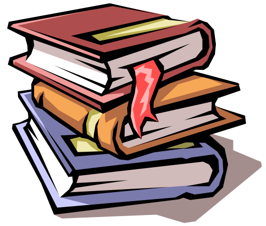
中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

第11章 线性动态电路暂态过程的复频域分析



本章目录

§ 11.1 拉普拉斯变换

1 拉普拉斯变换

设函数 **$f(t)$** 在 **t** $\geqslant$**0**时有定义，则 **$f(t)$**的拉普拉斯变换定义为

$$F(s)=\int_{0_-}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \qquad \textbf{(11.1)}$$

$F(s)$ 称为 **$f(t)$** 的拉氏变换或称为象函数。记作：$F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}$

其中**$s=\sigma+\mathrm{j}\omega$**为复参量，称为复频率。

（**1**）积分下限为何为0_

$$F(s)=\int_{0_-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt=\int_{0_-}^{0_+} f(t)e^{-st}dt+\int_{0_+}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$f(t)=\delta(t)$时此项 $\neq$ **0**

取积分下限为0-，使积分中包含了冲激函数。

§ 11.1 拉普拉斯变换

（2）存在条件

$$F(s)=\int_{0_-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt=\int_{0_-}^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt=\int_{0_-}^{+\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{0_-}^{+\infty} f(t)e^{-\sigma t}\cos(\omega t)dt-j\int_{0_-}^{+\infty} f(t)e^{-\sigma t}\sin(\omega t)dt$$

对于函数 ***f*(*t*)**，如果存在正的有限值常数***M***和***C***，使下式成立

$$|f(t)|\le Me^{Ct} \qquad (t\ge 0)$$

则***f*(*t*)**的拉氏变换式***F*(*s*)**总存在。因为

$$\int_{0_-}^{\infty}|f(t)|e^{-\sigma t}dt\le\int_{0_-}^{\infty}Me^{-(\sigma-C)t}dt=\frac{M}{-(\sigma-C)}e^{-(\sigma-C)t}\Big|_{0_-}^{\infty}=\frac{M}{\sigma-C}$$

$\sigma-C>0$积分存在，$e^{-\sigma t}$为收敛因子

2 常用函数的拉普拉斯变换

(1) 单位阶跃函数 $f(t)=\varepsilon(t)$

$$F(s)=\mathscr{L}\{\varepsilon(t)\}=\int_{0_-}^{\infty}\varepsilon(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\int_{0_+}^{\infty}e^{-st}\mathrm{d}t=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{0_+}^{\infty}$$

$$=-\frac{1}{s}e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}\Big|_{0_+}^{\infty}=-\frac{1}{s}e^{-\sigma t}(\cos\omega t-j\sin\omega t)\Big|_{0_+}^{\infty}=\frac{1}{s}$$

(2) 指数函数 $f(t)=e^{\alpha t}$

$$F(s)=\mathscr{L}\{e^{\alpha t}\}=\int_{0_-}^{\infty}e^{\alpha t}\cdot e^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1}{\alpha-s}e^{(\alpha-s)t}\Big|_{0_-}^{\infty}=\frac{1}{s-\alpha}$$

(3) 单位冲激函数 $f(t)=\delta(t)$

$$F(s)=\mathscr{L}\{\delta(t)\}=\int_{0_-}^{\infty}\delta(t)e^{-st}\mathrm{d}t=e^{0}\int_{0_-}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$

§ 11.1 拉普拉斯变换

3 拉普拉斯逆变换：由*F*(*s*)求*f*(*t*)的运算

一般公式：$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}\mathrm{d}s$$

f **(*t*)称为 *F*(*s*)的**原函数。

例：$$U(s)=\mathscr{L}\{u(t)\}\ ,\quad u(t)=\mathscr{L}^{-1}\{U(s)\}$$

$$I(s)=\mathscr{L}\{i(t)\}\ ,\quad i(t)=\mathscr{L}^{-1}\{I(s)\}$$

唯一性：原函数和象函数是一一对应关系

$$f(t)\xrightarrow{\text{唯一地}}F(s),\qquad F(s)\xrightarrow{\text{唯一地}}f(t)$$

§ 11.1 拉普拉斯变换

表11.1常用函数的拉普拉斯变换对

原函数 $f(t)(t\geq 0)$	象函数 $F(s)$	原函数 $f(t)(t\geq 0)$	象函数 $F(s)$
$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s}$	$t^n e^{-\alpha t}$ (**n**为正整数)	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$(1-\alpha t)e^{-at}$	$\frac{s}{(s+\alpha)^2}$
$\delta(t)$	1	$\sin(\omega t+\phi)$	$\frac{s\sin\phi+\omega\cos\phi}{s^2+\omega^2}$
A	$\frac{A}{s}$	$\cos(\omega t+\phi)$	$\frac{s\cos\phi-\omega\sin\phi}{s^2+\omega^2}$
$A(1-e^{-\alpha t})$	$\frac{A\alpha}{s(s+\alpha)}$	$e^{-at}\sin(\omega t+\phi)$	$\frac{(s+a)\sin\phi+\omega\cos\phi}{(s+a)^2+\omega^2}$
t^n (**n**为正整数)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$e^{-at}\cos(\omega t+\phi)$	$\frac{(s+a)\cos\phi-\omega\sin\phi}{(s+a)^2+\omega^2}$

§ 11.2 拉普拉斯变换的基本性质

1. 线性性质

若 $\mathscr{L}\{f_1(t)\}=F_1(s),\mathscr{L}\{f_2(t)\}=F_2(s)$ ，**a**、**b**为任意常数，则

$$\mathscr{L}\{af_1(t)+bf_2(t)\}=aF_1(s)+bF_2(s)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{aF_1(s)+bF_2(s)\}=af_1(t)+bf_2(t)$$

该式表明原函数线性组合的拉氏变换等于各原函数拉氏变换的同一线性组合。象函数的拉氏反变换亦有相同的线性性质。

证明：$\mathscr{L}\{af_1(t)+bf_2(t)\}=\int_{0_-}^{\infty}[af_1(t)+bf_2(t)]e^{-st}\mathrm{d}t$

$$=a\int_{0_-}^{\infty}f_1(t)e^{-st}\mathrm{d}t+b\int_{0_-}^{\infty}f_2(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=aF_1(s)+bF_2(s)$$

§ 11.2 拉普拉斯变换的基本性质

2. 微分性质

若 $\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$ ，则 $\mathscr{L}\left\{\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right\}=sF(s)-f(0_-)$

该性质表明一个函数求导后的拉氏变换等于这个函数的拉氏变换后乘以复参量**s**，再减去**0-**时刻的原始值。

证明：

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right\}=\int_{0_-}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=f(t)e^{-st}\Big|_{0_-}^{\infty}-\int_{0_-}^{\infty}f(t)(-s)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=-f(0_-)+s\int_{0_-}^{\infty}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=sF(s)-f(0_-)$$

§11.2 拉普拉斯变换的基本性质

推论：设 $\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$ ，则

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\}=s^{n}F(s)-s^{n-1}f(0_{-})-s^{n-2}f^{(1)}(0_{-})-\cdots-f^{(n-1)}(0_{-})$$

使用该性质可将关于***f*(*t*)**的微分方程转化为关于***F*(*s*)**的代数方程，因此它对分析线性系统有着重要作用。

§ 11.2 拉普拉斯变换的基本性质

例**11.1(1)**求 $f(t)=A(1-\mathrm{e}^{-at})$ 的象函数***F*(s)**。 **(2)**求 $f(t)=\sin\omega t$ 的象函数***F*(s)** 。

解 (1) $F(s)=\mathscr{L}\{A(1-\mathrm{e}^{-at})\}=A\mathscr{L}\{1\}-A\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{-at}\}=\dfrac{A}{s}-\dfrac{A}{s+a}=\dfrac{Aa}{s(s+a)}$

(2) $F(s)=\mathscr{L}\{\sin\omega t\}=\mathscr{L}\{\dfrac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t})\}$

$$=\frac{1}{2\mathrm{j}}\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\}=\frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega}-\frac{1}{s+\mathrm{j}\omega}\right)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

例**11.2** 用微分性质求 $f(t)=\cos\omega t$ 的象函数***F*(s)** 。

解 $F(s)=\mathscr{L}\{\cos\omega t\}=\mathscr{L}\{\dfrac{1}{\omega}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin\omega t\}=\dfrac{1}{\omega}\left(s\mathscr{L}\{\sin\omega t\}-\sin\omega t\big|_{t=0_-}\right)=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

§ 11.2 拉普拉斯变换的基本性质

3. 积分性质

若 $\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$ ，则 $\mathscr{L}\{\int_{0_-}^{t} f(\xi)\mathrm{d}\xi\}=\dfrac{1}{s}F(s)$

该性质表明一个函数积分后的拉氏变换等于这个函数的拉氏变换除以复参量**s**。

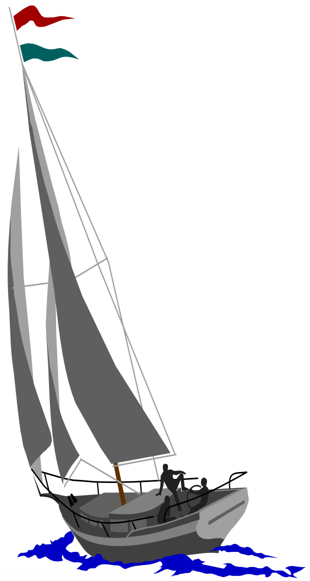
证明：$\because \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{0_-}^{t} f(\xi)\mathrm{d}\xi = f(t)$

$$\therefore \mathscr{L}\{f(t)\}=\mathscr{L}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{0_-}^{t} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}$$

$$= s\mathscr{L}\left\{\int_{0_-}^{t} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}-\int_{0_-}^{t} f(\xi)\mathrm{d}\xi\bigg|_{t=0_-}$$

$$\therefore F(s)=s\mathscr{L}\left\{\int_{0_-}^{t} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}$$

$$\therefore \mathscr{L}\left\{\int_{0_-}^{t} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}=\frac{F(s)}{s}$$



§ 11.2 拉普拉斯变换的基本性质

4．延迟性质

若 $\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$ ，则 $\mathscr{L}\{f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)\}=\mathrm{e}^{-st_0}F(s)$

其中 $f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)$ 表示把 $f(t)$ 延迟至 t_0 。

根据上述性质可以方便地求出矩形脉冲的象函数。一个高度为***A***，宽度为$\boldsymbol{t_0}$的矩形脉冲可表示为 $f(t)=A[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-t_0)]$

根据延迟性质得矩形脉冲的象函数为 $F(s)=A(\frac{1}{s}-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st_0})=\frac{A}{s}(1-\mathrm{e}^{-st_0})$

5．位移性质

6．初值定理

7．终值定理

8．卷积定理

§ 11.3 拉普拉斯逆变换

定义：由$F(s)$求 $f(t)$ 的运算称为拉普拉斯逆变换。

计算逆变换的方法：

（1）利用公式：$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=\dfrac{1}{2\pi \mathrm{j}}\displaystyle\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s$

（2）部分分式展开法：

集中参数电路的象函数可以表示成下列有理分式

$$F(s)=\frac{F_1(s)}{F_2(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

式中$F_1(s)$和$F_2(s)$都是实系数的多项式，且无公因式。

§ 11.3 拉普拉斯逆变换

1. *n*>*m* 情况

(1) $F_2(s)$=0只有单根

这时***F*(*s*)**可以展开成下列简单的部分分式之和：

$$F(s)=\frac{A_1}{s-p_1}+\frac{A_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{A_k}{s-p_k}+\cdots+\frac{A_n}{s-p_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{s-p_k} \qquad \textbf{(11.17)}$$

➢式中p_1、p_2、…p_n为方程$F_2(s)=0$的*n*个不同的根，这些根称为***F*(*s*)**的极点。

➢ A_1、A_2、…A_n为待定系数。

①若p_k为实数，用$(s-p_k)$乘上式的两边各项得：

$$F(s)(s-p_k)=\frac{A_1(s-p_k)}{s-p_1}+\frac{A_2(s-p_k)}{s-p_2}+\cdots+A_k+\cdots+\frac{A_n(s-p_k)}{s-p_n} \qquad \textbf{(11.18)}$$

§ 11.3 拉普拉斯逆变换

$$F(s)(s-p_k)=\frac{A_1(s-p_k)}{s-p_1}+\frac{A_2(s-p_k)}{s-p_2}+\cdots+A_k+\cdots+\frac{A_n(s-p_k)}{s-p_n} \qquad \textbf{(11.18)}$$

两边取$\boldsymbol{s\to p_k}$时的极限：

$$A_k=\lim_{s\to p_k}F(s)(s-p_k)=\lim_{s\to p_k}\frac{F_1(s)(s-p_k)}{F_2(s)} \qquad (k=1,2,\cdots,n) \qquad \textbf{(11.19)}$$

方法一

$$A_k=\lim_{s\to p_k}\frac{F_1(s)(s-p_k)}{F_2(s)}=\lim_{s\to p_k}\frac{F_1(s)+F_1'(s)(s-p_k)}{F_2'(s)}=\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \qquad (k=1,2,\cdots,n) \qquad \textbf{(11.20)}$$

方法二

将$\boldsymbol{A_k}$代入式**(11.17)**后，两边取拉普拉斯逆变换并利用线性性质得

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=\mathscr{L}^{-1}\{\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{s-p_k}\}=\sum_{k=1}^{n}A_k\mathrm{e}^{p_k t} \qquad \textbf{(11.21)}$$

§ 11.3 拉普拉斯逆变换

例**11.4** 已知 $F(s)=\dfrac{2s+1}{s^3+7s^2+10s}$，求它的原函数 ***f*** **(*t*)**。

解 令$F_2(s)=s^3+7s^2+10s=s(s+2)(s+5)=0$，求得其根为$p_1=0, p_2=-2$ $p_3=-5$。 因此**F(s)**可以展开成 $F(s)=\dfrac{A_1}{s}+\dfrac{A_2}{s+2}+\dfrac{A_3}{s+5}$

$$A_1=\lim_{s\to 0}\frac{2s+1}{s(s+2)(s+5)}\times s=0.1$$

$$\Rightarrow \quad A_2=\lim_{s\to -2}\frac{2s+1}{s(s+2)(s+5)}\times(s+2)=0.5 \quad \Rightarrow \quad F(s)=\frac{0.1}{s}+\frac{0.5}{s+2}+\frac{-0.6}{s+5}$$

$$A_3=\lim_{s\to -5}\frac{2s+1}{s(s+2)(s+5)}\times(s+5)=-0.6$$

$$\therefore \quad f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=0.1+0.5\mathrm{e}^{-2t}-0.6\mathrm{e}^{-5t} \qquad (t\geq 0)$$

§ 11.3 拉普拉斯逆变换

②若p_k为复数：

对于单复根情况，仍可按式**(11.21)**求反变换，但是要作复数运算。

由于$F_2(s)$的系数为实数，$F(s)$的复数极点均以共轭复数形式出现，且对应待定系数也是共轭关系。设象函数为

$$F(s)=\frac{A}{s-p}+\frac{\overset{*}{A}}{s-\overset{*}{p}} \qquad \textbf{(11.22)}$$

令$p=\alpha+\mathrm{j}\beta$，$A=|A|\underline{/\theta}$，则$\overset{*}{p}=\alpha-\mathrm{j}\beta$，$\overset{*}{A}=|A|\underline{/-\theta}$，对式**(11.22)**取逆变换得

$$\begin{aligned} f(t)&=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=A\mathrm{e}^{pt}+\overset{*}{A}\mathrm{e}^{\overset{*}{p}t} \\ &=|A|\mathrm{e}^{\alpha t}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta t+\theta)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta t+\theta)}] \\ &=2|A|\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t+\theta) \qquad (t\geq 0) \qquad \textbf{(11.23)} \end{aligned}$$

§ 11.3 拉普拉斯逆变换

例**11.5** 已知 $F(s)=\dfrac{s+1}{s^3+2s^2+2s}$ ，求它的原函数***f*(*t*)**。

解 $F_2(s)=s^3+2s^2+2s=0$ 的根为 $p_1=0,\ p_2=a+\mathrm{j}\beta=-1+\mathrm{j},\ p_3=\overset{*}{p}_2=-1-\mathrm{j}$

***F*(s)**的展开式 $F(s)=\dfrac{A_1}{s-p_1}+\dfrac{A_2}{s-p_2}+\dfrac{A_3}{s-p_3}$

$$A_1=\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)}=\left.\frac{s+1}{3s^2+4s+2}\right|_{s=p_1}=0.5$$

$$A_2=\frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)}=\left.\frac{s+1}{3s^2+4s+2}\right|_{s=p_2}=|A_2|\angle\theta=0.25\sqrt{2}\angle-135^\circ$$

$$A_3=\overset{*}{A}_2$$

$$\therefore\quad f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=A_1\mathrm{e}^{p_1t}+2|A_2|\mathrm{e}^{at}\cos(\beta t+\theta)$$

$$=0.5+0.5\sqrt{2}\mathrm{e}^{-t}\cos(t-135^\circ)\qquad (t\geq 0)$$

§ 11.3 拉普拉斯逆变换

(2) $F_2(s)$=0含有重根

设$F_2(s)$=0含有一个m次重根，其余为单根，则$F_2(s)$可以表示为：

$$F_2(s)=a_n(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_{n-m})(s-p_n)^m \qquad \textbf{(11.24)}$$

此时$F(s)$的部分分式展开式为

$$F(s)=\frac{F_1(s)}{F_2(s)}=\sum_{k=1}^{n-m}\frac{A_k}{s-p_k}+\frac{B_m}{(s-p_n)^m}+\frac{B_{m-1}}{(s-p_n)^{m-1}}+\cdots+\frac{B_1}{s-p_n} \qquad \textbf{(11.25)}$$

其中单根对应的待定系数 $A_k[k=1,2,\cdots,(n-m)]$ 与前面的计算相同。

下面讨论重根对应的待定系数。把上式两边各乘以 $(s-p_n)^m$，得

$$\frac{F_1(s)}{F_2(s)}(s-p_n)^m=(s-p_n)^m\sum_{k=1}^{n-m}\frac{A_k}{s-p_k}+B_m+B_{m-1}(s-p_n)+\cdots+B_1(s-p_n)^{m-1} \qquad \textbf{(11.26)}$$

§ 11.3 拉普拉斯逆变换

$$\frac{F_1(s)}{F_2(s)}(s-p_n)^m=(s-p_n)^m\sum_{k=1}^{n-m}\frac{A_k}{s-p_k}+B_m+B_{m-1}(s-p_n)+\cdots+B_1(s-p_n)^{m-1}$$

(11.26)

两边取$\boldsymbol{s\to p_n}$时的极限：

$$B_m=\lim_{s\to p_n}\frac{F_1(s)}{F_2(s)}(s-p_n)^m=\left.\frac{F_1(s)}{a_n(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_{n-m})}\right|_{s=p_n}$$

求 $\boldsymbol{B_{m-1}}$，把**(11.26)**的两边对 $\boldsymbol{s}$ 求一次导数，然后令$\boldsymbol{s\to p_n}$ ，则右边除$\boldsymbol{B_{m-1}}$项以外，其余各项均变为零。

$$B_{m-1}=\lim_{s\to p_n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{F_1(s)}{F_2(s)}(s-p_n)^m\right]$$

仿此得一般公式为

$$B_{m-k}=\frac{1}{k!}\lim_{s\to p_n}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}\left[\frac{F_1(s)}{F_2(s)}(s-p_n)^m\right]\quad[k=0,1,\cdots,(m-1)]$$

(11.27)

§ 11.3 拉普拉斯逆变换

求出各系数后，从表**11.1**可查到 $1/(s-p_n)^k$ 的逆变换为

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-p_n)^k}\right\}=\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{p_n t}$$

对式**(11.25)**右边的每一项取逆变换，得$\boldsymbol{F_2(s)=0}$含有重根时的原函数为

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=\sum_{k=1}^{n-m}A_k\mathrm{e}^{p_k t}+[\frac{B_m}{(m-1)!}t^{m-1}+\frac{B_{m-1}}{(m-2)!}t^{m-2}+\cdots+B_1]\mathrm{e}^{p_n t}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-m}A_k\mathrm{e}^{p_k t}+\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{B_{m-k+1}}{(m-k)!}t^{m-k}\right]\mathrm{e}^{p_n t}\qquad (t\geq 0)\qquad \textbf{(11.28)}$$

§ 11.3 拉普拉斯逆变换

例11.6 已知 $F(s)=\dfrac{10s^2+4}{s(s+1)(s+2)^2}$ ，求它的原函数 ***f(t)*** 。

解 $F_2(s)$存在两个单根和一个2重根，其展开式为：

$$F(s)=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s+1}+\frac{B_2}{(s+2)^2}+\frac{B_1}{s+2}$$

$$A_1=\lim_{s\to 0}\frac{10s^2+4}{s(s+1)(s+2)^2}s=1 \qquad B_2=\lim_{s\to -2}\frac{10s^2+4}{s(s+1)(s+2)^2}(s+2)^2=22$$

$$A_2=\lim_{s\to -1}\frac{10s^2+4}{s(s+1)(s+2)^2}(s+1)=-14 \qquad B_1=\lim_{s\to -2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{10s^2+4}{s(s+1)(s+2)^2}(s+2)^2\right]=13$$

$$\therefore \quad f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=A_1+A_2\mathrm{e}^{-t}+(B_2t+B_1)\mathrm{e}^{-2t}$$

$$=1-14\mathrm{e}^{-t}+(22t+13)\mathrm{e}^{-2t} \qquad t\geq 0$$

§ 11.3 拉普拉斯逆变换

2． $n \le m$ 情况

例**11.7** 已知 $F(s)=\dfrac{s^4+9s^3+24s^2+22s+1}{s^3+7s^2+10s}$，求它的原函数 $f(t)$。

解 用分母多项式去除分子多项式得

$$
\begin{array}{r|l}
 & s+2 \\
\hline
s^3+7s^2+10s & s^4+9s^3+24s^2+22s+1 \\
 & s^4+7s^3+10s^2 \\
\hline
 & 2s^3+14s^2+22s+1 \\
 & 2s^3+14s^2+20s \\
\hline
 & 2s+1
\end{array}
$$

$\therefore \quad F(s)=s+2+\dfrac{2s+1}{s^3+7s^2+10s}$

$\because \quad \mathscr{L}\{\dfrac{d}{dt}\delta(t)\}=\mathscr{L}\{\delta'(t)\}=s\mathscr{L}\{\delta(t)\}-\delta(t)|_{t=0_-}=s$

$\therefore \quad f(t)=\delta'(t)+2\delta(t)+0.1+0.5e^{-2t}-0.6e^{-5t}$

§ 11.4 复频域中的电路定律与电路模型

1．复频域中的基尔霍夫定律

$\sum i_k(t)=0$

根据拉普拉斯变换的线性性质

$\sum I_k(s)=0$

❖基尔霍夫定律方程的时域形式为

$$\mathscr{L}\{\sum f_k(t)\}=\sum F_k(s)$$

❖基氏定律的复频域形式

$\sum u_k(t)=0$

$\sum U_k(s)=0$

在集中参数电路中，流出**(入)**节点的各支路电流象函数的代数和为零。

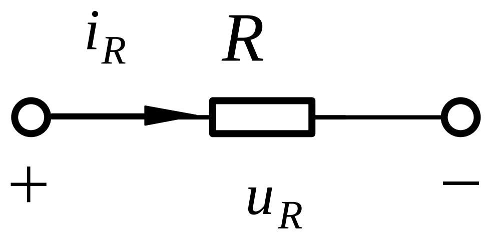
在集中参数电路中，沿任一回路各支路电压象函数的代数和为零。

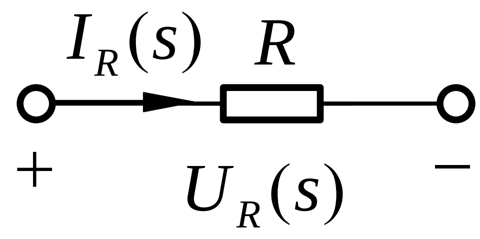
❖ 根据拉普拉斯变换的定义可知，电流、电压象函数的单位分别为安秒**(As)** 即库仑和伏秒**(Vs)**即韦伯。

§ 11.4 复频域中的电路定律与电路模型

2．复频域中元件电压与电流关系及元件的复频域模型

(1)电阻元件





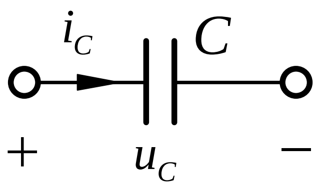
$u_R = Ri_R$

拉氏变换
线性性质

$U_R(s) = RI_R(s)$

§ 11.4 复频域中的电路定律与电路模型

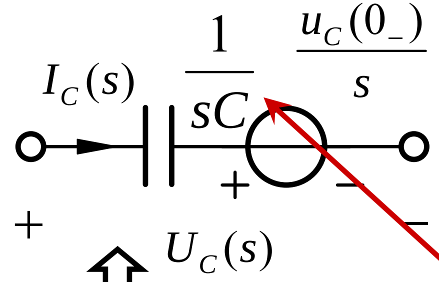
(2)电容元件



$$i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

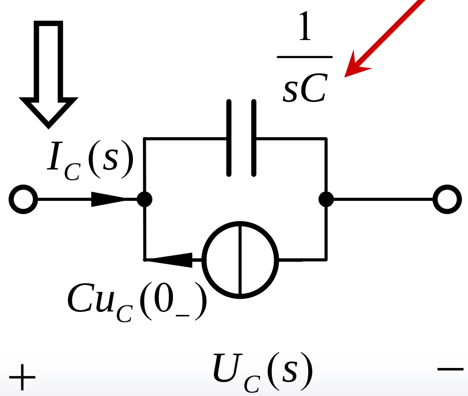
由拉氏变换微分性质得

$$U_C(s) = \frac{1}{sC}I_C(s) + \frac{u_C(0_-)}{s}$$



附加电压源

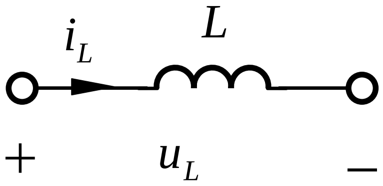
$$I_C(s) = sCU_C(s) - Cu_C(0_-)$$



运算容抗

§ 11.4 复频域中的电路定律与电路模型

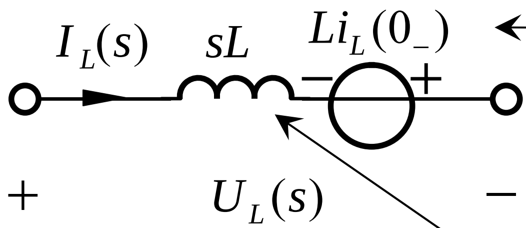
(3) 电感元件



$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$$

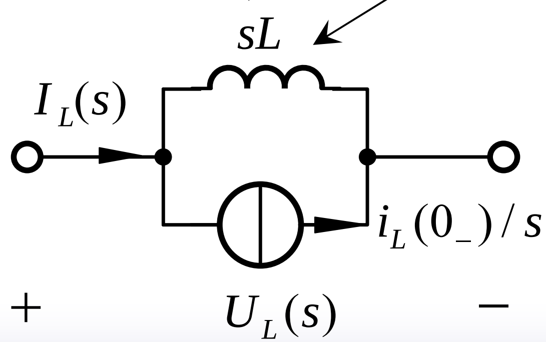
由拉氏变换微分性质得

$$\boxed{U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0_-)}$$



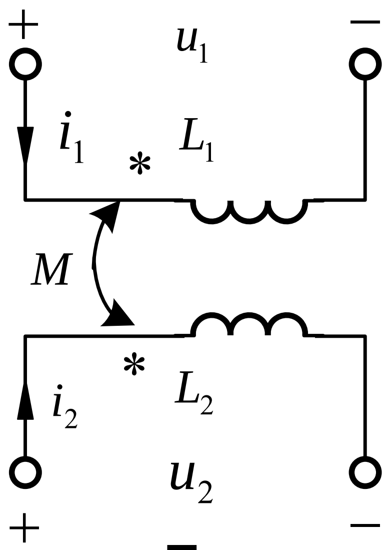
附加电压源

运算感抗



§ 11.4 复频域中的电路定律与电路模型

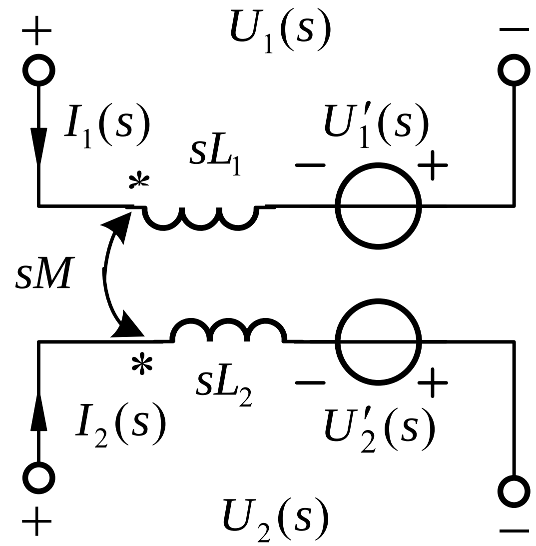
(4) 互感元件



$$\begin{cases} u_1 = L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2 = M \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

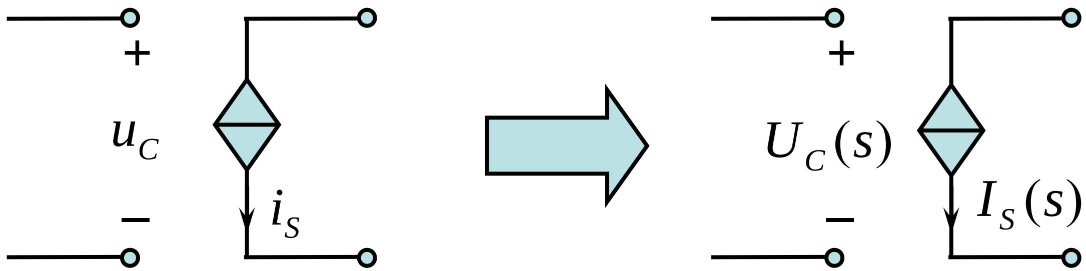
$$\begin{cases} U_1(s) = sL_1 I_1(s) + sMI_2(s) - L_1 i_1(0_-) - Mi_2(0_-) \\ U_2(s) = sMI_1(s) + sL_2 I_2(s) - Mi_1(0_-) - L_2 i_2(0_-) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} U_1'(s) = L_1 i_1(0_-) + Mi_2(0_-) \\ U_2'(s) = Mi_1(0_-) + L_2 i_2(0_-) \end{cases}}$$

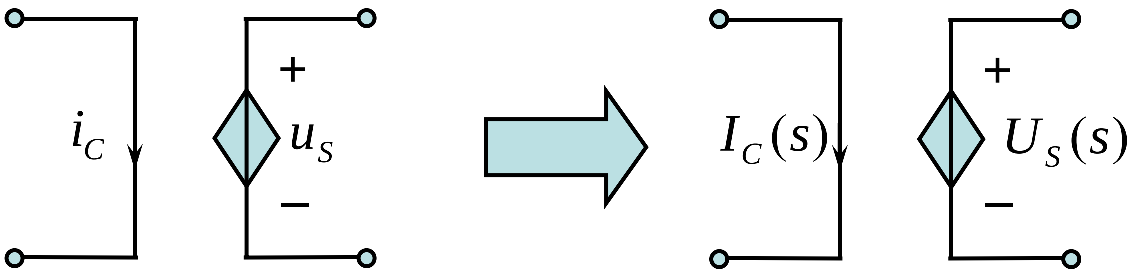


§ 11.4 复频域中的电路定律与电路模型

(5) 受控电源



$i_S = gu_C$ (VCCS) $\qquad I_S(s) = gU_C(s)$ (VCCS)

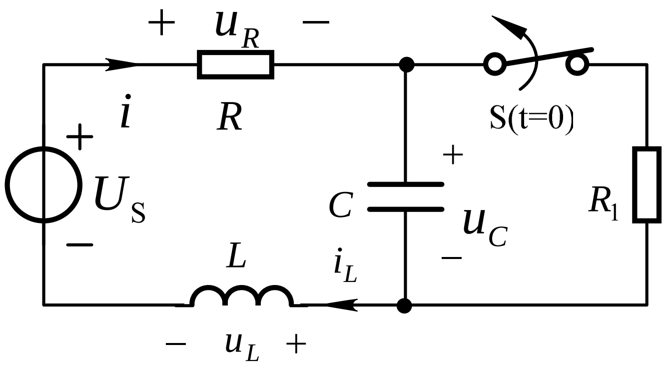


$u_S = ri_C$ (CCVS) $\qquad U_S(s) = rI_C(s)$ (CCVS)

复频域中电路元件方程的特点：

将电感、电容和互感等元件的微、积分方程简化成为复频域里的线性代数方程。

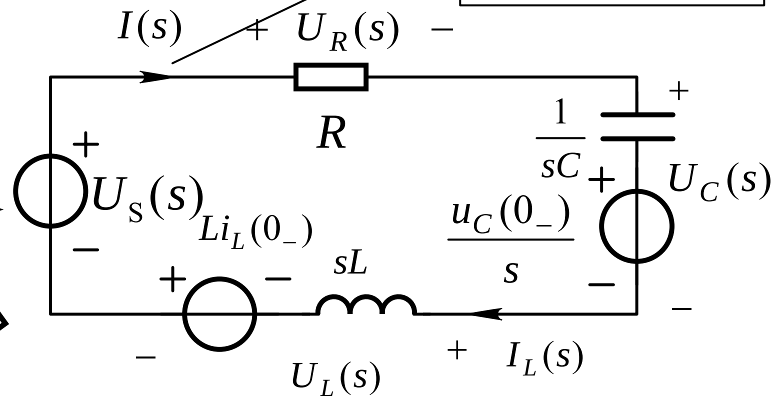
3．复频域电路模型　运算阻抗与运算导纳



时域电路模型

$t>0$

运算电路



复频域电路模型

KVL

$$U_R(s)+U_C(s)+U_L(s)=U_S(s)$$

$$(R+sL+\frac{1}{sC})I(s)=U_S(s)+Li_L(0_-)-\frac{u_C(0_-)}{s}$$

$$\boxed{Z(s)=R+sL+\frac{1}{sC}}$$ 运算阻抗

$$\boxed{\frac{1}{Z(s)}=Y(s)}$$ 运算导纳

零状态

$$\frac{U_S(s)}{I(s)}=Z(s)$$

$$\frac{I(s)}{U_S(s)}=Y(s)$$

§11.5 用拉普拉斯变换分析线性动态电路的暂态过程

原理：针对直流电路提出的各种分析方法、定理和公式均可推广用于复频域中的运算电路。

步骤：

1．由换路前的电路求出全部电容$\boldsymbol{u_C(0_-)}$的和全部电感的$\boldsymbol{i_L(0_-)}$，并将激励的时域函数变换成象函数。

2．根据换路后的电路画出运算电路。其中$\boldsymbol{u_C(0_-)}$和$\boldsymbol{i_L(0_-)}$的作用用附加电源表示，参数（***R***、***L***、***C***）用复频域阻抗表示，已知的和待求的电压电流均用象函数表示。

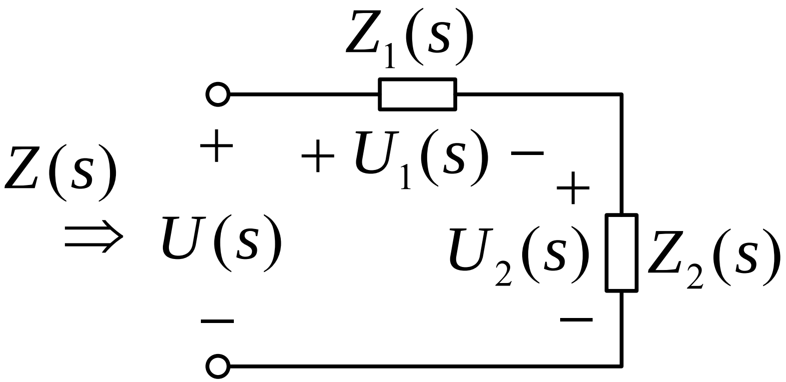
3．将求解直流电路的方法（等效化简或列电路方程）推广用于运算电路，求出响应的象函数。

4．利用部分分式展开法或积分变换表将响应的象函数变换为原函数。

§ 11.5 用拉普拉斯变换分析线性动态电路的暂态过程

运算阻抗串联、并联的电路

两个运算阻抗串联



等效运算阻抗

$$Z(s) = Z_1(s) + Z_2(s)$$

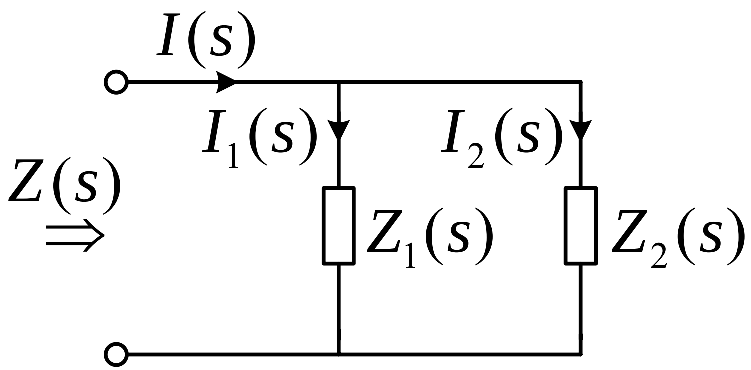
分压公式

$$U_1(s) = \frac{Z_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} U(s)$$

$$U_2(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} U(s)$$

运算阻抗串联、并联的电路

两个运算阻抗并联



等效运算导纳

$$Y(s)=Y_1(s)+Y_2(s)$$

$$=\frac{1}{Z_1(s)}+\frac{1}{Z_2(s)}=\frac{Z_1(s)+Z_2(s)}{Z_1(s)Z_2(s)}$$

等效运算阻抗

$$Z(s)=\frac{1}{Y(s)}=\frac{Z_1(s)Z_2(s)}{Z_1(s)+Z_2(s)}$$

分流公式 $I_1(s)=\dfrac{Z_2(s)}{Z_1(s)+Z_2(s)}I(s)$ $I_2(s)=\dfrac{Z_1(s)}{Z_1(s)+Z_2(s)}I(s)$

§ 11.5 用拉普拉斯变换分析线性动态电路的暂态过程

回路电流法与节点电压法

设电路有两个独立回路，复频域形式的回路电流方程为：

$$Z_{11}(s)I_1(s)+Z_{12}(s)I_2(s)=U_{S11}(s)$$

$$Z_{21}(s)I_1(s)+Z_{22}(s)I_2(s)=U_{S22}(s)$$

$Z_{11}(s)$和$Z_{22}(s)$分别称为回路1和回路2的复频域自阻抗；

$Z_{12}(s)$和$Z_{21}(s)$称为回路1与回路2之间的复频域互阻抗；

$U_{S11}(s)$和$U_{S22}(s)$分别称为回路1和回路2的源电压的象函数。

设电路有两个独立节点，复频域形式的节点电压方程为：

$$Y_{11}(s)U_{n1}(s)+Y_{12}(s)U_{n2}(s)=I_{S11}(s)$$

$$Y_{21}(s)U_{n1}(s)+Y_{22}(s)U_{n2}(s)=I_{S22}(s)$$

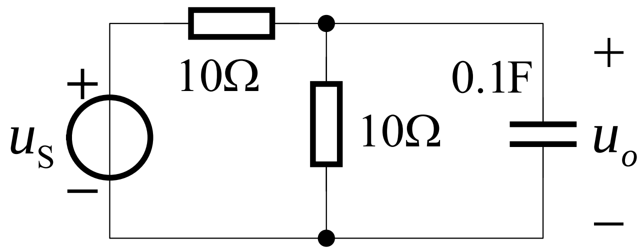
$Y_{11}(s)$和$Y_{22}(s)$分别称为节点1和节点2的复频域自导纳；

$Y_{12}(s)$和$Y_{21}(s)$称为节点1与节点2之间的复频域互导纳；

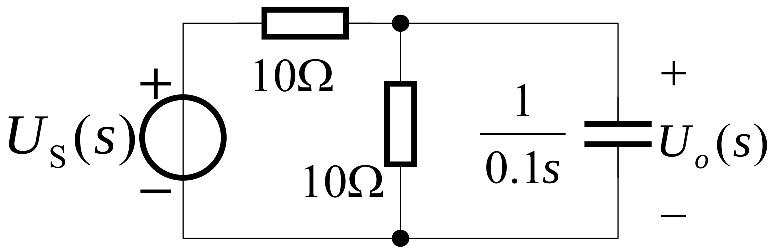
$I_{S11}(s)$和$I_{S22}(s)$分别称为节点1和节点2的源电流的象函数。

§ 11.5 用拉普拉斯变换分析线性动态电路的暂态过程

例11.8电路如图(a)，$u_S=20e^{-t}\varepsilon(t)$ V，电路为零状态。求$t\geq0$时u_O的变化规律。



(a)



(b)

解

电源的象函数为$U_S(s)=\dfrac{20\text{V}}{s+1}$

复频域电路模型如图(b)所示。

其节点电压方程为：

$$\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+0.1s\right)U_o(s)=\frac{U_S(s)}{10}=\frac{2\text{A}}{s+1}$$

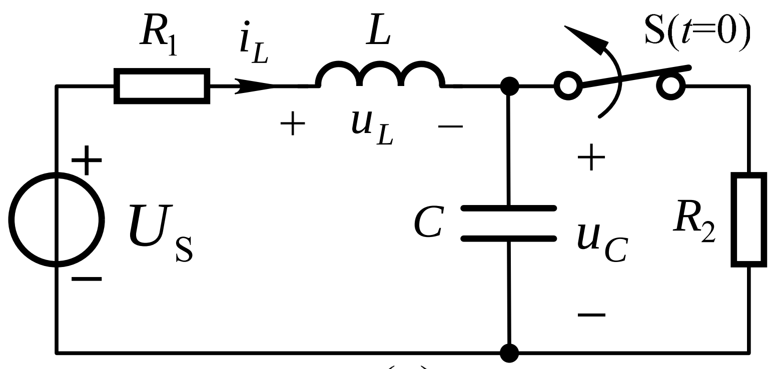
$$U_o(s)=\frac{20}{(s+1)(s+2)}=\frac{A_1}{s+1}+\frac{A_2}{s+2}$$

$$A_1=\lim_{s\to-1}\frac{20}{(s+1)(s+2)}\times(s+1)=20\text{V}$$

$$A_2=\lim_{s\to-2}\frac{20}{(s+1)(s+2)}\times(s+2)=-20\text{V}$$

$$\therefore\quad u_o(t)=\mathscr{L}^{-1}\{U_O(s)\}=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}=20(e^{-t}-e^{-2t})\text{V}\qquad t\geq0$$

例11.9 电路如图(a)所示，t<0时处于稳态，t=0时开关断开。已知U_S=30V，R_1=25 Ω，R_2=75 Ω，L=0.5H，C= 5×10^{-3}F。求t>0时的全响应u_L和u_C。



(a)

图11.7 例题11.9

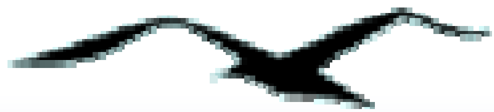
解

$$U_S(s)=\mathscr{L}\{U_S\}=\frac{U_S}{s}=\frac{30}{s}\text{V}$$

t<0时，电感相当于短路，电容相当于开路，因此原始值：

$$i_L(0\_)=\frac{U_S}{R_1+R_2}=0.3\text{A}$$

$$u_C(0\_)=R_2 i_L(0\_)=22.5\text{V}$$

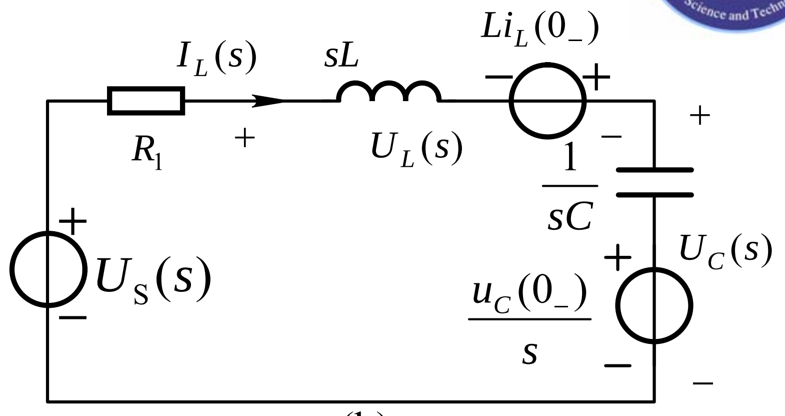


§ 11.5 用拉普拉斯变换分析线性动态电路的暂态过程

$$U_S(s) = \mathscr{L}\{U_S\} = \frac{U_S}{s} = \frac{30}{s}\text{V}$$

$$i_L(0_-) = \frac{U_S}{R_1 + R_2} = 0.3\text{A}$$

$$u_C(0_-) = R_2 i_L(0_-) = 22.5\text{V}$$



(b)

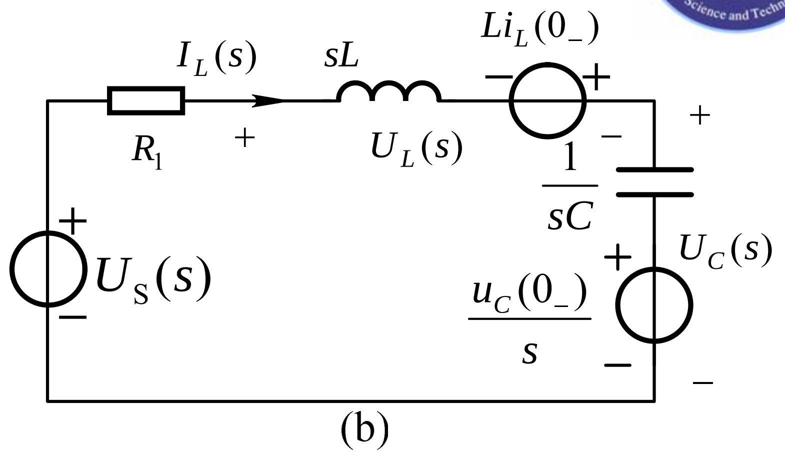
复频域电路模型

$$I_L(s) = \frac{U_S(s) + Li_L(0_-) - u_C(0_-)/s}{R_1 + sL + \dfrac{1}{sC}} = \frac{\dfrac{30}{s} + 0.5\times 0.3 - \dfrac{22.5}{s}}{25 + 0.5s + \dfrac{1}{5\times 10^{-3}s}} = \frac{0.3s + 15}{s^2 + 50s + 400}$$

$$\Rightarrow U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0_-) = \frac{-60}{s^2 + 50s + 400}$$

$$U_C(s) = \frac{1}{sC}I_L(s) + \frac{u_C(0_-)}{s} = \frac{22.5s^2 + 1185s + 12000}{s(s^2 + 50s + 400)}$$

§ 11.5 用拉普拉斯变换分析线性动态电路的暂态过程



复频域电路模型

$U_L(s)$的部分分式展开式：

$$U_L(s)=\frac{-60}{(s+10)(s+40)}=\frac{-2\text{V}}{s+10}+\frac{2\text{V}}{s+40}$$

$U_C(s)$的部分分式展开式：

$$U_C(s)=\frac{22.5s^2+1185s+12000}{s(s+10)(s+40)}=\frac{30\text{V}}{s}+\frac{-8\text{V}}{s+10}+\frac{0.5\text{V}}{s+40}$$

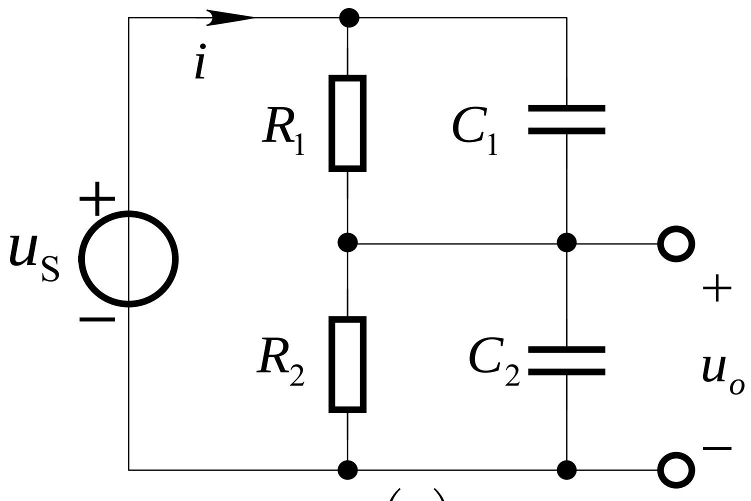
待求响应的时间函数为：

$$u_L=\mathscr{L}^{-1}\{U_L(s)\}=(-2\mathrm{e}^{-10t}+2\mathrm{e}^{-40t})\text{V}\qquad (t>0)$$

$$u_C=\mathscr{L}^{-1}\{U_C(s)\}=(30-8\mathrm{e}^{-10t}+0.5\mathrm{e}^{-40t})\text{V}\qquad (t\geq 0)$$

§ 11.5 用拉普拉斯变换分析线性动态电路的暂态过程

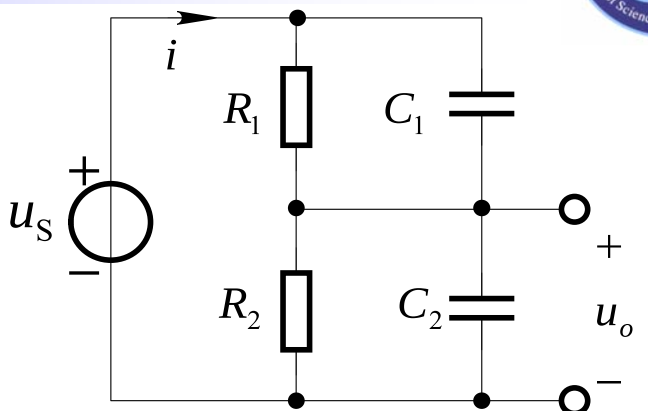
例11.10 电路如图(a)所示，已知R_1=9 Ω，R_2=1 Ω，C_1= 1F，C_2= 4F，外加电压$u_S=10\varepsilon(t)$ V，电路为零状态。求电流i和电压u_O。



(a)

图11.8 例题11.10

解 电路是零状态，故运算电路中无附加电源。外加阶跃电压的象函数为 $U_S(s)=10\text{V}/s$



(a)

从电源看进去的等效复频域阻抗为

$$Z(s)=\frac{R_1\times\dfrac{1}{sC_1}}{R_1+\dfrac{1}{sC_1}}+\frac{R_2\times\dfrac{1}{sC_2}}{R_2+\dfrac{1}{sC_2}}=\frac{R_1R_2(C_1+C_2)s+R_1+R_2}{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}=\frac{45s+10}{(9s+1)(4s+1)}$$

电流i的象函数为 $I(s)=\dfrac{U_S(s)}{Z(s)}=\dfrac{10(9s+1)(4s+1)}{s(45s+10)}=\dfrac{36s^2+13s+1}{4.5s^2+s}$

$$=8+\frac{5s+1}{s(4.5s+1)}=8\text{C}+\frac{1\text{A}}{s}+\frac{(1/9)\text{A}}{s+1/4.5}$$

$$\therefore \quad i=8\text{C}\times\delta(t)+(1+\frac{1}{9}\text{e}^{-t/4.5})\varepsilon(t)\text{A}$$

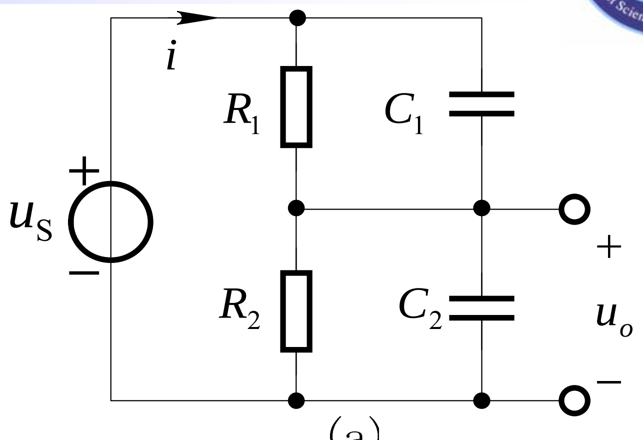
§ 11.5 用拉普拉斯变换分析线性动态电路的暂态过程

电压u_O的象函数为

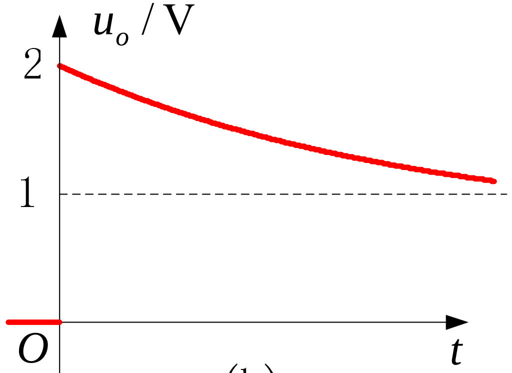
$$U_o(s) = I(s)\times\frac{R_2\times\frac{1}{sC_2}}{R_2+\frac{1}{sC_2}} = \frac{9s+1}{s(4.5s+1)}$$

$$= \frac{1\text{V}}{s} + \frac{1\text{V}}{s+1/4.5}$$

$$\therefore \quad u_o = (1+\mathrm{e}^{-t/4.5})\text{V} \qquad t>0$$



(a)



(b)

u_O随时间变化的曲线

在图 **(b)**中$u_O(0_-)=0$，$u_O(0_+)=2\text{V}$，电容上的电压发生了“强迫跃变”，这是冲激电流 $8C\times\delta(t)$ 给 C_2 充电的结果。

在处理“跃变”问题时，复频域法要时域分析法有一定的优越性。

例11.12 电路如图所示，已知R=1 Ω，L=1H，C= 0.2F，g=1S，$u_S=6\varepsilon(t)$ V， $i_S=4C\times\delta(t)$ 。求t>0时的零状态响应u_L和u_C。

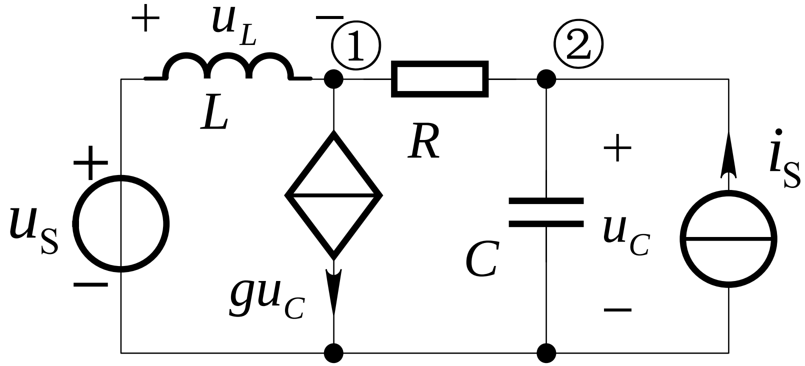


图11.10 例题11.12

解 电路为零状态，其复频域模型中不含附加电源，列节点电压方程

$$
\begin{cases}
\left(\dfrac{1}{sL}+\dfrac{1}{R}\right)U_1(s)-\dfrac{1}{R}U_2(s)=\dfrac{U_S(s)}{sL}-gU_C(s) \\
-\dfrac{1}{R}U_1(s)+\left(sC+\dfrac{1}{R}\right)U_2(s)=I_S(s) \\
U_C(s)=U_2(s)
\end{cases}
\quad (1)
$$

§ 11.5 用拉普拉斯变换分析线性动态电路的暂态过程

其中电源的象函数为： $$U_S(s)=\mathscr{L}\{u_S\}=\frac{6\text{V}}{s}$$

$$I_S(s)=\mathscr{L}\{i_S\}=4\text{As}$$

将已知条件代入式(1)，得 $$\begin{cases}(s+1)U_1(s)=\dfrac{6}{s}\\ -U_1(s)+(0.2s+1)U_2(s)=4\end{cases}$$

联立解得

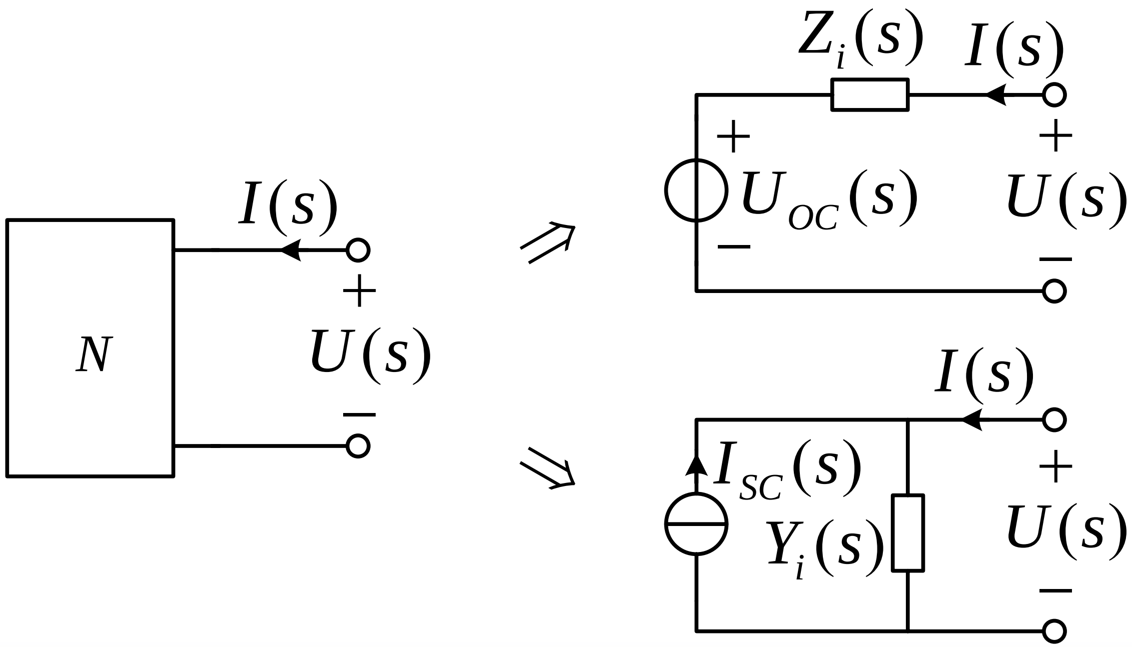
$$\begin{cases}U_1(s)=\dfrac{6}{s(s+1)}\\ U_2(s)=\dfrac{20s^2+20s+30}{s(s+1)(s+5)}\end{cases}\Longrightarrow\quad \begin{aligned}&U_L(s)=U_S(s)-U_1(s)=\frac{6\text{V}}{s+1}\\ &U_C(s)=U_2(s)=\frac{6\text{V}}{s}+\frac{-7.5\text{V}}{s+1}+\frac{21.5\text{V}}{s+5}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \begin{aligned}&u_L=\mathscr{L}^{-1}\{U_L(s)\}=6\text{e}^{-t}\text{V}\qquad (t>0)\\ &u_C=\mathscr{L}^{-1}\{U_C(s)\}=(6-7.5\text{e}^{-t}+21.5\text{e}^{-5t})\text{V}\qquad (t>0)\end{aligned}$$

等效电源定理

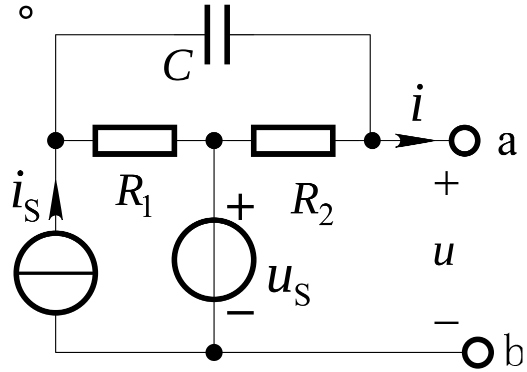
戴维南定理：线性含源一端口网络的复频域电路模型的对外作用可以用一个电压源象函数串联运算阻抗的电路来等效代替。

诺顿定理：线性含源一端口网络的复频域电路模型的对外作用可以用一个电流源象函数并联运算导纳的电路来等效代替。



§ 11.5 用拉普拉斯变换分析线性动态电路的暂态过程

例11.13 电路如图(a)所示，已知R_1=1 Ω，R_2=1.5 Ω，u_S，i_S为阶跃函数。当a、b端接R_3=3 Ω电阻时，全响应 $i=(2+2e^{-50t})\varepsilon(t)$A。现将a、b端改接$L$=0.25H的零状态电感，求此时的电压 u_{ab} 。



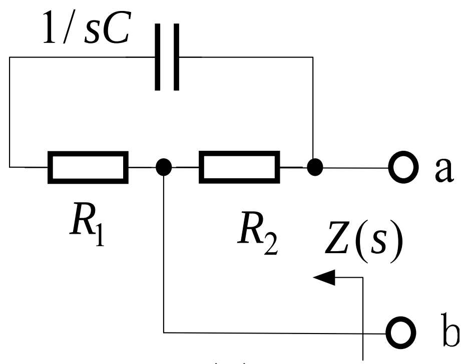
(a)

解 先求出复频域戴维南等效电路。由题给全响应知当a、b端接R_3=3Ω电阻的时间常数为

$$\tau = \frac{1}{50}\text{s}$$

根据电路可得 $\tau = RC = (R_1 + \dfrac{R_2 \times 3}{R_2 + 3})C = 2C$

所以 $C = \dfrac{\tau}{2} = 0.01\text{F}$



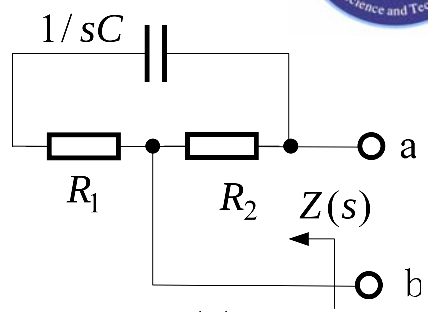
(b)

将电压源和电流源置零，如图(b)所示，

§ 11.5 用拉普拉斯变换分析线性动态电路的暂态过程

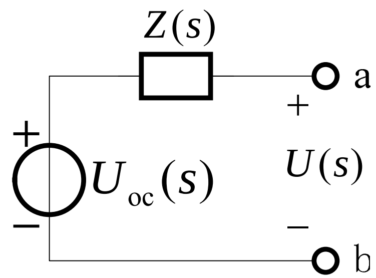
得a、b端等效运算阻抗为

$$Z(s)=\frac{R_2(R_1+\dfrac{1}{sC})}{R_2+R_1+\dfrac{1}{sC}}=\frac{0.6s+60}{s+40}$$



(b)

由已知电流i得 $I(s)=\mathscr{L}\{i\}=(\dfrac{2}{s}+\dfrac{2}{s+50})=\dfrac{4s+100}{s(s+50)}$



(c)

戴维南等效电路

a、b端开路电压为 $U_{oc}(s)=I(s)[Z(s)+R_3]=\dfrac{14.4s+360}{s(s+40)}$

戴维南等效电路如图 **(c)**所示。

当**a、b**端接L=**0.25H**的零状态电感时，电感电压象函数为：

$$U_{ab}(s)=\frac{sL}{sL+Z(s)}U_{oc}(s)=\frac{14.4s+360}{s^2+42.4s+240}\approx\frac{9.09\text{V}}{s+6.73}+\frac{5.31\text{V}}{s+35.67}$$

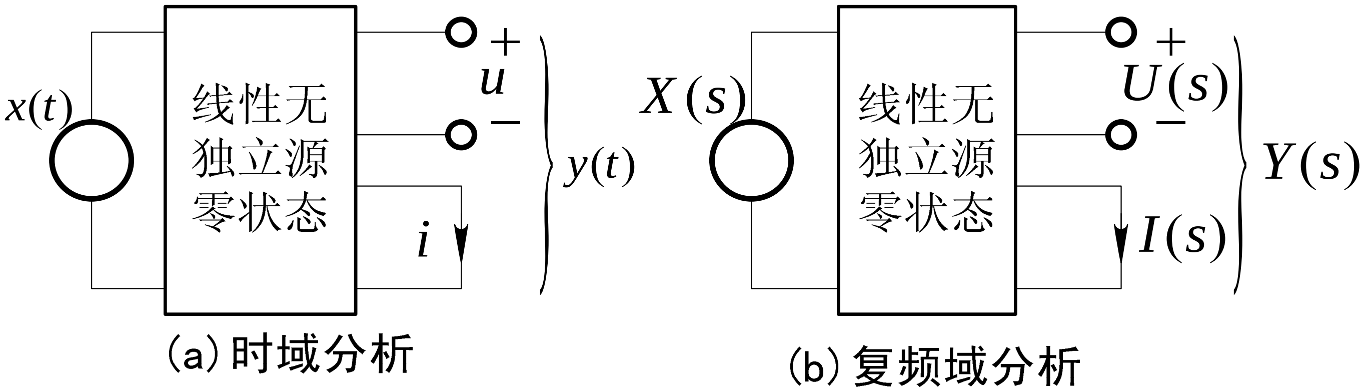
$$\therefore\quad u_{ab}=\mathscr{L}^{-1}\{U_{ab}(s)\}=(9.09\mathrm{e}^{-6.73t}+5.31\mathrm{e}^{-35.67t})\text{V}\qquad(t>0)$$

§ 11.6 网络函数

一、网络函数（network function）

1. 定义：在单一激励作用下的线性零状态电路中，响应象函数 ***Y*(*s*)** 与激励的象函数 ***X*(*s*)** 之比称为（复频域中的）网络函数，用符号 ***H*(*s*)**表示，即

$$\boxed{H(s) \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{Y(s)}{X(s)}} \qquad \textbf{(11.41)}$$



注：当电路为零状态时，在复频域电路中无附加电源，***Y*(*s*)** 方与外加 ***X*(*s*)** 成正比，此时 ***H*(*s*)** 与 ***X*(*s*)** 无关。

§ 11.6 网络函数

2. 网络函数与单位冲激特性的关系

根据单位冲激特性的定义及齐性原理，当激励$\boldsymbol{x(t)=K\delta(t)}$ 时，零状态响应为$\boldsymbol{y(t)=Kh(t)}$，则

$$H(s)=\frac{\mathscr{L}\{y(t)\}}{\mathscr{L}\{x(t)\}}=\frac{\mathscr{L}\{Kh(t)\}}{\mathscr{L}\{K\delta(t)\}}=\frac{\mathscr{L}\{h(t)\}}{\mathscr{L}\{\delta(t)\}}=\mathscr{L}\{h(t)\}$$

因此，网络函数就是网络单位冲激特性的象函数；反之，网络函数的原函数就是网络的单位冲激特性，即

$$\boxed{\begin{aligned}&H(s)=\mathscr{L}\{h(t)\}\\&h(t)=\mathscr{L}^{-1}\{H(s)\}\end{aligned}}\qquad \textbf{(11.42)}$$

§ 11.6 网络函数

3. 由网络函数求任意激励的零状态响应

$$Y(s)=H(s)X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}\cdot\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{F_1(s)}{F_2(s)} \qquad \textbf{(11.43)}$$

式中 $H(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}, X(s)=\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ ， ***N*** 、***P***、***D***、***Q***都是 **s** 的多项式。

零状态响应 = 强制分量 + 自由分量

***Q*(*s*)=0**的根　　　　***D*(*s*)=0**的根

§ 11.6 网络函数

例**11.14** 电路如图所示，已知***R*=0.5**Ω，***L*=1H**，***C*=1F**，***a*=0.25** 。

1) 定义网络函数 $H(s)=\dfrac{I_2(s)}{U_S(s)}$ ，求***H*(*s*)**及其单位冲激特性***h*(*t*)**

2) 求当 $u_S(t)=3e^{-t}\varepsilon(t)\mathrm{V}$ 时的响应 $i_2(t)$ 。

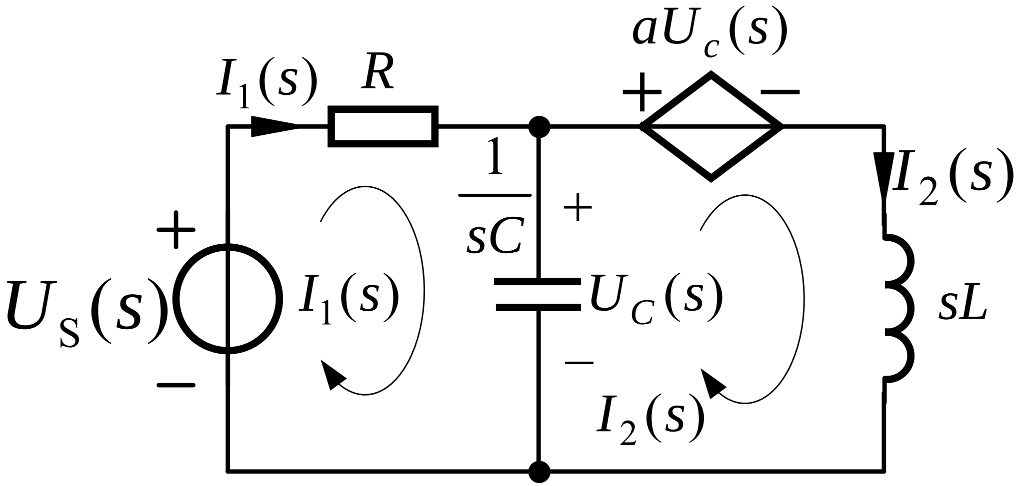


图**11.13** 例题**11.14**

§ 11.6 网络函数

解 **(1)** 列回路电流方程:

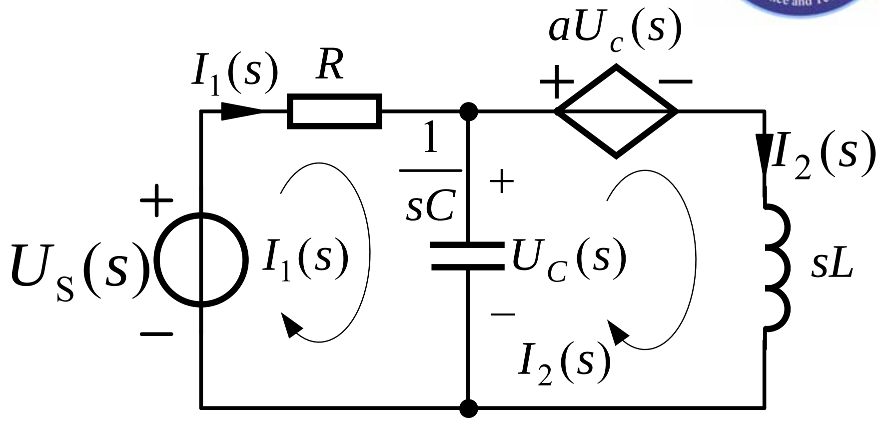


图11.13 例题11.14

$$\begin{cases}(R+\dfrac{1}{sC})I_1(s)-\dfrac{1}{sC}I_2(s)=U_S(s)\\ -\dfrac{1}{sC}I_1(s)+(\dfrac{1}{sC}+sL)I_2(s)=-aU_C(s)\\ U_C(s)=\dfrac{1}{sC}[I_1(s)-I_2(s)]\end{cases}$$

代入整理得

$$\begin{cases}(0.5s+1)I_1(s)-I_2(s)=sU_S(s)\\ -0.75I_1(s)+(s^2+0.75)I_2(s)=0\end{cases}$$

$$I_2(s)=\frac{1.5U_S(s)}{s^2+2s+0.75} \Rightarrow H(s)=\frac{I_2(s)}{U_S(s)}=\frac{1.5}{s^2+2s+0.75}=\frac{1.5}{s+0.5}+\frac{-1.5}{s+1.5}$$

$$\therefore \quad h(t)=\mathscr{L}^{-1}\{H(s)\}=1.5(\mathrm{e}^{-0.5t}-\mathrm{e}^{-1.5t})(\Omega\mathrm{s})^{-1}\times\varepsilon(t)$$

§ 11.6 网络函数

(2) 当$u_S(t)=3e^{-t}\varepsilon(t)\text{V}$ 时

$$U_S(s)=\mathscr{L}\{u_S(t)\}=\frac{3\text{V}}{s+1}$$

$$I_2(s)=H(s)U_S(s)=\frac{1.5}{s^2+2s+0.75}\cdot\frac{3}{(s+1)}$$

$$=\frac{1.5}{(s+0.5)(s+1.5)}\cdot\frac{3}{(s+1)}$$

$$=\frac{9\text{A}}{s+0.5}+\frac{9\text{A}}{s+1.5}+\frac{-18\text{A}}{s+1}$$

$\therefore$ $$i_2(t)=(9e^{-0.5t}+9e^{-1.5t}-18e^{-t})\text{A} \qquad (t\geq 0)$$

§ 11.6 网络函数

二、网络函数的极点位置与单位冲激特性的关系

分析一阶极点情况：若网络函数仅含一阶极点，且**$n>m$**，则网络函数可展开成

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{s-p_k} \qquad \textbf{(11.44)}$$

其中极点p_1、p_2、…p_n称为网络函数的自然频率，它只与网络结构及参数有关。

网络的单位冲激特性为

$$h(t)=\mathscr{L}^{-1}\{H(s)\}=\sum_{k=1}^{n}A_k \mathrm{e}^{p_k t} \qquad \textbf{(11.45)}$$

可见它与极点在复平面上的位置有关 。

要点：由极点在复平面上的分布来判断暂态特性。

§ 11.6 网络函数

二、网络函数的极点位置与单位冲激特性的关系

$$h(t)=\mathscr{L}^{-1}\{H(s)\}=\sum_{k=1}^{n}A_k e^{p_k t}$$

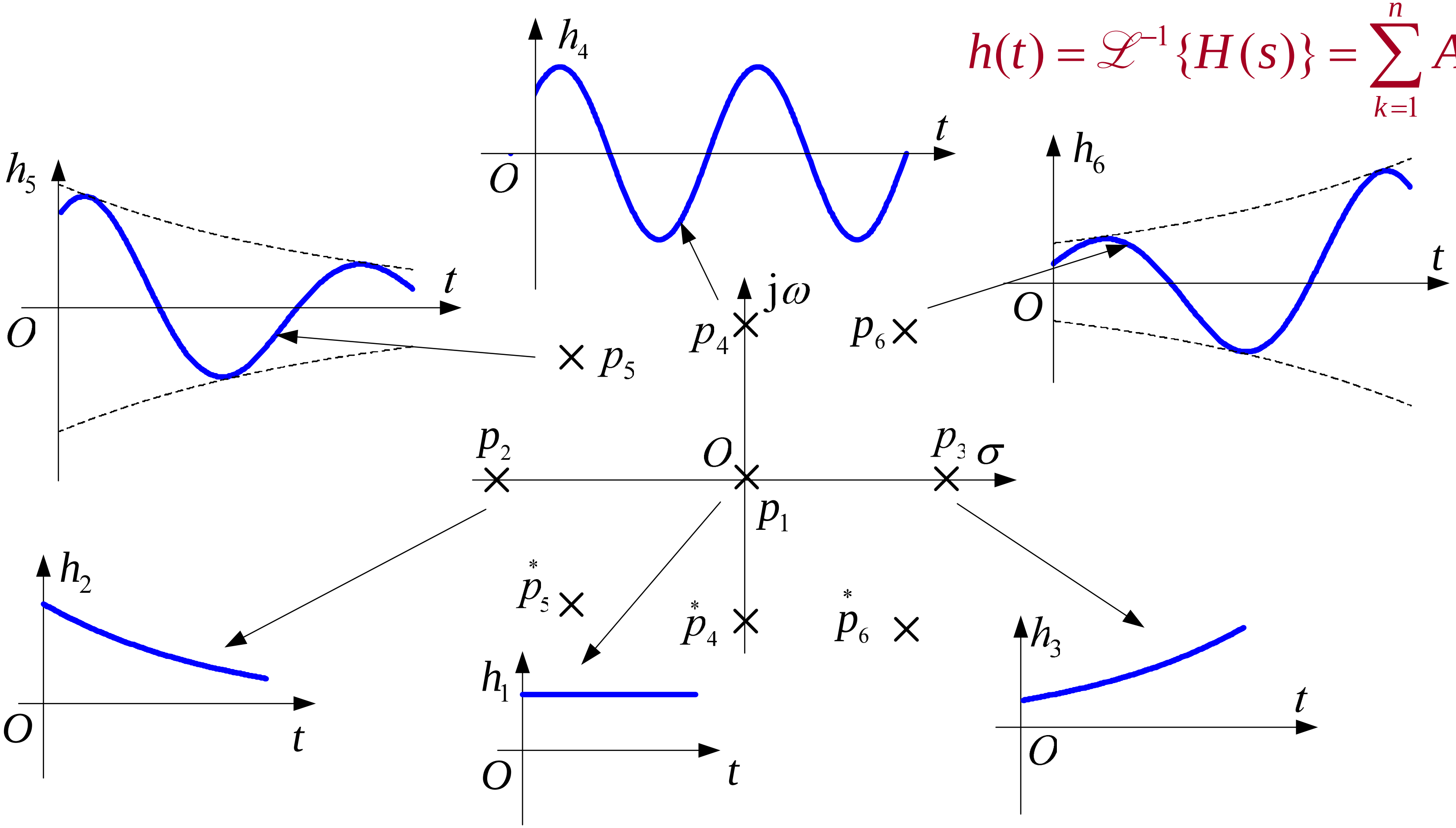


图11.14 $H(s)$的极点与单位冲激特性的关系

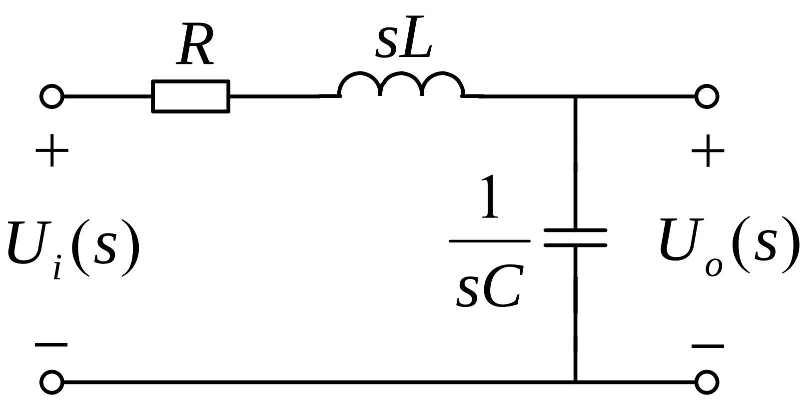
§ 11.6 网络函数

网络函数的极点位置与单位冲激特性的关系概括如下：

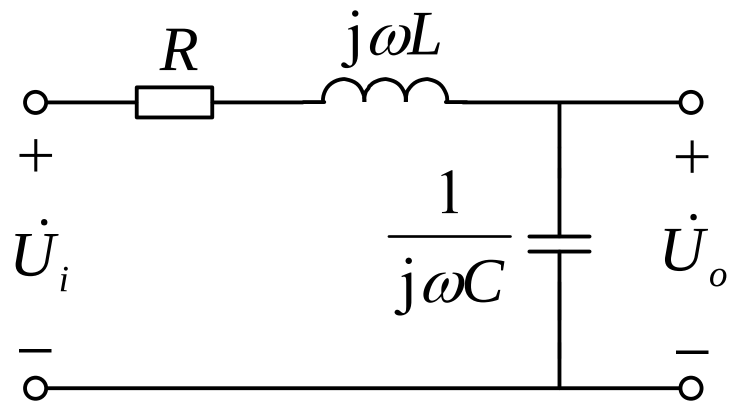
p_k	⇒	位于左半平面时，收敛 位于右半平面时，发散
p_k	⇒	位于虚轴上时，响应临界稳定 位于实轴上时，非振荡；否则，均为振荡
$H(s)$	⇒	所有极点位于左半平面，暂态过程稳定 有一个以上极点位于右半平面，暂态过程不稳定

§ 11.6 网络函数

三、复频域网络函数与复数网络函数的关系

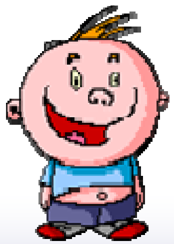


(a)复频域电路模型



(b)相量电路模型

$$\boxed{H(s)} \underset{\mathrm{j}\omega=s}{\overset{s=\mathrm{j}\omega}{\rightleftarrows}} \boxed{H(\mathrm{j}\omega)}$$

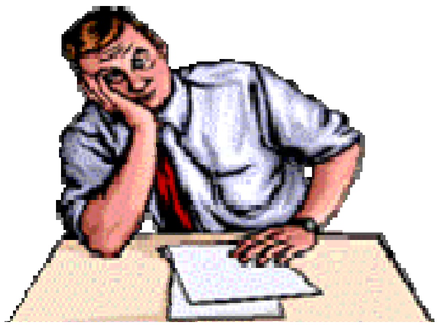


§ 11.6 网络函数

例11.15　设图所示二端口网络为线性无独立源网络。

1)　已知当 $u_i=1\mathrm{Wb}\times\delta(t)$ 时，零状态响应 $u_\mathrm{o}=1\mathrm{Wb}\times\delta(t)+(\mathrm{e}^{-t}-4\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)\,\mathbf{V}$。求 $u_\mathrm{i}=3\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)\mathrm{V}$ 时的正弦电压 u_o。

2)　若已知 $H(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{\dot{U}_\mathrm{o}}{\dot{U}_\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{j}\omega}{-\omega^2+\mathrm{j}5\omega+6}$，求单位冲激特性***h*(*t*)**。



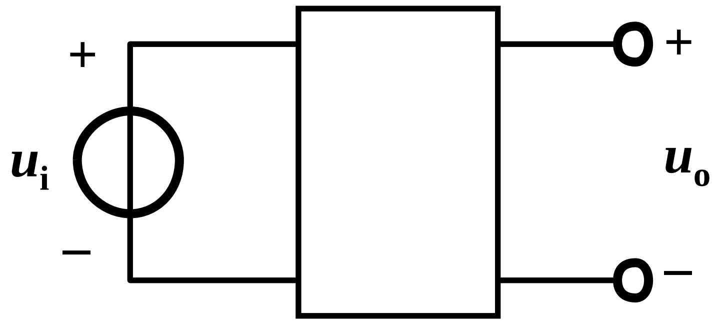


图11.15 例题11.15

§ 11.6 网络函数

解 **(1)**电路的复频域网络函数为：

$$H(s)=\frac{\mathscr{L}\{u_\mathrm{o}\}}{\mathscr{L}\{u_\mathrm{i}\}}=1+\frac{1}{s+1}-\frac{4}{s+2}=\frac{s^2}{s^2+3s+2}$$

它的复数形式的网络函数为：

$$H(\mathrm{j}\omega)=H(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega}=\frac{-\omega^2}{-\omega^2+\mathrm{j}3\omega+2}$$

所以当 $u_\mathrm{i}=3\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)\mathrm{V}$ 时，正弦响应为：

$$\dot{U}_\mathrm{o}=H(\mathrm{j}\omega)\Big|_{\omega=\sqrt{2}}\times\dot{U}_\mathrm{i}=\frac{-(\sqrt{2})^2}{-(\sqrt{2})^2+\mathrm{j}3\sqrt{2}+2}\times 3=\mathrm{j}\sqrt{2}\mathrm{V}$$

$$\Rightarrow u_\mathrm{o}=2\cos(\sqrt{2}t+90^\circ)\mathrm{V}$$

§ 11.6 网络函数

(2) 将已知$H(\mathrm{j}\omega)$写成：

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\mathrm{j}\omega}{(\mathrm{j}\omega)^2+\mathrm{j}5\omega+6}$$

所以对应的复频域形式的网络函数为：

$$H(s)=H(\mathrm{j}\omega)\Big|_{\mathrm{j}\omega=s}=\frac{s}{s^2+5s+6}$$

部分分式展开得：

$$H(s)=\frac{-2}{s+2}+\frac{3}{s+3}$$

$$\Rightarrow\quad h(t)=\mathscr{L}^{-1}\{H(s)\}=(-2\mathrm{e}^{-2t}+3\mathrm{e}^{-3t})\mathrm{s}^{-1}\times\varepsilon(t)$$

小结

线性动态电路暂态过程的时域分析问题，在储能元件较多时，确定积分常数将十分繁杂。本章介绍拉普拉斯变换分析线性动态电路的方法，使常微分方程问题化为代数方程问题。复频域分析法同第六章的相量法一样属于变换域分析法。

本章首先简要介绍拉普拉斯变换及其基本性质；

然后建立电路的复频域模型，并在此基础上讨论复频域分析法；

最后讨论网络函数。