为

$$j_\mu = i \frac{\partial \phi^\dagger}{\partial x_\mu} \phi - i\phi^\dagger \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}. \quad (7.27)$$

粒子密度 ρ 由 j_μ 的时间分量乘以 $-i$ 给出. 从(7.27)可得

$$\rho = i(\phi^\dagger \dot{\phi} - \dot{\phi}^\dagger \phi). \quad (7.28)$$

其空间积分为粒子数

$$N = \int \rho dx. \quad (7.29)$$

由于(7.26), N 是守恒的,即

$$\dot{N} = 0. \quad (7.30)$$

从(7.28)—(7.29)可见对于 $N \neq 0$, ϕ 必须随时间变化. 不难证明最低能量的经典解应具有如下形式

$$\phi = \frac{1}{g}\sigma(x)e^{-i\omega t}, \quad (7.31)$$

式中 $\sigma(x)$ 是实的. (7.22)用 σ 表示为

$$\frac{d^2\sigma}{dx^2} + \omega^2\sigma - \sigma \frac{d}{d\sigma^2}U(\sigma^2) = 0, \quad (7.32)$$

此式乘以 $\frac{d\sigma}{dx}$ 后变为可积. 结果为

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\sigma}{dx} \right)^2 - V(\sigma) = \text{常数}, \quad (7.33)$$

式中

$$V(\sigma) = \frac{1}{2} U(\sigma^2) - \frac{1}{2} \omega^2 \sigma^2. \quad (7.34)$$

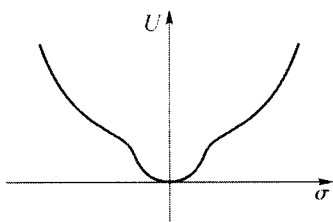


图 7.9 $U(\sigma^2)$ 对 σ 的一例

图 7.9 的例子中,画出了 U 函数对 σ 的关系;一如前述, U 在 $\sigma = 0$ 处有一单一极小.

令 Ω 是包含整个系统的体积. 当 $\Omega \rightarrow \infty$ 时, (7.22) 允许有通常的平面波解.

$$\phi = \sqrt{\frac{N}{2\omega\Omega}} e^{i(kx - \omega t)}, \quad (7.35)$$

式中

$$\omega = \sqrt{k^2 + m^2}. \quad (7.36)$$

这是因为在这极限中,振幅 ϕ 变成无穷小;故考虑到 (7.23), (7.22) 变为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\mu^2} - m^2 \phi = 0, \quad (7.37)$$

而 (7.35) 为其解. 由于当 $\Omega \rightarrow \infty$, x 有限时孤立子的振幅并不是无穷大, 因此孤立子解和平面波解是不同的. 此外, 当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时, 孤立子振幅指数地趋向于零, 故 $\omega^2 < m^2$. 因此我们可将孤立子的这两种解的类型看成在解析上彼此是连续的:

$$\text{对平面波解, } \omega^2 > m^2,$$

$$\text{对孤立子解, } \omega^2 < m^2, \quad (7.38)$$

这一关系在任意维空间中成立.

现在我们来证明: 为了求非拓扑的孤立子解, (7.34) 式所定义的函数 $V = \frac{1}{2}(U - \omega^2 \sigma^2)$ 至少在 $\omega^2 = m^2$ 处必须具有图 7.10 的形式. 具体地

讲,有条件

$$U(\sigma^2) - \omega^2 \sigma^2 = 0. \quad (7.39)$$

对于 $\omega^2 \leq m^2$, 除了有 $\sigma = 0$ 的解外还有其他 $\sigma \neq 0$ 的解存在. 假定的确如此, 则如同上面的拓扑孤立子例子那样, 我们可考虑如下的力学类比: 在“位置” σ 处、在“时间” x 时刻, 一个点粒子在位

势 $-V = -\frac{1}{2}[U - \omega^2 \sigma^2]$ 中运动, 如图 7.11 所示. 在“时间” $x = -\infty$ 时,

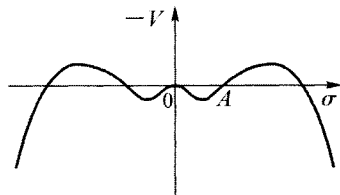


图 7.11 在力学类比中的“位势” $-V$

可令粒子处于 $\sigma = 0$ 的“位置”. 我们仍然极端缓慢地推动粒子使之向右方运动. 当 x 增加时, σ 移动到 A 处然后在 $x = +\infty$ 时回至 0 点. 普遍解由下式给出

$$x - \xi = \int_A^\sigma \frac{d\sigma}{\sqrt{2V(\sigma)}}, \quad (7.40)$$

式中 ξ 是积分常数. 图 7.12 中给出解

的示意图. 当 $x = \xi, \sigma = A$. 在两个无穷处, 非拓扑孤立子解 σ 满足同一个条件:

当 $x \rightarrow \infty$ 或 $-\infty$ 时, $\sigma \rightarrow 0$

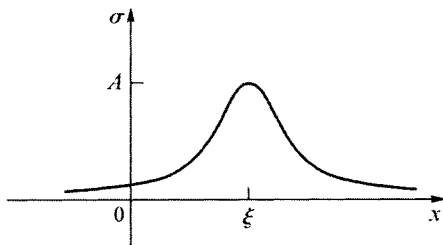


图 7.12 一个非拓扑孤立子解

我们看到, 考虑到(7.23), 当 $\sigma \rightarrow 0$ 时, 函数

$$V = \frac{1}{2}(U - \omega^2 \sigma^2)$$

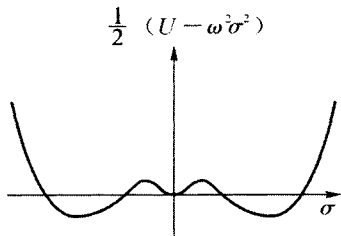


图 7.10 $V = \frac{1}{2}(U - \omega^2 \sigma^2)$ 示意图

变为

$$V \rightarrow \frac{1}{2}(m^2 - \omega^2)\sigma^2 + O(\sigma^4). \quad (7.41)$$

由此,为使图 7.10 中的曲线 $V(\sigma)$ 在原点 $\sigma = 0$ 处弯向上方,必须有

$$\omega^2 < m^2,$$

这肯定了(7.38)式. 此外若 σ^4 的项 < 0 , 则条件(7.39)很容易得到满足, 这相当于场之间吸引的情形.

作为一个显然的例子,可参考习题 7.2, 其中

$$\frac{1}{g^2}U = \frac{m^2 \phi^\dagger \phi}{1 + \epsilon^2} [(1 - g^2 \phi^\dagger \phi)^2 + \epsilon^2],$$

解为

$$\phi = \frac{1}{g} \left[\frac{a}{1 + \sqrt{1 - a} \cosh y} \right]^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega t}, \quad (7.42)$$

式中

$$a = (1 + \epsilon^2) \frac{1}{m^2} (m^2 - \omega^2)$$

和

$$y = 2\sqrt{m^2 - \omega^2}(x - \xi).$$

方程(7.19)和(7.40)将寻找一个一维空间的任意拓扑的或非拓扑的孤立子解的问题归结为积分问题.

7.4 德里克定理

当空间维数(时间维数除外) $D > 1$ 时,德里克(Derrick)* 定理对孤立子解的类型给以严格的限制. 考虑一由标量场 ϕ_1, \dots, ϕ_N 组成的经典系统,其拉氏密度为

* Derrick G H. *J Math Phys*, 1964, 5:1252.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_a [\dot{\phi}_a^2 - (\nabla \phi_a)^2] - U(\phi_a),$$

其中 $a = 1, 2, \dots, N$. ∇ 是 D 维的梯度矢量, U 假定 ≥ 0 具极小值为

$$\min U(\phi_a) = 0. \quad (7.43)$$

因此,基态是能量为零的态.但是可以存在一个以上这样的态.

定理. 对于 $D \geq 2$, 只有基态是能量有限,与时间无关的解;亦即 ϕ_a 到处等于常数,对此 $U(\phi_a) = 0$.

证明. 由拉氏密度,可得哈密顿量密度为

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_a [\Pi_a^2 + (\nabla \phi_a)^2] + U(\phi_a).$$

式中 $\Pi_a = \dot{\phi}_a$ 是 ϕ_a 的共轭动量.令 $\phi_a(\mathbf{r})$ 是理论的与时间无关的解,故 $\phi_a(\mathbf{r})$ 满足场方程:

$$\nabla^2 \phi_a - \frac{dU}{d\phi_a} = 0.$$

相应的总能量 $\int \mathcal{H} d^3r$ 为

$$E(1) = T_1 + V_1,$$

式中

$$T_1 \equiv \frac{1}{2} \sum_a \int (\nabla \phi_a(\mathbf{r}))^2 d^D r$$

和

$$V_1 \equiv \int U(\phi_a(\mathbf{r})) d^D r.$$

可以构造一个新的函数 $\phi'_a(\mathbf{r})$, 定义为

$$\phi'_a(\mathbf{r}) \equiv \phi_a(\lambda \mathbf{r}).$$

若场的分布在任何地方都取这一新的函数 $\phi'_a(\mathbf{r})$, 由于它也是与时间无关的, 因此现在的总能量为

$$E(\lambda) = T_\lambda + V_\lambda,$$

式中

$$T_\lambda = \frac{1}{2} \sum_a \int (\nabla \phi_a^i(r))^2 d^D r$$

和

$$V_\lambda \equiv \int U(\phi_a^i(r)) d^D r.$$

因为 $\phi_a^i(r)$ 是从 $\phi_a^i(r)$ 通过标度变换

$$r \rightarrow \lambda r$$

得到的, 我们见到 T_λ 和 V_λ 的值和它们在 $\lambda = 1$ 处的值相联系:

$$T_\lambda = \lambda^{2-D} T_1$$

和

$$V_\lambda = \lambda^{-D} V_1.$$

由此, $E(\lambda)$ 对 $\ln \lambda$ 的导数为

$$\lambda \frac{dE(\lambda)}{d\lambda} = (2-D)T_\lambda - DV_\lambda.$$

当 $\lambda = 1$ 时, $\phi_a^i(r)$ 变为 $\phi_a^i(r)$, 后者是场方程的解, 从而其总能量对小的变更必须是稳定的. 因此 $\frac{dE(\lambda)}{d\lambda}$ 在 $\lambda = 1$ 时为零, 由此得

$$(2-D)T_1 - DV_1 = 0. \quad (7.44)$$

现在, 对于 $D \geq 2$ 的情形下, $(2-D)T_1$ 和 $-DV_1$ 都 ≤ 0 . 若 $D > 2$, 则 (7.44) 式显然不能满足, 除非 $T_1 = V_1 = 0$. 对于 $D = 2$, (7.44) 式意味着 $V_1 = 0$, 意即到处 $U(\phi_a^i) = 0$ 并且 $E(1) = T_1$. 假设当 ϕ_a^i 要么等于常数 c_a , 要么等于常数 c'_a 时, 有 $U(\phi_a^i) = 0$. 若在空间某区域内 $\phi_a^i = c_a$, 而在邻域内 $\phi_a^i = c'_a$, 则 $\nabla \phi_a^i$ 在穿越两区域边界时含有 $-\delta$ 函数, 从而 $(\nabla \phi_a^i)^2$ 的积分给出 ∞ . 因此能量为有限的解只有一个, 即到处是 $\phi_a^i =$ 同一常数, 证毕.

由此, 当 $D > 1$ 时, 为了使孤立子解存在, 我们必须要么将非零自旋场包含进来, 要么考虑与时间有关的但是非弥散的解. 前者导致规范场的拓扑孤立子, 一如前面提到过的尼尔森和奥勒森的二维涡旋解以及特霍夫特和波列雅可夫的三维磁单极解. 后者为多维非拓扑孤立子所代表, 其

特性将在下节中讨论.

7.5 孤立子与平面波的关系

在(7.35)式已见到,任何一个非线性相对论场方程总是允许有

$$\sqrt{\frac{N}{2\omega\Omega}} e^{ik \cdot r - i\omega t} \quad (7.45)$$

形式的平面波解. 这里 $\Omega \rightarrow \infty$ 是系统的体积, $\omega = \sqrt{k^2 + m^2}$.

由于拓扑的和平面波的两类解所满足的边界条件不同,因此对拓扑孤立子来说其稳定性得到保证使它不会衰变成平面波. 对于非拓扑孤立子,其稳定性则依赖于最低能量解的类型. 下面将对这一问题作一较详细的分析.

考虑非线性理论,其中比如说粒子数 N 是守恒的;此外还假定理论具有非拓扑孤立子解. 对于平面波解(7.45),其能量和 N 成线性关系,因此

$$E(\text{平面波}) = N\omega. \quad (7.46)$$

由于

$$\omega(\text{平面波}) \geq m,$$

有

$$E(\text{平面波}) \geq Nm. \quad (7.47)$$

对于孤立子解,能量 E 是 N 的非线性函数,一如在(7.38)中所见,相应的 $\omega < m$.

1. 一维空间 我们将证明,在一维空间中,若存在非拓扑孤立子解,则最低能量永远小于 Nm :

$$E(\text{孤立子}) < Nm, \quad (7.48)$$

这一点在图 7.13 中表示出来. 为证明(7.48)式,先注意 N 和复数场 ϕ 的相角 $\theta \equiv \omega t$ 是共轭变量. 从哈密顿量方程,

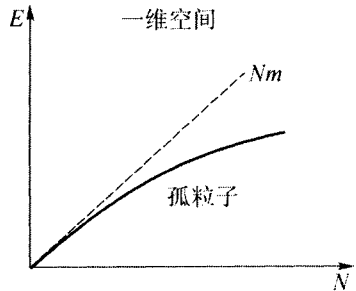


图 7.13 N 给定下,一维空间的孤立子能量永远小于平面波的能量

我们有

$$\dot{N} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \quad (7.49)$$

和

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial N}. \quad (7.50)$$

由于在(7.24)的相位变换下的不变性,哈密顿量是和 θ 无关的.故从(7.49)即可给出(7.30),即 N 守恒.由于 $\omega = \dot{\theta}$ 和 H 的值即为能量 E ,因此(7.50)可写成

$$\omega = \frac{dE}{dN}. \quad (7.51)$$

现在根据(7.38),有

$$\omega(\text{孤立子}) < m, \quad (7.52)$$

(7.51)意味着

$$\frac{d}{dN} E(\text{孤立子}) = \omega < m. \quad (7.53)$$

其次,我们将证明当 $\omega \rightarrow m_-$ 以及 $|x|$ 大时,非拓扑孤立子的振幅有如下的量级:

$$|\phi| \sim \frac{\sqrt{m^2 - \omega^2}}{g} e^{-\sqrt{m^2 - \omega^2}} |x|. \quad (7.54)$$

一如从(7.42)式可见,这个渐近行为至少在所引用的例子中是成立的.当 $|x|$ 大时, $\phi = \frac{\sigma}{g}$ 一定是小的.一般来说可以由此导出渐近行为成立.从(7.41)有

$$\text{当 } \sigma \rightarrow 0 \text{ 时 } \quad V \rightarrow \frac{1}{2}(m^2 - \omega^2)\sigma^2 + O(\sigma^4).$$

在(7.54)中,指数因子是从 $-\frac{d^2\sigma}{dx^2}$ 与 $\frac{dV}{d\sigma}$ 相等而来的,乘数因子 $\frac{\sqrt{m^2 - \omega^2}}{g}$ 是由于 $V(\sigma)$ 中二次项和四次项的近似平均分配而来的,即

$$(m^2 - \omega^2)\sigma^2 \sim \sigma^4. \quad (7.55)$$

由此,在任何一维空间中(7.54)是成立的.在一维空间中,当 $\omega \rightarrow m_-$ 时

$$N \rightarrow 2m \int |\phi|^2 dx \sim \frac{1}{g^2} \sqrt{m^2 - \omega^2} \rightarrow 0, \quad (7.56)$$

这是因为 $|\phi|^2$ 带有一个 $\frac{m^2 - \omega^2}{g^2}$ 因子,而 x 的积分给出另一个

$\frac{1}{\sqrt{m^2 - \omega^2}}$ 的因子.图 7.13 中,虚线代表平面波解的最低能量态 $\omega = m$.

由于非拓扑孤立子是平面波解至 $\omega < m$ 区域的解析延拓,故曲线 E (孤立子)对 N 的关系应在 $\omega \rightarrow m_-$ 时与直线 E (平面波) = Nm 相连接.从(7.56)可见,这连结处位于 $N = 0$.故对于一维非拓扑解,(7.53)式导致

$$E(\text{孤立子}) = \int_0^N \omega dN < m \int_0^N dN = mN, \quad (7.57)$$

对任意 N 和 g ,这个式子确立了(7.48).

2. 二维空间 将非拓扑孤立子推广到 > 1 维空间的情形已在文献中给出.细致的讨论已超过了本书的范围.和在一维空间的情形一样,人们所需的全部东西就是某种非线性相互作用,它能产生场(或场量子)之间的吸引力;通过标量场传递的相互作用正是这种情形.利用变分不难证明

$$\text{当 } N \rightarrow \infty \text{ 时, } E(\text{孤立子}) < Nm. \quad (7.58)$$

不论二维空间或三维空间,按照导致(7.54)的推理可见,当 $\omega \rightarrow m_-$ 且径向距离 r 大时,非拓扑孤立子的振幅为

$$|\phi| \sim \frac{\sqrt{m^2 - \omega^2}}{g} e^{-\sqrt{m^2 - \omega^2} r}. \quad (7.59)$$

的量级.由此,在二维空间中,当 $\omega \rightarrow m_-$ 时

$$N \rightarrow 2m \int |\phi|^2 d^2 r = N_c \sim O(1). \quad (7.60)$$

这是因为在 $|\phi|^2$ 中的因子 $(m^2 - \omega^2)$ 正好与 $d^2 r$ 积分中相应的因子

$(m^2 - \omega^2)^{-1}$ 严格相消的缘故. 结果在图 7.14 中给出. 存在一个临界数 N_c . 非拓扑孤立子只在 $N > N_c$ 时存在; 在这区域内, 最低能量解总是孤立子, 而不是平面波.

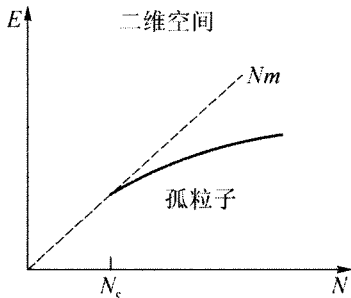


图 7.14 实线是二维非拓扑孤立子的 E (孤立子)对 N 的关系

3. 三维空间 当 $\omega \rightarrow m_-$ 和 r 大的时候, 非拓扑孤立子的渐近行为仍由 (7.59) 给出, N 的对应值为

$$N \rightarrow 2m \int |\phi|^2 d^3r.$$

由于(7.59)式中的指数因子, 对 d^3r 积分时给出一个 $\sim (m^2 - \omega^2)^{-\frac{3}{2}}$ 的因子. 故当 $\omega \rightarrow m_-$ 时

$$N \sim O\left(\frac{1}{\sqrt{m^2 - \omega^2}}\right) \rightarrow \infty. \tag{7.61}$$

还可证明*, 当 ω 足够小时, N 必须随 ω 的减小而增长, 并以这种方式趋向(7.58)式给出的极限. 这和

$$\frac{d}{dN} E(\text{孤立子}) = \omega > 0 \tag{7.62}$$

一起产生如图 7.15 中所示的形式颇为奇特的 E (孤立子)曲线. 当 $\omega = m_-$ 时 $N \rightarrow \infty$, 但孤立子的能量为 Nm_+ . 当 ω 从 m_- 下降时, N 亦随之下降直到 N_c ; 在这整个间隔内, 孤立子能量 $> Nm$. 当 ω 进一步下降时, N 则开始回升; 在 $N = N_c$ 处穿过直线 $E = Nm$. 若 ω 再下降, 则 N 保持上升, 直到 $N \rightarrow \infty$ 其 E (孤立子)总是 $< Nm$.

现在, 除了存在一个临界点 c 外还

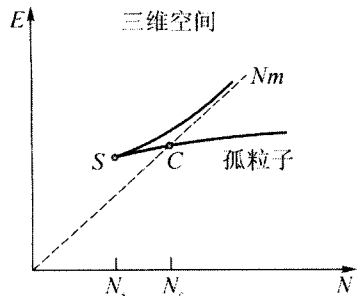


图 7.15 实线是三维拓扑孤立子的 E (孤立子)对 N 的关系

* Friedberg R, Lee T D, Sirlin A. *Phys Rev*, 1976, **D13**: 2739; *Nucl Phys*, 1976, **B115**: 1, 32.

有一个尖峰 s , 满足 $N_c > N_s$. 对于 $N < N_s$, 没有孤立子解. 对于 $N_s < N < N_c$, 能量最低的解是平面波; 对于 $N > N_c$, 能量最低的解总是孤立子. 在图 7.15 中, 沿孤立子曲线的下面分支, 对 $N > N_c$ 的孤立子解是绝对稳定的, 是能量最低的解. 当 $N_c > N > N_s$, 对无限小的微扰来说, 可以证明, 孤立子解是稳定的, 即使它并不是能量最低的状态. 沿孤立子上面分支, 孤立子解总是不稳定的. N_c 和 N_s 的数值依赖于理论中的参数. 当 $N_c < 1$, 从而 N_s 也 < 1 , 这时要找个例子是不难的.

在量子理论中 N 只取整数 $0, 1, 2, \dots$. 由此, 当 $N_c < 1$, 若经典结果是量子解的良好近似时, 则从真空态 ($N = 0$) 变到任何 $N \neq 0$ 的态时, 系统的最低能量态的特性改变是很突然的. 当 N 小时, N 体束缚态的经典孤立子描述方法是和常用的贝特-萨佩特方程(比如在梯形近似下)的解的描写方法十分不同, 注意到这一点是很重要的. 例如在孤立子的描写方法中, $N = 1$ 的态和 $N = 2$ 的态之间并无显著的不同, 两者都是“团状的”. 在贝特-萨佩特的描写方法中, $N = 1$ 的态是“点状的”, 而 $N = 2$ 的态是由两个“点状”粒子的波函数形成的“团状”物.

说明. 在非线形系统中, 不难想象这样的情况: 只要稍稍改变基态的参数, 基态就会突然改变其性质. 上面三维空间的情形就是这种例子; 当 N 从 $< N_c$ 改变到 $> N_c$ 时, 能量最低的解从平面波改变为孤立子. 类似的例子还可以在简单的力学问题中找到.

为举例说明这点, 让我们考虑在中心位势中运动的单个点粒子. 粒子的位矢为 \mathbf{r} , 其共轭动量为 \mathbf{p} . 假定哈密顿量为

$$\frac{1}{2} \mathbf{p}^2 + \frac{1}{2} r^2 [(1 - gr)^2 + \Delta^2], \quad (7.63)$$

式中 $r = |\mathbf{r}|$, g 和 Δ 为实参数. 角动量 $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ 是守恒的. 在固定值 $l = |\mathbf{l}|$ 下, (7.63) 变为

$$\frac{1}{2} p_r^2 + V_l(r),$$

式中 p_r 为径向动量, 而

$$V_l(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{l}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} r^2 [(1 - gr)^2 + \Delta^2].$$

这里 l 和上面讨论中的守恒量 N 起着相同的作用. 对于 l 和 Δ 都不太

大、 $g > 0$ 时, $V_l(r)$ 有两个定域极小, 例如在 $r = r_1$ 和 r_2 , 且 $r_1 < r_2$. 如在图 7.16(a) 中所示, 当 $l = 0$, 可见 $r_1 = 0$. 因此 r_1 表示当 l 小的时候的绝对极小. 很易证明, 存在着一个临界值 l_c . 对 $l > l_c$ 时, $V_l(r)$ 的绝对极小值从 r_1 移到 r_2 , 一如图 7.16(b) 所示. 现在转到量子理论中来, 这时 l 只取整数值. 故若 $l_c < 1$, 则 $l = 0$ 态的特性和所有 $l \neq 0$ 的态大不相同. 这和我们场论中的问题是十分相似的, 场论问题是和参数相关的, 倘使 $N_c < 1$, 则真空态 ($N = 0$) 也可以和所有 $N \neq 0$ 的态大不相同.

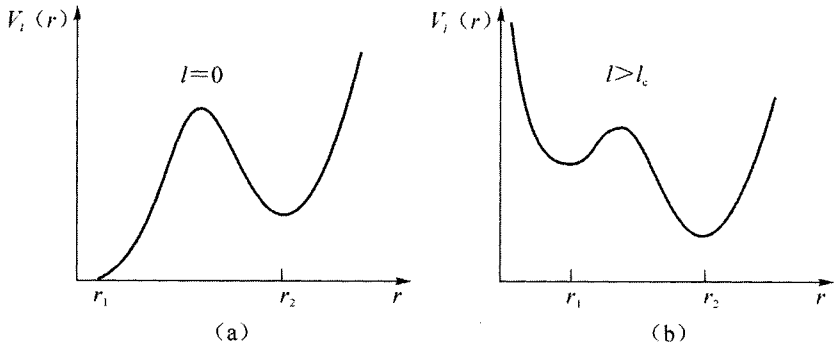


图 7.16 简单例子中的 $V_l(r)$ 对 r 的关系

(a) $l = 0$; (b) $l > l_c$.

注意, 在这个例子中, 如 Δ 足够小, 则总可以通过安排使对任意给定的 g 有 $l_c < 1$. g 小只意味着非线性解离原点很远.

若 N_c 小, 则孤立子描写(比如说二体束缚态的)方法和通常的贝特-萨佩特描写方法(例如用梯形近似)确实是十分不同的.

7.6 量子化

现在我们回到量子化这一重要问题上来, 这已在 7.2 节中简略评述过. 要作出量子展开式(7.12), 有多种方法*. 这里我们将用集体

* 详细参考文献见 Extended Systems in Field Theory 会议集, *Physics Reports*, 1976, 23C.

坐标*按正则量子化步骤来进行。

1. 拉氏量、哈密顿量和对易关系 为简洁起见,考虑在7.3节中讨论过的一维空间的非拓扑孤立子的例子.拉氏密度由(7.21)给出

$$\mathcal{L} = -\frac{\partial\phi^\dagger}{\partial x_\mu} \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} - \frac{1}{g^2} U(g^2\phi^\dagger\phi).$$

相应的哈密顿量密度为

$$\mathcal{H} = \Pi^\dagger \Pi + \frac{\partial\phi^\dagger}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{1}{g^2} U(g^2\phi^\dagger\phi), \quad (7.64)$$

式中 Π 和 Π^\dagger 分别为 ϕ 和 ϕ^\dagger 的共轭动量,由

$$\Pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \dot{\phi}^\dagger, \quad \Pi^\dagger = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}^\dagger} = \dot{\phi} \quad (7.65)$$

给定.

经典孤立子解可写成

$$\phi_{cl} = \frac{1}{g} \sigma(x - \xi) e^{-i\theta}, \quad (7.66)$$

式中 σ 由(7.40)给定, ξ 是积分常数, $\theta = \omega t + \text{常数}$. 在 ξ 或是 θ 变更一常量时,经典解是简并的;亦即 ϕ_{cl} 在

$$\phi_{cl} \rightarrow \phi_{cl} + \delta\phi, \quad (7.67)$$

$$\delta\phi = -\frac{1}{g} e^{-i\theta} \left[\frac{d\sigma}{dx} \delta\xi + i\sigma\delta\theta \right]. \quad (7.68)$$

的变更下,它仍是一个解,且具有相同能量.式中变更 $\xi \rightarrow \xi + \delta\xi$ 代表一空间平移,而 $\theta \rightarrow \theta + \delta\theta$ 相应于 ϕ 中的相位改变;它们的共轭动量相应于系统的总动量 P 和粒子数 N . 在变换(7.67)—(7.68)下的不变性意味着 P 和 N 是守恒的. 经典里 ξ 和 θ 与 P 和 N 是对易的,因此当系统具有确定动量 P 和确定的粒子数 N 时, ξ 和 θ 都可任意变化,导致了前述的经典解的简并性. 一如我们将会看到的,在量子力学中将 ξ 和 θ 处理成集体坐标就可得到这一简并性;它们的共轭动量变为导数算符

* Christ N H, Lee T D. *Phys Rev*, 1975, **D12**:1606.

$$P = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad \text{和} \quad N = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (7.69)$$

首先我们将按第 2 章中给出的标准方法作出量子化. 对易关系由

$$\begin{aligned} [\Pi(x, t), \phi(x', t)] &= [\Pi^\dagger(x, t), \phi^\dagger(x', t)] \\ &= -i\delta(x - x') \end{aligned} \quad (7.70)$$

给出, 其他 ϕ , ϕ^\dagger , Π 和 Π^\dagger 间的等时对易子为 0. 系统的动力学则由对任意算符 $O(t)$ 都适用的海森伯方程

$$[H, O(t)] = -i\dot{O}(t)$$

确定. 如在(2.48)中一样, 可将复数场分解为厄米分量

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \quad \text{和} \quad \phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2), \quad (7.71)$$

式中 ϕ_1 和 ϕ_2 为厄米场. 它们的傅里叶级数可写成

$$\phi_\alpha(x, t) = \sum_k \sqrt{\frac{2}{L}} [x_{\alpha, k}(t) \cos kx + y_{\alpha, k}(t) \sin kx], \quad (7.72)$$

式中 $\alpha = 1$ 和 2 , L 是系统的体积(即长度), 而 k 由

$$k = \frac{2n\pi}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.73)$$

给出. ϕ_α 的厄米性意味着 $x_{\alpha, k}$ 和 $y_{\alpha, k}$ 也是厄米的, 即

$$x_{\alpha, k} = x_{\alpha, k}^\dagger \quad \text{和} \quad y_{\alpha, k} = y_{\alpha, k}^\dagger. \quad (7.74)$$

共轭动量 Π 和 Π^\dagger 可以用类似的方式分解成

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Pi_1 - i\Pi_2) \quad \text{和} \quad \Pi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Pi_1 + i\Pi_2). \quad (7.75)$$

Π_1 和 Π_2 的傅里叶分量可用 $x_{\alpha, k}$ 和 $y_{\alpha, k}$ 的微分算符写出, 有

$$\Pi_\alpha = -i \sum_k \sqrt{\frac{2}{L}} \left[\cos kx \frac{\partial}{\partial x_{\alpha, k}} + \sin kx \frac{\partial}{\partial y_{\alpha, k}} \right]. \quad (7.76)$$

由于(7.72)和(7.76), 有

$$[\Pi_\alpha(x, t), \phi_\beta(x', t)] = -i\delta(x - x')\delta_{\alpha\beta} \quad (7.77)$$

和

$$[\phi_\alpha(x, t), \phi_\beta(x', t)] = [\Pi_\alpha(x, t), \Pi_\beta(x', t)] = 0.$$

式中 α, β 可为 1 或 2, 这依次又导致原来的对易关系(7.70)式.

由于

$$\int \dot{\phi}^\dagger \dot{\phi} dx = \sum_{\alpha, k} \frac{1}{2} (\dot{x}_{\alpha, k}^2 + \dot{y}_{\alpha, k}^2), \quad (7.78)$$

拉氏量可用这些傅里叶分量表示成

$$\int \mathcal{L} dx = \sum_{\alpha, k} \frac{1}{2} (\dot{x}_{\alpha, k}^2 + \dot{y}_{\alpha, k}^2) - V(x_{\alpha, k}, y_{\alpha, k}), \quad (7.79)$$

式中

$$V = \int \left[\frac{\partial \phi^\dagger}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{g^2} U(g^2 \phi^\dagger \phi) \right] dx. \quad (7.80)$$

相应的哈密顿量 $H = \int \mathcal{H} dx$ 为

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha, k} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha, k}^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_{\alpha, k}^2} \right) + V(x_{\alpha, k}, y_{\alpha, k}). \quad (7.81)$$

虽则对于分析平面波来说傅里叶级数是一种方便的展式, 但对于孤立子来说却是特别不恰当的. 因此我们作一变量的变换将傅里叶分量变到一个新的集合.

2. 集体坐标 新的集合由两个以前引进过的集体坐标 $\xi(t)$ 和 $\theta(t)$ 和一些振动坐标 $q_{\pm, n}(t)$, ($n = 2, 3, \dots$) 组成. 要是愿意的话可记成 $q_{+, 1}(t) = \xi(t)$ 和 $q_{-, 1}(t) = \theta(t)$ 使得新的集合为 $\{q_{\pm, n}(t)\}$. 让我们选择两个独立的正交完全的实数 c 数函数集 $\{\psi_{+, n}(x)\}$ 和 $\{\psi_{-, n}(x)\}$, 它们具有条件

$$\psi_{+, 1}(x) = \text{常数} \cdot \frac{d\sigma}{dx} \quad (7.82)$$

和

$$\psi_{-, 1}(x) = \text{常数} \cdot \sigma. \quad (7.83)$$

因此, 对于 $n = 2, 3, \dots$ 我们有

$$\int \frac{d\sigma}{dx} \psi_{+,n} dx = \int \sigma \psi_{-,n} dx = 0. \quad (7.84)$$

除上述条件外,这两个 c 数函数集合可以任意选定. 现在我们将量子场算符 $\phi(x, t)$ 展成

$$\begin{aligned} \phi(x, t) = & \left\{ \frac{1}{g} \sigma(x - \xi) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} [q_{+,n}(t) \psi_{+,n}(x - \xi) \right. \\ & \left. + iq_{-,n} \psi_{-,n}(x - \xi)] \right\} e^{-i\theta}. \end{aligned} \quad (7.85)$$

新坐标 $\xi(t)$ 、 $\theta(t)$ 和 $q_{\pm,n}(t)$ 都是厄米的.

为理解(7.84)中的两个条件,让我们将 ϕ 在孤立子解

$$\frac{1}{g} \sigma(x - \xi) e^{-i\theta}$$

附近展开,并将 $\delta\xi$ 、 $\delta\theta$ 和 $q_{\pm,n}$ ($n \geq 2$) 看成小量. 利用(7.68)和(7.85)可见

$$\begin{aligned} \delta\phi = & \left[-\frac{1}{g} \left(\frac{d\sigma}{dx} \delta\xi + i\sigma \delta\theta \right) \right. \\ & \left. + \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-\frac{1}{2}} (q_{+,n} \psi_{+,n} + iq_{-,n} \psi_{-,n}) \right] e^{-i\theta}. \end{aligned} \quad (7.86)$$

方程(7.84)保证了由于集体坐标 ξ 和 θ 的变更引起的运动不致和振动模式弄错.

将(7.85)式和傅里叶展式(7.71)–(7.72)相等,得到坐标变换

$$x_{a,k}, y_{a,k} \rightarrow q = \begin{pmatrix} \xi \\ \theta \\ q_{+,2} \\ q_{-,2} \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (7.87)$$

这使我们可将微分算符 $\frac{\partial}{\partial x_{a,k}}$ 和 $\frac{\partial}{\partial y_{a,k}}$ 表示成 $\frac{\partial}{\partial \xi}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$, $\frac{\partial}{\partial q_{+,2}}$, $\frac{\partial}{\partial q_{-,2}}$, ... 的线性函数. 将这些线性关系代入(7.81)可将哈密顿量用这些新变量表示出来. 推导这种显示形式的最简单的方法是,首先来考虑经典问题.

(7.85)式对时间的导数给出 $\dot{\phi}$ 作为 $\dot{\xi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{q}_{\pm, 2}$, \dots 的线性函数;亦即

$$\dot{\phi} = \sum_{\lambda, n} \frac{\partial \phi}{\partial q_{\lambda, n}} \dot{q}_{\lambda, n}, \quad (7.88)$$

式中

$$n = 1, 2, 3, \dots, \lambda = +, -.$$

为记号上的方便,设

$$q_{+, 1} = \xi \quad \text{和} \quad q_{-, 1} = \theta. \quad (7.89)$$

由此(7.78)式又可写成

$$\int \dot{\phi}^\dagger \dot{\phi} dx = \frac{1}{2} \tilde{q} \mathfrak{M} \dot{q}, \quad (7.90)$$

式中 \dot{q} 是(7.87)中列矩阵对时间的导数,而

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(q) \quad (7.91)$$

是对称的 $\infty \times \infty$ 维的实矩阵,其矩阵元为

$$\mathfrak{M}_{\lambda, n; \lambda', n'}(q) = \int \left(\frac{\partial \phi^\dagger}{\partial q_{\lambda, n}} \frac{\partial \phi}{\partial q_{\lambda', n'}} + \frac{\partial \phi^\dagger}{\partial q_{\lambda', n'}} \frac{\partial \phi}{\partial q_{\lambda, n}} \right) dx. \quad (7.92)$$

通过(7.90)式对 $\dot{q}_{\lambda, n}$ 进行微分可见,广义坐标 $q_{\lambda, n}$ 的共轭动量 $p_{\lambda, n}$ 为列矩阵

$$p = \mathfrak{M} \dot{q}. \quad (7.93)$$

的第 (λ, n) 个分量.从经典方面看,哈密顿量为

$$H_{cl} = \frac{1}{2} \tilde{p}_{cl} \mathfrak{M}^{-1} p_{cl} + V(q), \quad (7.94)$$

式中 \mathfrak{M}^{-1} 是 \mathfrak{M} 的逆,而函数 $V(q)$ 可将(7.85)代入(7.80)得到.从量子力学方面看,由于变换(7.87)是一个点变换,(7.81)中的广义拉普拉斯算符满足(见习题 7.3)

$$\sum_{\alpha, k} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha, k}^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_{\alpha, k}^2} \right) = \frac{1}{\mathcal{J}} \tilde{p} \mathfrak{M}^{-1} \mathcal{J} p. \quad (7.95)$$

式中列矩阵 p 的矩阵元现在是微分算符

$$p_{\lambda, n} = -i \frac{\partial}{\partial q_{\lambda, n}}, \quad (7.96)$$

\mathfrak{M}^{-1} 仍是(7.94)中同一个逆矩阵, 而

$$\mathcal{J} = \sqrt{\det \mathfrak{M}(q)}. \quad (7.97)$$

考虑到(7.69)和(7.89), p 的头两个分量是系统的总动量 P 和粒子数 N , 即

$$p_{+, 1} = P = -i \frac{\partial}{\partial \xi} \quad \text{和} \quad p_{-, 1} = N = -i \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (7.98)$$

量子的哈密顿量(7.81)等于哈密顿量算符

$$H = \frac{1}{2} \tilde{p} \mathfrak{M}^{-1} \mathcal{J} p + V(q). \quad (7.99)$$

由于经典的孤立子解(7.66)在对两集体坐标 ξ 、 θ 的变更(7.67)——(7.68)下不变, 函数 $V(q)$ 、 $\mathcal{J}(q)$ 和 $\mathfrak{M}(q)$ 均不依赖于 ξ 和 θ , 故 P 和 N 都和 H 对易,

$$[P, H] = [N, H] = 0, \quad (7.100)$$

这意味着两者都是运动常数. P 的本征值是连续的, 且为系统的总动量. 由于 θ 是一循环变量, 故 N 只有分立的整数本征值 $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, 对于粒子是正数, 对于反粒子是负数. 和通常一样, 系统的能量由薛定谔方程

$$H |\rangle = E |\rangle \quad (7.101)$$

确定.

3. 微扰展开 为证明 H 的本征值可用 g 的微扰级数来解得, 假定振动坐标 $q_{\pm, 2}$, $q_{\pm, 3}$, \dots 及它们的时间导数均为 $O(1)$ 的量级. 由此, (7.85)给出

$$\dot{\phi} = -\frac{1}{g} \left(\frac{d\sigma}{dx} \dot{\xi} + i\sigma \dot{\theta} \right) e^{-i\sigma} + O(1). \quad (7.102)$$

由此(7.90)为 $O(g^{-2})$ 的量级, 且由下式给出

$$\int \dot{\phi}^\dagger \dot{\phi} dx = \frac{M}{2} \dot{\xi}^2 + \frac{I}{2} \dot{\theta}^2 + O(g^{-1}), \quad (7.103)$$

式中

$$M = \frac{2}{g^2} \int \left(\frac{d\sigma}{dx} \right)^2 dx, \quad I = \frac{2}{g^2} \int \sigma^2 dx. \quad (7.104)$$

将(7.85)代入(7.80),可见 $V(q)$ 也是 $O(g^{-2})$ 的量级:

$$V(q) = \frac{1}{g^2} \int \left[\left(\frac{d\sigma}{dx} \right)^2 + U(\sigma^2) \right] dx + O(g^{-1}). \quad (7.105)$$

为了简化我们的分析,假定孤立子是静止的,即

$$P|\rangle = 0. \quad (7.106)$$

按照(7.90)—(7.99)的步骤,且利用(7.105)—(7.106),可见

$$H = \frac{N^2}{2I} + \frac{1}{g^2} \int \left[\left(\frac{d\sigma}{dx} \right)^2 + U(\sigma^2) \right] dx + O(g^{-1}). \quad (7.107)$$

让我们通过设定 N 的本征值

$$N = I\omega \quad (7.108)$$

来定义 ω . 由于 N 也是(7.103)关于 $\dot{\theta}$ 的导数,可见 $N = I\dot{\theta}$, 因此 ω 是表征经典解 σ 的同一参数. 对量子解的惟一限制则是 N 必须是整数. 由此,考虑到(7.104)和(7.108), (7.107)式可写成

$$H = \frac{1}{g^2} \int \left[\left(\frac{d\sigma}{dx} \right)^2 + U(\sigma^2) + \omega^2 \sigma^2 \right] dx + O(g^{-1}). \quad (7.109)$$

利用经典孤立子解(7.31),可见其能量恰为同一形式:

$$E_{cl} = \frac{1}{g^2} \int \left[\left(\frac{d\sigma}{dx} \right)^2 + U(\sigma^2) + \omega^2 \sigma^2 \right] dx; \quad (7.110)$$

因此量子解变为

$$H|\rangle = [E_{cl} + O(1)]|\rangle. \quad (7.111)$$

在(7.109)式中,似乎有一 $O(g^{-1})$ 量级的修正项. 但由于 σ 是经典方程的解,不难证明 $O(g^{-1})$ 项实际上是零,这就导致(7.111)式.

由此,当 g 小的时候,经典孤立子解的存在保证了量子解的存在;此外,当 $g \rightarrow 0$ 时,量子孤立子的质量由同一经典曲线 $E_{cl}(N)$ 给出,只是 N

必须是整数. 一如在(7.12)–(7.13)中所见, 这些性质的正确性具有普遍性, 并不只限于本节中讨论的一维空间的例子.

说明. 在这个场论简引中, 我们已经论及了基本的量子化步骤和计算 S 矩阵的一般方法. 按平面波解的微扰级数对于没有强作用的轻子和光子的描述将是有用的; 一如我们将会见到的, 存在充分的理由可将已知的强子看成是夸克的束缚态. 夸克似乎永远被禁闭在一定的空间内, 这就是为什么人们看不到自由夸克. 在距离 \sim 强子半径时, 这些夸克复合体 (即强子) 的动力学可以用孤立子解作最好的描写. 但是在强子内的小距离处, 由于量子色动力学的渐近自由性质, 按平面波的通常的微扰展开式变为近似成立. 这一论题将在后面加以分析.

后继各章我们要讨论的粒子物理将由两个主要部分组成: 对称性和相互作用. 在对称性方面, 分析将完全是唯象的, 而且还能推导出严格的结论而无需任何详细的动力学知识. 关于相互作用的各章, 对哈密顿量将作特别的假设, 这就能使我们作更详细的计算.

现在我们将进入粒子物理.

习题 7.1. 设一维空间厄米场 σ 的拉氏密度为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_\mu} \right)^2 - V(\sigma),$$

式中 $x_\mu = (x, it)$. 试证对于

(i) $V(\sigma) = \frac{1}{8}(1 - \sigma^2)^2$ 的经典孤立子解为

$$\sigma = \tanh \left[\frac{1}{2}(x - \xi) \right];$$

(ii) $V(\sigma) = 1 - \cos \sigma$ 的经典孤立子解为 $\sigma = 4 \tan^{-1} e^{x-\xi}$, ξ 为积分常数.

(ii) 的场方程称为正弦-戈登方程.

习题 7.2. 设一维空间复数场 σ 的拉氏密度为

$$\mathcal{L} = -\frac{\partial \sigma^\dagger}{\partial x_\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial x_\mu} - U(\sigma^\dagger \sigma).$$

试证对于

$$U = \frac{\sigma^\dagger \sigma}{1 + \epsilon^2} [(1 - \sigma^\dagger \sigma)^2 + \epsilon^2]$$

的经典孤立子解为

$$\sigma = \left(\frac{a}{1 + \sqrt{1 - a} \cosh y} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega t}, \quad (7.112)$$

式中 $a = (1 + \epsilon^2)(1 - \omega^2)$ 和 $y = 2\sqrt{1 - \omega^2}(x - \xi)$.

为简单起见在上面二习题中都设有标度, 即设 $g = 1, m = 1$.

习题 7.3. 在变换 $x_i \rightarrow q_j = q_j(x_i)$ 中, 其中下标可从 1 变至 n , 定义 M 为 $n \times n$ 的矩阵

$$M = (M_{ij}) \equiv \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \right), \quad M^{-1} = (M_{ij}^{-1})$$

为其逆, $|M| = \mathcal{J}^2$ 为其行列式. 试证

$$(i) \frac{1}{|M|} \frac{\partial |M|}{\partial q_k} = M_{ji}^{-1} \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} = -2 \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial q_j}{\partial x_i} \right)$$

和

$$(ii) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{1}{\mathcal{J}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(M_{ij}^{-1} \mathcal{J} \frac{\partial}{\partial q_j} \right). \quad (7.113)$$

参 考 文 献

关于量子化, 特别是关于拓扑孤立子有几篇极好的评述性文章:

Coleman S. In *New Phenomena in Subnuclear Physics. Part A.* ed. A. Zichichi
New York and London: Plenum Press, 1977:297.

Faddeev L D, Korepin V E. *Physics Reports.* 1978, **C42**, No. 1. Jackiw R.
Revs Mod Phys, 1977, **49**:681.