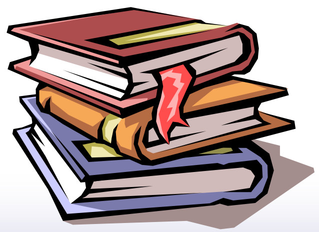
中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

第十章 线性动态电路暂态过程的时域分析

本章目录



§ 10.1 动态电路的暂态过程

1. 动态电路

1）定义：含有动态元件的电路称为动态电路。

2）描述方程：当电路含有电感***L***或电容***C***时，电路方程是以电流或电压为变量的微分方程。

2. 动态电路的暂态过程

1）稳态：电路的结构和元件的参数不再发生变化，经过一段时间后的工作状态称为稳态。

2）暂态过程：电路由一个稳定状态转变到另一个稳定状态需要经历一个过程，这个过程称为暂态过程。

§ 10.1 动态电路的暂态过程

3. 暂态过程产生的原因

1）电路内部含有储能元件：电感$\boldsymbol{L}$，电容 $\boldsymbol{C}$

2）电路结构与参数改变

$\underbrace{\text{开关接通或断开；元件参数变化}}_{\text{换路}}$

能量的储存和释放都需要一定的时间来完成

4. 稳态分析和暂态分析的区别

稳态	暂态
换路发生很长时间	换路刚发生
代数方程组描述电路	微分方程组描述电路

§ 10.1 动态电路的暂态过程

5. 暂态过程的分析方法

1）经典法 ⟶ 时域分析法

2）拉普拉斯变换法 ⟶ 复频域分析法

6. 电路的初始条件

1）换路：电路结构或元件参数的改变引起电路的变化称为换路。

❖通常认为换路在 $t = 0$ 时刻进行；

❖换路前瞬间称 $t = 0_-$；

❖换路后瞬间称 $t = 0_+$；

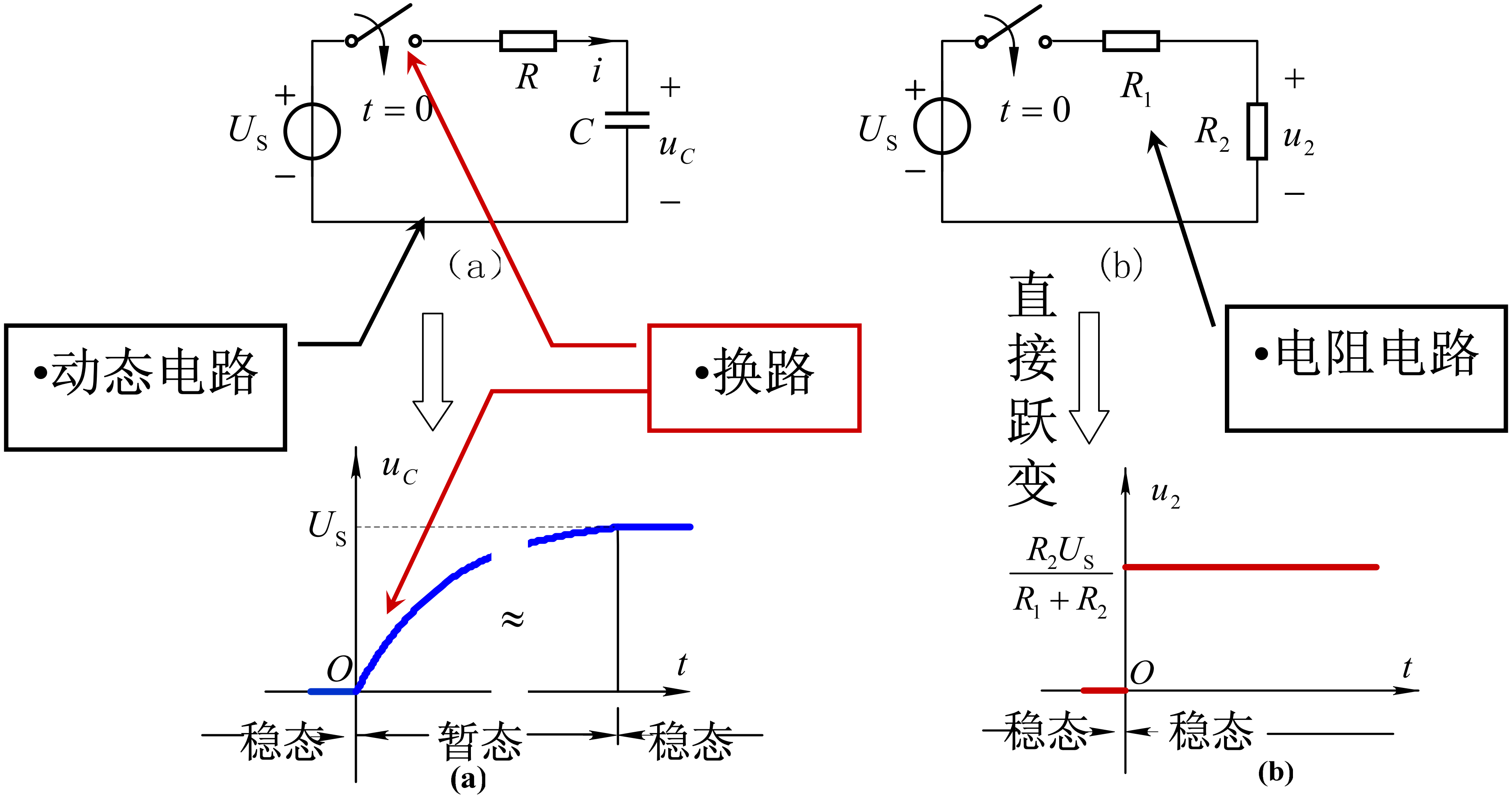
❖换路所经过时间为 0_-到 0_+。

2）电路的初始条件：

定义：电路换路后瞬间（$t = 0_+$时)待求变量的初始值

§ 10.1 动态电路的暂态过程

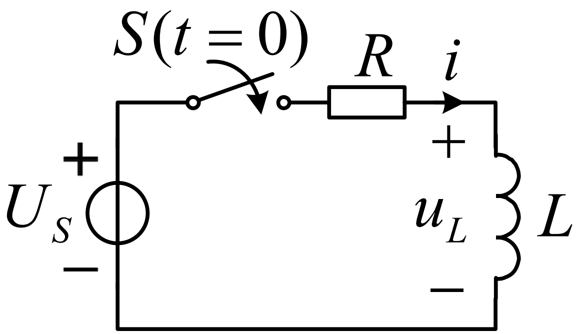
例：电容电路和电阻电路

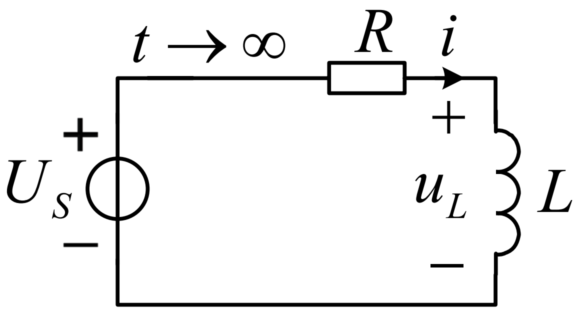


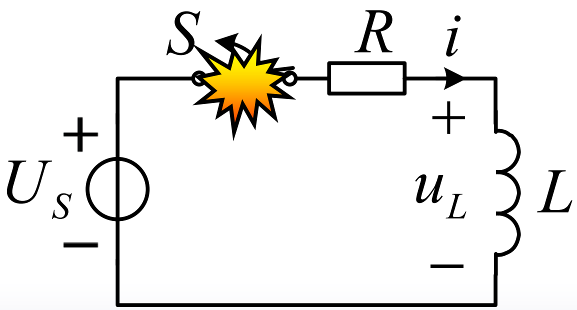
无暂态过程

§ 10.1 动态电路的暂态过程

例： 电感电路





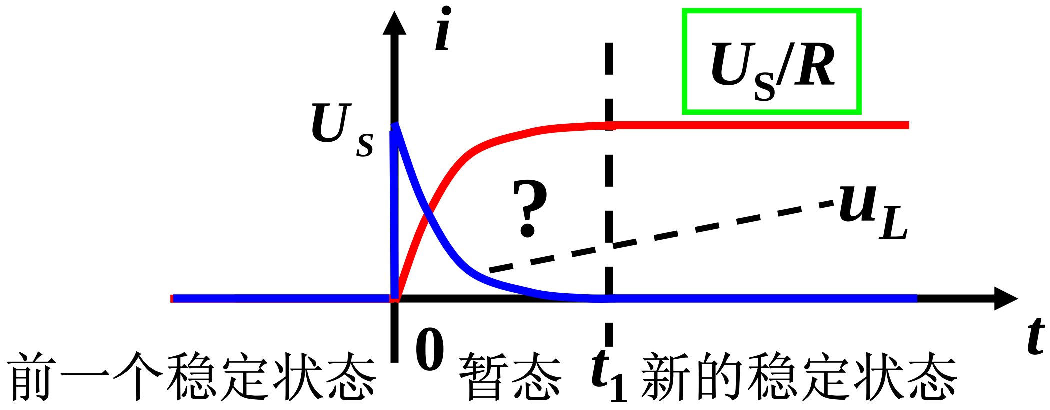


S未动作前，电路处于稳定状态

$$i = 0, \quad u_L = 0$$

S接通电源后很长时间，电路达到新的稳定状态，电感视为短路

$$u_L = 0, \quad i = U_s / R$$



S断开瞬间 $i = 0$ ， $u_L \to \infty$

注意工程实际中的过电压过电流现象！

§ 10.1 动态电路的暂态过程

时域分析法**(time domain analysis)**

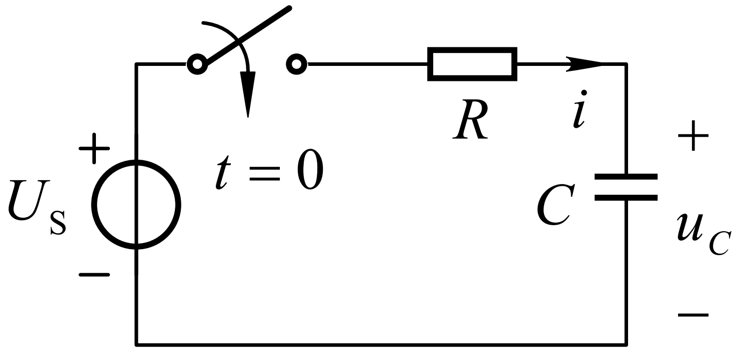
以时间为主变量列写电路的微分方程并确定初始条件，通过求解微分方程获得电压、电流的时间函数(变化规律)。

以电容电路为例：

图示电路换路后的**KVL**方程为

$$Ri(t)+u_C(t)=U_S,\quad t>0$$

式中 $i(t)=C\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$



***RC*充电电路**

代入上式，得 $RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S$

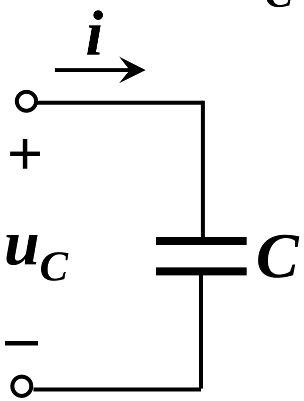
$$\boxed{\text{初始值}\rightarrow u(0_+)、i(0_+)、q(0_+)、\Psi(0_+)}$$

换路之后，电路量将从其初始值开始变动。

§ 10.2 电路量的初始值

1 电容电压u_C和电感电流i_L初始值的确定

(1) 电容电压u_C



$$q(t)=\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad u_C(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{0_-} i(\xi)\mathrm{d}\xi+\int_{0_-}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad =\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0_-} i(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{C}\int_{0_-}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=q(0_-)+\int_{0_-}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad =u_C(0_-)+\frac{1}{C}\int_{0_-}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

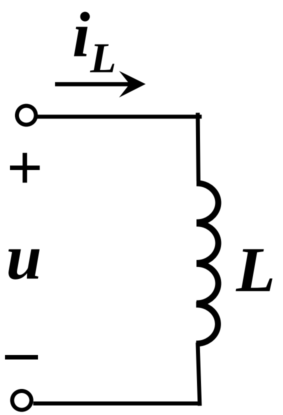
当$t = 0_+$时， $$q(0_+)=q(0_-)+\int_{0_-}^{0_+} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)+\frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

当$i(t)$为有限值时， $$\int_{0_-}^{0_+} i(\xi)\mathrm{d}\xi=0 \quad \left\{\begin{array}{l} q(0_+)=q(0_-) \\ u_C(0_+)=u_C(0_-) \end{array}\right\} \quad \boxed{\text{换路定律}}$$

§ 10.2 电路量的初始值

(2) 电感电流i_L



$$\Psi(t)=\int_{-\infty}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad i_L(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{0_-}u(\xi)\mathrm{d}\xi+\int_{0_-}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad =\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0_-}u(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{L}\int_{0_-}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=\Psi(0_-)+\int_{0_-}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad =i_L(0_-)+\frac{1}{L}\int_{0_-}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

当$t = 0_+$时， $\Psi(0_+)=\Psi(0_-)+\int_{0_-}^{0_+}u(\xi)\mathrm{d}\xi$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)+\frac{1}{L}\int_{0_-}^{0_+}u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

当$u(t)$为有限值时，$\int_{0_-}^{0_+}u(\xi)\mathrm{d}\xi=0$ $\left\{\begin{array}{l}\Psi(0_+)=\Psi(0_-)\\ i_L(0_+)=i_L(0_-)\end{array}\right\}$ 换路定律

§ 10.2 电路量的初始值

2 除u_C、i_L之外各电压电流初始值的确定

依据电路的结构约束和元件约束，在$t=0_+$瞬间有：

KCL $\sum i(0_+)=0$

KVL $\sum u(0_+)=0$

电阻元件 $u_R(0_+)=Ri_R(0_+)$ 或 $i_R(0_+)=Gu_R(0_+)$

电感元件 $i_L(0_+)=i_L(0_-)$

电容元件 $u_C(0_+)=u_C(0_-)$

在 $t=0_+$瞬间 电容相当于电压源；

电感相当于电流源。

于是电路成为电阻电路，可用分析直流电路的方法求解。

§ 10.2 电路量的初始值

求初始值的步骤：

(1) 由换路前电路求$u_C(0_-)$和$i_L(0_-)$；

(2) 由换路定律，确定$u_C(0_+)$和$i_L(0_+)$；

(3) 作0_+等效电路：

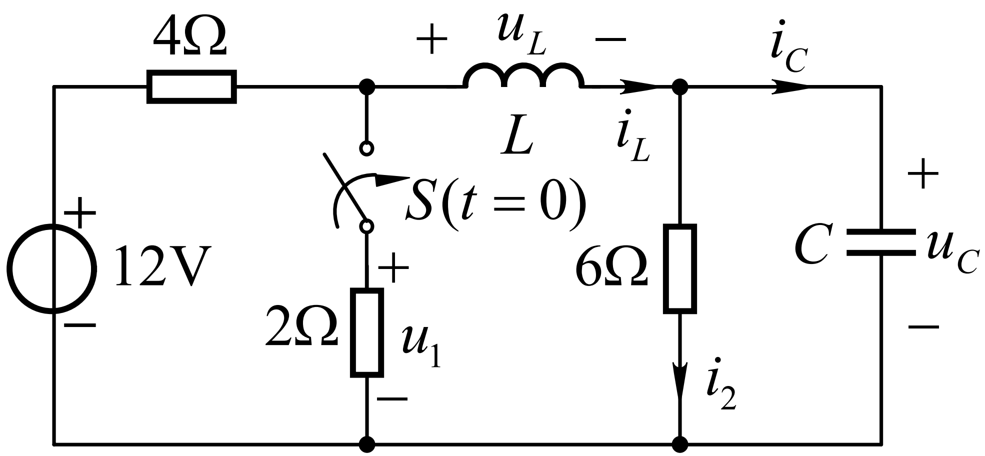
电容用电压等于$u_C(0_+)$的电压源置换；

电感用电流等于$i_L(0_+)$ 的电流源置换。

(4) 由0_+电路求所需的$u(0_+)$、$i(0_+)$。

§ 10.2 电路量的初始值

例10.1 图(a)所示电路，在t<0时处于稳态， t=0时开关接通。求初始值$i_L(0_+)$、 $u_C(0_+)$、 $u_1(0_+)$、 $u_L(0_+)$及 $i_C(0_+)$ 。



(a)

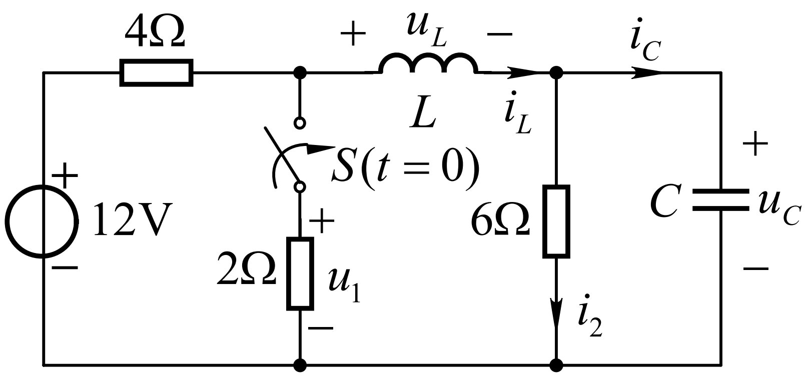
解 开关在接通之前，电路是直流稳态。于是求得

$$i_L(0_-)=\frac{12\text{V}}{(4+6)\Omega}=1.2\text{A} \qquad u_C(0_-)=6\Omega\times i_L(0_-)=7.2\text{V}$$

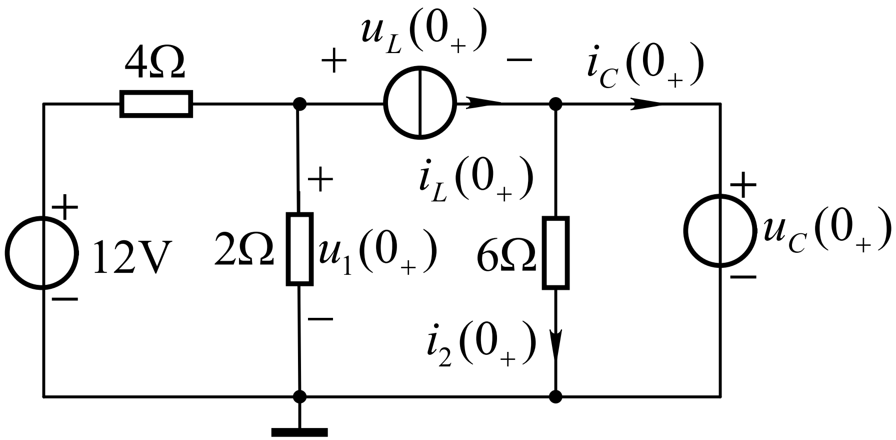
由换路定律：$i_L(0_+)=i_L(0_-)=1.2\text{A} \qquad u_C(0_+)=u_C(0_-)=7.2\text{V}$

§ 10.2 电路量的初始值

根据上述结果，画出t=0$_+$时的等效电路如图(b)。



(a)



(b)

对其列节点电压方程：
$$\left(\frac{1}{4\Omega}+\frac{1}{2\Omega}\right)u_1(0_+)=\frac{12\text{V}}{4\Omega}-i_L(0_+)$$

根据**KVL**和**KCL**求得：

$$u_1(0_+)=2.4\text{V} \qquad u_L(0_+)=u_1(0_+)-u_C(0_+)=-4.8\text{V}$$

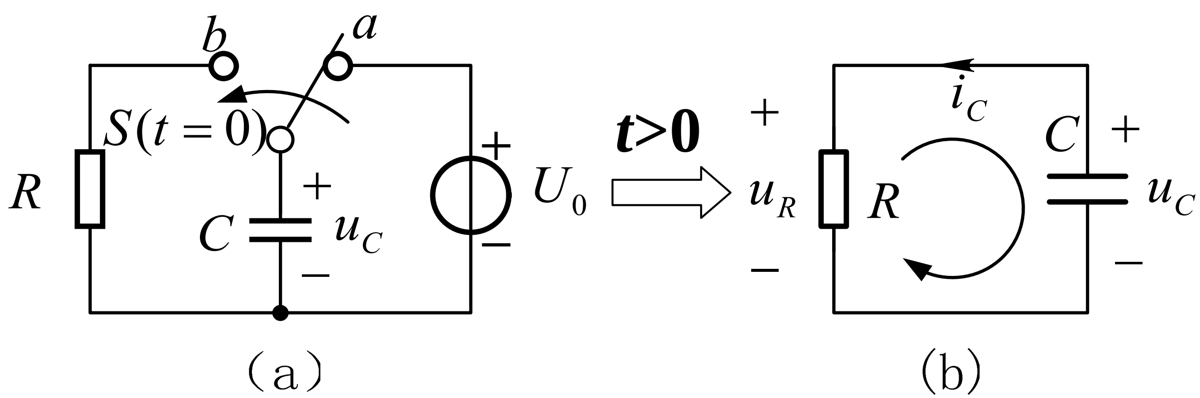
$$i_C(0_+)=i_L(0_+)-i_2(0_+)=i_L(0_+)-\frac{u_C(0_+)}{6\Omega}=0$$

§ 10.3 一阶电路的零输入响应

一阶电路(**first-order circuit**)：可用一阶常微分方程描述的电路。

零输入响应(**zero-input response**)：仅由储能元件原始储能引起的响应。

1 *RC*电路的零输入响应



***RC*电路的零输入响应**

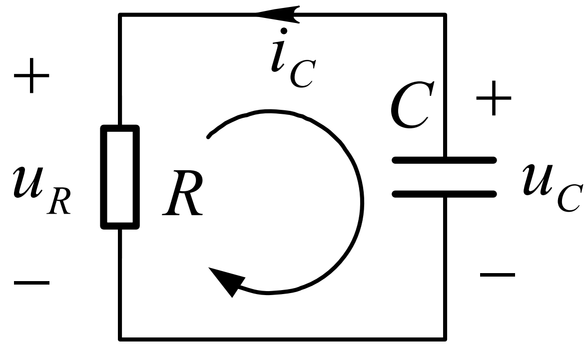
根据**KVL**列出***t*>0**时电路的微分方程：

$$-u_R + u_C = -Ri_C + u_C = RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0$$

§ 10.3 一阶电路的零输入响应

根据换路定律 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_0$

$$-u_R+u_C=-Ri_C+u_C=RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0$$



RC电路的零输入响应

特征方程 $RCp+1=0$

特征根 $p=-\dfrac{1}{RC}$

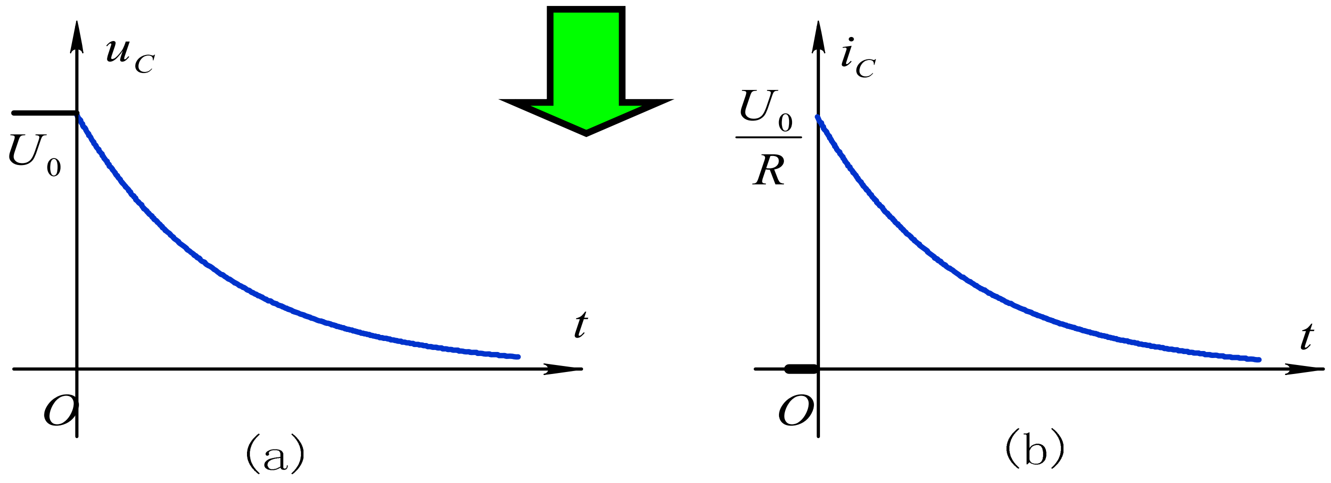
通解 $u_C=A\mathrm{e}^{pt}=A\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$

代入初值 $u_C(0_+)=A\mathrm{e}^0=A=U_0$

$$u_C=u_C(0_+)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}=U_0\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\quad(t\geq 0)$$

$$i_C=\frac{u_C}{R}=-C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=\frac{U_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\quad(t>0)$$

$$u_C = u_C(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} = U_0\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \geq 0) \qquad i_C = \frac{u_C}{R} = -C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \quad (t > 0)$$



u_C和 i_C的变化曲线

可见u_C和i_C的衰减速率取决于RC之积 。令

$\boxed{\tau = RC}$ 时间常数 (单位s)

§ 10.3 一阶电路的零输入响应

$$u_C = u_C(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} = U_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \geq 0) \qquad i_C = \frac{u_C}{R} = -C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \quad (t > 0)$$

τ 对放电时间的影响

$$u_C(t_0+\tau) = U_0 e^{-\frac{t_0+\tau}{\tau}} = U_0 e^{-1} e^{-\frac{t_0}{\tau}} = e^{-1} u_C(t_0) \approx 0.368 u_C(t_0)$$

t	**0**	τ	2τ	3τ	4τ	5τ	…	∞
$u_C(t)$	U_0	$0.368U_0$	$0.135U_0$	$0.05U_0$	$0.018U_0$	$0.007U_0$	…	**0**

τ对放电时间的影响：经过 3τ~5τ的时间, 放电基本结束。

§ 10.3 一阶电路的零输入响应

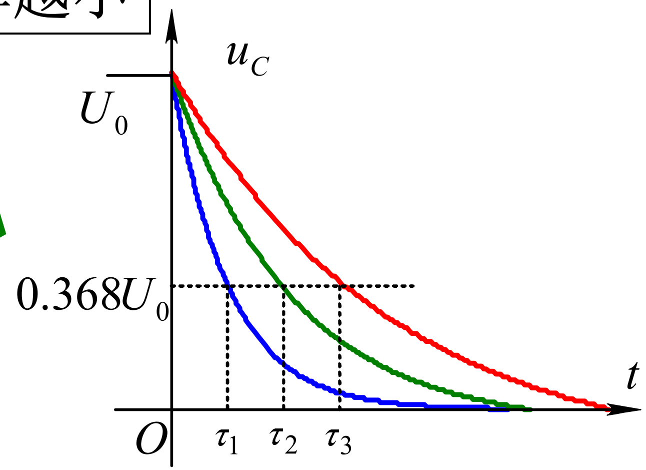
时间常数τ的理解

C越大 → τ越大 ← R越大

$w_C = Cu_C^2/2$ ↓ 电容储能越多

$p = u_R^2/R$ ↓ 电阻消耗功率越小

放电时间越长



不同 τ 值对应的 u_C 变化规律

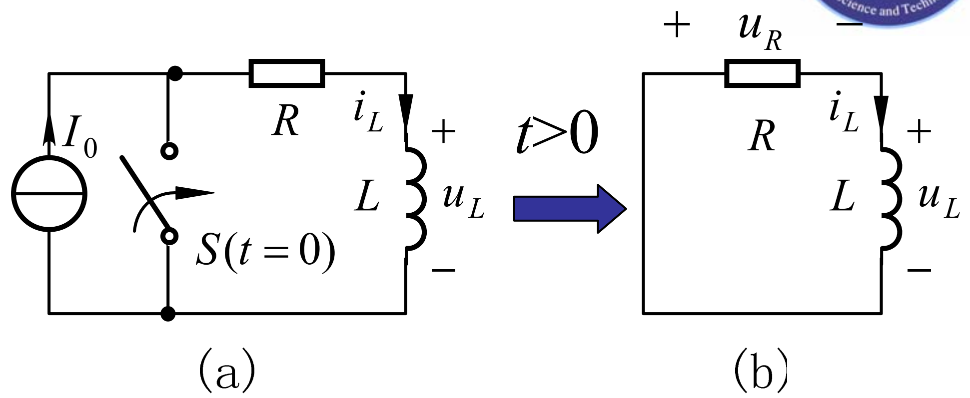
放电过程中的能量传递

电容的原始储能

$$W_e(0_+) = \frac{1}{2}Cu_C^2(0_+) = \frac{1}{2}Cu_C^2(0_-) = \frac{1}{2}CU_0^2$$

电阻所消耗的能量 $\int_{0_+}^{\infty} p_R(t)\mathrm{d}t = \int_{0_+}^{\infty} i_C^2(t)R\mathrm{d}t = \int_{0_+}^{\infty} (\frac{U_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})^2 R\mathrm{d}t = \frac{1}{2}CU_0^2$

2 *RL*电路的零输入响应



*RL*电路的零输入响应

换路定律 $i_L(0_+)=i_L(0_-)=I_0$

列**KVL**方程

$$u_L+u_R=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+Ri_L=0$$

特征方程 $Lp+R=0$

特征根 $p=-\dfrac{R}{L}$

通解 $i_L(t)=A\mathrm{e}^{pt}=A\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}=A\mathrm{e}^{-t/\tau}$

$$\tau=\frac{L}{R}$$

时间常数**(单位:s)**

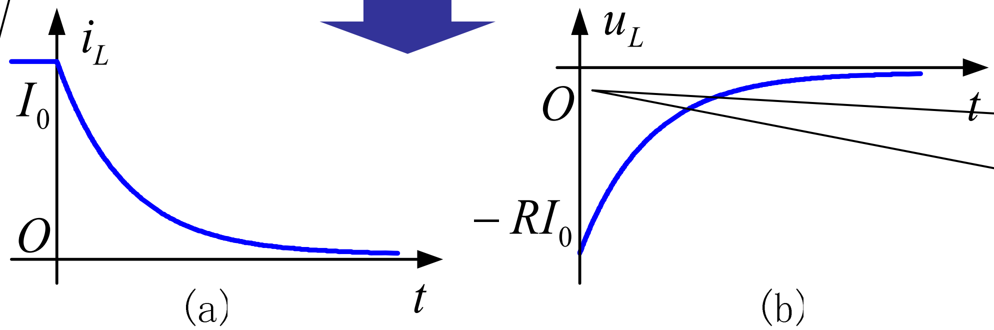
代入初值 $i_L(0_+)=A\mathrm{e}^0=A=I_0$

$$i_L(t)=i_L(0_+)\mathrm{e}^{-t/\tau}=I_0\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad (t\geq 0)$$

$$u_L=-Ri_L=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=-RI_0\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad (t>0)$$

§ 10.3 一阶电路的零输入响应

$$i_L(t) = i_L(0_+)\mathrm{e}^{-t/\tau} = I_0\mathrm{e}^{-t/\tau}\ (t \geq 0) \qquad u_L = -Ri_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = -RI_0\mathrm{e}^{-t/\tau}\ (t > 0)$$



换路时电感两端可能出现很高的瞬间电压

i_L 和 u_L 的变化曲线

$\tau = L/R$

L越大 → τ越大 ← **R**越小

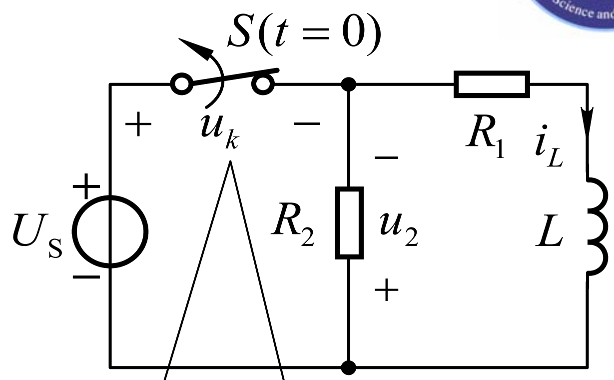
$w_L = Li_L^2/2$ $\qquad$ $p = Ri_L^2$

电感储能越多 $\qquad$ 电阻消耗功率越小

放电时间越长

§ 10.3 一阶电路的零输入响应

例**10.2** 图示电路，已知U_S=35V，R_1=5Ω，R_2=5kΩ，L=0.4H。t<0时电路处于直流稳态。t=0时开关断开。求t>0时的电流i_L及开关两端电压u_k。



断开含电感的电路时，开关可能承受很高的电压。

解 i_L的初始值及时间常数分别为

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{U_S}{R_1} = 7\text{A}$$

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{L}{R_1 + R_2} \approx 8\times10^{-5}\text{s}$$

根据 $i_L(t) = i_L(0_+)\mathrm{e}^{-t/\tau} = I_0\mathrm{e}^{-t/\tau}\ (t \ge 0)$ 得

$$i_L = i_L(0_+)\mathrm{e}^{-t/\tau} = 7\mathrm{e}^{-1.25\times10^4 t}\text{A} \qquad (t \ge 0)$$

再由KVL求得 $u_k = U_S + u_2 = U_S + R_2 i_L = (35 + 3.5\times10^4\mathrm{e}^{-1.25\times10^4 t})\text{V}\ (t > 0)$

$t \to 0_+$时， $u_k(0_+) = (35 + 3.5\times10^4)\text{V} \approx 3.5\times10^4\text{V}$

§ 10.3 一阶电路的零输入响应

小结：

1）一阶电路的零输入响应是由储能元件的原始储能引起的响应，它们都是由初始值衰减为零的指数衰减函数。

$$y(t) = y(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

2） τ 体现了一阶电路的固有特性，衰减快慢取决于时间常数 τ 。***RC*** 电路 $\tau = RC$ ，***RL*** 电路 $\tau = L/R$。

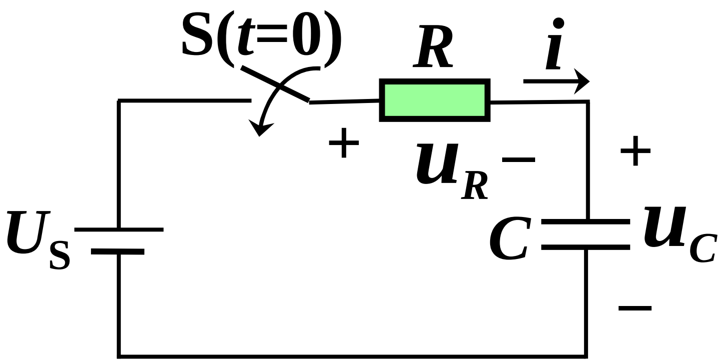
3）同一电路中所有响应具有相同的时间常数。

4）一阶电路的零输入响应和初始值成正比，称为零输入线性。

§ 10.5 一阶电路的零状态响应

电路中储能元件的原始储能为零［即$u_C(0_-)=0$，$i_L(0_-)=0$］，仅由独立电源作用引起的响应称为零状态响应(zero-state response)。

1. 一阶电路在直流电源作用下的零状态响应



$u_C(0^-)=0$

(1) 列方程：

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S$$

线性非齐次常微分方程

解的形式为：$u_C=u_C'+u_C''$

特解　　通解

(2) 求特解　$u_C'=U_S$

强制分量 (稳态分量)

§ 10.5 一阶电路的零状态响应

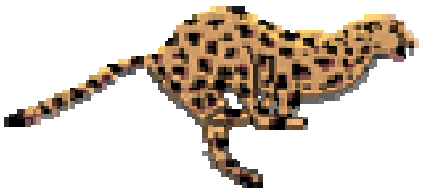
(3) 求齐次方程通解 u_C'' 自由分量(暂态分量)

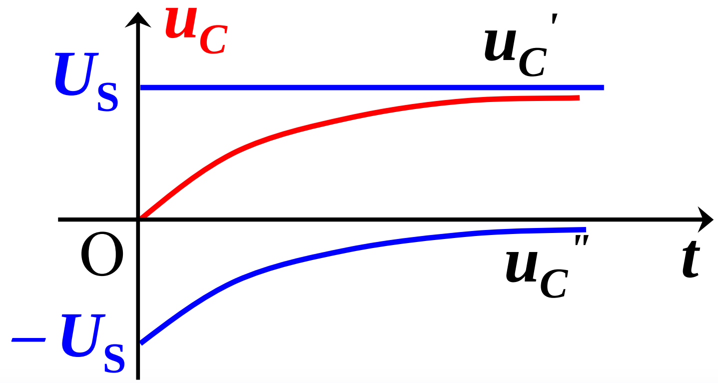
$$RC\frac{\mathrm{d}u_C''}{\mathrm{d}t}+u_C''=0 \qquad u_C''=A\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$$

(4) 求全解 $u_C=u_C'+u_C''=U_S+A\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$

(5) 定常数 $u_C(0^+)=A+U_S=0 \qquad \therefore A=-U_S$

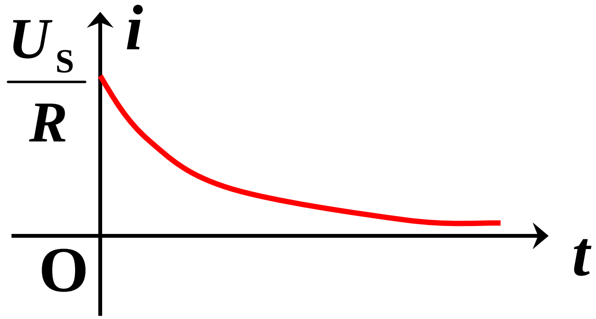
$$u_C=\underbrace{U_S}_{\text{强制分量(稳态)}}-\underbrace{U_S\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}}_{\text{自由分量(暂态)}}=U_S(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}) \qquad (t\geq 0)$$



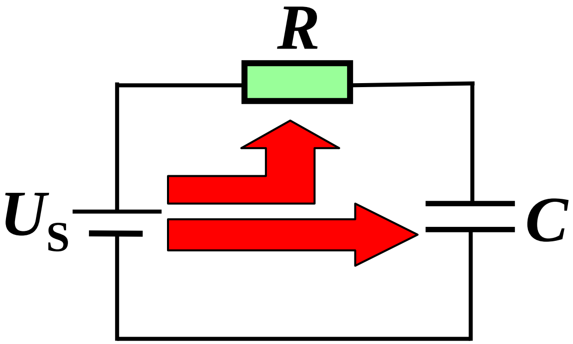


§ 10.5 一阶电路的零状态响应

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U_S}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$$



能量关系:



电源提供的能量一部分被电阻消耗掉，一部分储存在电容中，且$W_C=W_R$

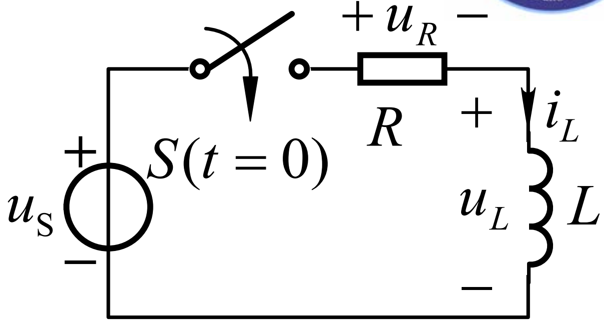
$$W_R = \int_0^\infty p_R \mathrm{d}t = \int_0^\infty i^2 R\mathrm{d}t = \int_0^\infty \left(\frac{U_S}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2 R\mathrm{d}t$$

$$= \frac{U_S^2}{R}\left(-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{2t}{\tau}}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{2}CU_S^2\mathrm{e}^{-\frac{2t}{\tau}}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2}CU_S^2 = W_C$$

充电效率为50%

§ 10.5 一阶电路的零状态响应

2. 一阶电路在正弦电源作用下的零状态响应



***RL*电路与正弦电压源接通**

设图示电路中，$\boldsymbol{u}_S$ 为正弦电压源：

$$u_S = U_m \cos(\omega t + \psi_u)$$

其中 ψ_u 是开关接通时刻的 $\boldsymbol{u}_S$ 相位，称为接入相角。

***t*>0** 时，电路的微分方程和初始值分别为

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + Ri_L = u_S$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$$

其通解 $\boldsymbol{i_L}$ 的组成

$$i_L = i_{Lp} + i_{Lh}$$

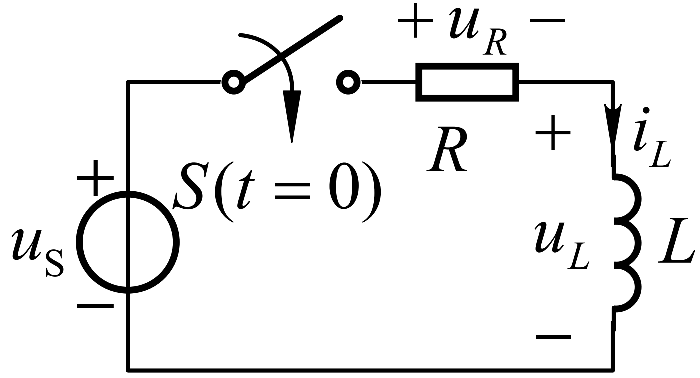
通解

特解

§ 10.5 一阶电路的零状态响应

(1) 求特解$\boldsymbol{i_{Lp}(t)}$

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+Ri_L=u_S$$



***RL*电路与正弦电压源接通**

根据正弦量的相量表示的线性性质和微分性质

$$\mathrm{j}\omega L\dot{I}_{mLp}+R\dot{I}_{mLp}=\dot{U}_m$$

解得

$$\dot{I}_{mLp}=\frac{\dot{U}_m}{R+\mathrm{j}\omega L}=\frac{U_m e^{\mathrm{j}\psi_u}}{|Z|e^{\mathrm{j}\varphi}}=\frac{U_m}{|Z|}e^{\mathrm{j}(\psi_u-\varphi)}=I_{mLp}e^{\mathrm{j}\psi_i}$$

***RL*串联电路的阻抗**

$$R+\mathrm{j}\omega L=|Z|e^{\mathrm{j}\varphi}$$

表示为正弦量

$$i_{Lp}(t)=I_{mLp}\cos(\omega t+\psi_i)$$

§ 10.5 一阶电路的零状态响应

(2) 求对应的齐次微分方程的通解$\boldsymbol{i_{Lh}(t)}$

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+Ri_L=u_{\mathrm{S}}$$

对应的齐次微分方程

$$L\frac{\mathrm{d}i_{Lh}}{\mathrm{d}t}+Ri_{Lh}=0$$

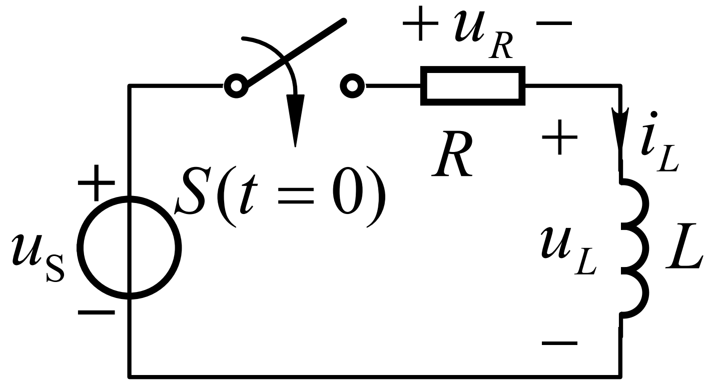
其通解为 $i_{Lh}(t)=A\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}=A\mathrm{e}^{-t/\tau}$

+

$$i_{Lp}(t)=I_{\mathrm{m}Lp}\cos(\omega t+\psi_{\mathrm{i}})$$

(3) 对应的非齐次微分方程的通解

$$i_L=I_{\mathrm{m}Lp}\cos(\omega t+\psi_{\mathrm{i}})+A\mathrm{e}^{-t/\tau}$$



***RL*电路与正弦电压源接通**

§ 10.5 一阶电路的零状态响应

(4) 确定积分常数

$$i_L = I_{\mathrm{m}L\mathrm{p}}\cos(\omega t+\psi_{\mathrm{i}})+A\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

由换路定律 $i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$

令$\boldsymbol{t=0_+}$ $i_L(0_+)=I_{\mathrm{m}L\mathrm{p}}\cos(\psi_{\mathrm{i}})+A=0$

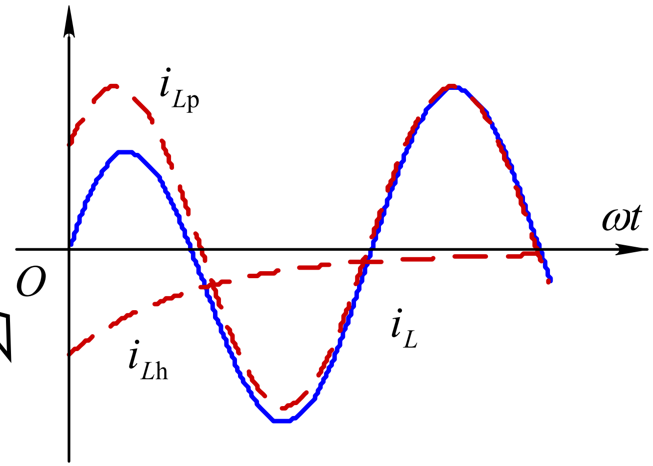
解得 $A=-I_{\mathrm{m}L\mathrm{p}}\cos\psi_{\mathrm{i}}$

代回通解公式

强制分量

$$i_L = I_{\mathrm{m}L\mathrm{p}}\cos(\omega t+\psi_{\mathrm{i}})-(I_{\mathrm{m}L\mathrm{p}}\cos\psi_{\mathrm{i}})\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

稳态分量　　暂态分量　　**自由分量**



$\boldsymbol{i_L}$、$\boldsymbol{i_{L\mathrm{p}}}$和$\boldsymbol{i_{L\mathrm{h}}}$的波形

§ 10.5 一阶电路的零状态响应

一阶电路在正弦电源激励下，其零状态响应与接入角的关系

$$i_L = I_{\mathrm{m}Lp}\cos(\omega t+\psi_{\mathrm{i}})-(I_{\mathrm{m}Lp}\cos\psi_{\mathrm{i}})\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

(1) $\psi_{\mathrm{i}}=\psi_{\mathrm{u}}-\varphi=\pm\pi/2$

$$i_{L\mathrm{h}}=-(I_{\mathrm{m}Lp}\cos\psi_{\mathrm{i}})\mathrm{e}^{-t/\tau}=0 \Longrightarrow \boxed{\text{直接进入正弦稳态}}$$

(2) $\psi_{\mathrm{i}}=\psi_{\mathrm{u}}-\varphi=0$ 或 $\psi_{\mathrm{i}}=\psi_{\mathrm{u}}-\varphi=\pi$

$$i_{L\mathrm{h}}=-(I_{\mathrm{m}Lp}\cos\psi_{\mathrm{i}})\mathrm{e}^{-t/\tau}=\mp I_{\mathrm{m}Lp}\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

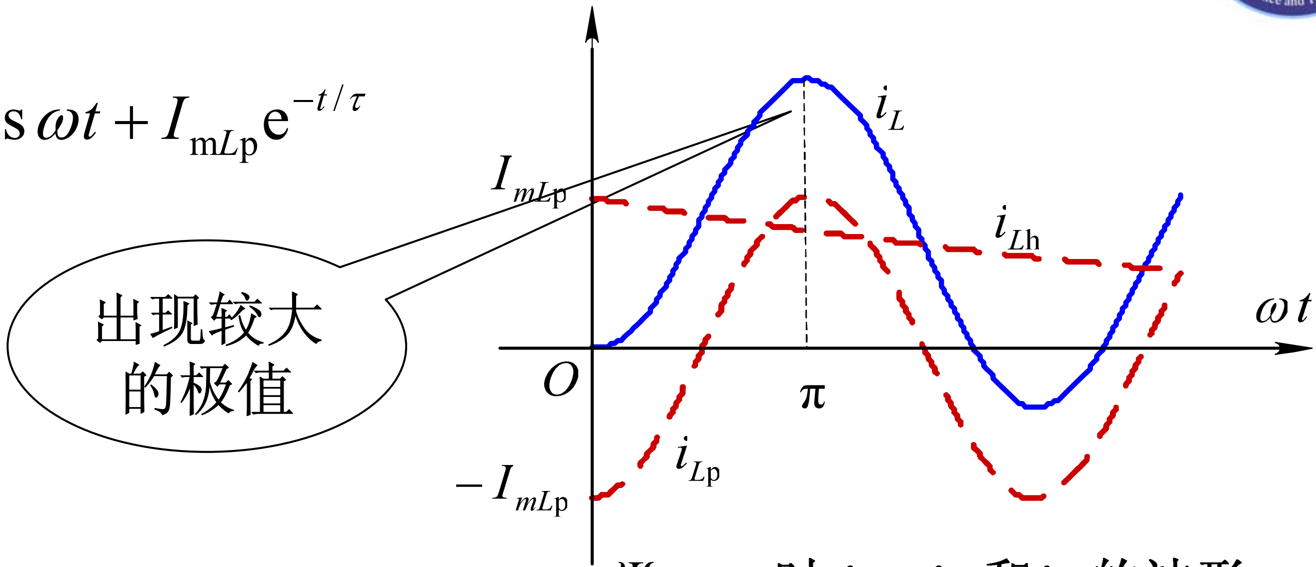
当 $\psi_{\mathrm{i}}=\pi$ 时：

$$i_L=i_{Lp}+i_{L\mathrm{h}}=I_{\mathrm{m}Lp}\cos(\omega t+\pi)-I_{\mathrm{m}Lp}\cos(\pi)\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

$$=-I_{\mathrm{m}Lp}\cos\omega t+I_{\mathrm{m}Lp}\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

§ 10.5 一阶电路的零状态响应

$$i_L = -I_{mLp}\cos\omega t + I_{mLp}\mathrm{e}^{-t/\tau}$$



$\Psi_i = \pi$ 时 i_L、i_{Lp}和i_{Lh}的波形

小结：

1) 一阶电路的零状态响应是储能元件无原始储能时，由输入激励引起的响应。

2) 时间常数与激励源无关。

3) 一阶电路的零状态响应与激励成正比。

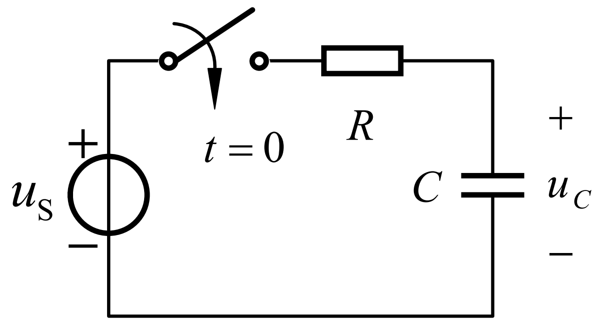
§ 10.6 一阶电路的全响应

全响应:由独立源和储能元件的原始储能共同作用引起的响应。

已知：$\boldsymbol{u_C(0_-) = U_0 \neq 0}$，求全响应。

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=u_S$$

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_0$$



***RC*电路的全响应**

仅$\boldsymbol{u_C(0_-)}$作用，零输入响应

$$RC\frac{\mathrm{d}u'_C}{\mathrm{d}t}+u'_C=0$$

$$u'_C(0_+)=u'_C(0_-)=U_0$$

仅$\boldsymbol{u_s}$作用，零状态响应

$$RC\frac{\mathrm{d}u''_C}{\mathrm{d}t}+u''_C=u_S$$

$$u''_C(0_+)=u''_C(0_-)=0$$

方程相加:

$$RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u'_C+u''_C)+(u'_C+u''_C)=u_S$$

$$u'_C(0_+)+u''_C(0_+)=U_0$$

全响应可分解为

$$u_C(t)=u'_C(t)+u''_C(t)$$

§ 10.6 一阶电路的全响应

•全响应的分解

从响应与电路状态的关系看：

全响应＝零输入响应＋零状态响应

从响应与激励的关系看：

全响应＝强制分量＋自由分量

两种分解的关系

- 全响应、零状态响应和零输入响应中都含有自由分量；
- 零输入响应中只有自由分量；
- 零状态响应中一般既含强制分量，也含自由分量。

§ 10.6 一阶电路的全响应

例：某一线性电路，初始状态一定，已知激励为**x(t)**时，全响应

$y_1(t) = 7e^{-t} + 2e^{-3t}(t > 0)$ ；激励为**3x(t)**时，全响应

$y_2(t) = 17e^{-t} - 2e^{-2t} + 6e^{-3t}(t > 0)$；求激励为**5x(t)**时电路的全响应。

解:设电路的零输入响应为 $y'(t)$**,**激励为**x(t)**的零状态响应为 $y''(t)$ **,**有

$$\begin{cases} y_1(t) = y'(t) + y''(t) = 7e^{-t} + 2e^{-3t} \\ y_2(t) = y'(t) + 3y''(t) = 17e^{-t} - 2e^{-2t} + 6e^{-3t} \end{cases}$$

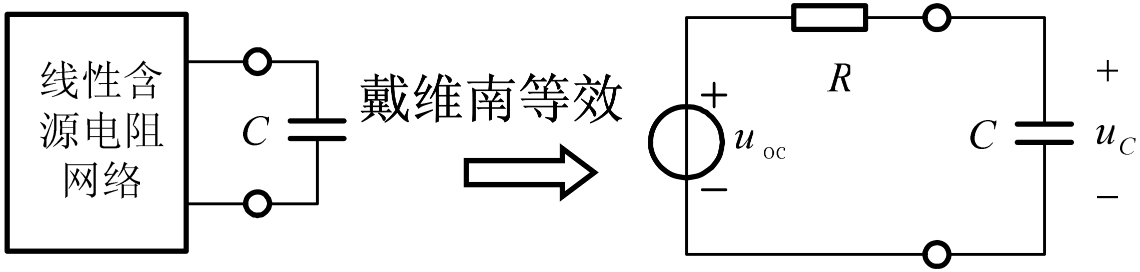
$$\therefore y'(t) = 2e^{-t} + e^{-2t}, \quad y''(t) = 5e^{-t} - e^{-2t} + 2e^{-3t}$$

激励为**5x(t)**时电路的全响应为：

$$y_3(t) = y'(t) + 5y''(t) = 27e^{-t} - 4e^{-2t} + 10e^{-3t}(t > 0)$$

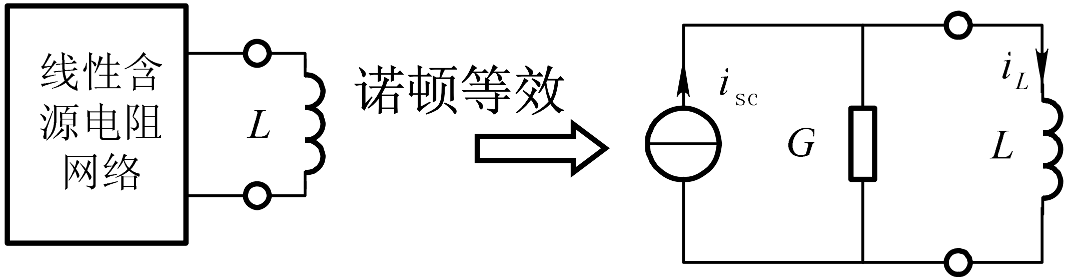
§ 10.7 求一阶电路暂态过程解的三要素公式

一阶电路的一般形式



KVL方程及初始条件

$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=u_{\mathrm{oc}} \\ u_C(0_+)=U_0 \end{cases}$$



KCL方程及初始条件

$$\begin{cases} GL\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+i_L=i_{\mathrm{sc}} \\ i_L(0_+)=I_0 \end{cases}$$

统一表示为：

时间常数　响应　激励

$$\tau\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}+f(t)=g(t)$$

$$f(0_+)=F_0$$

§ 10.7 求一阶电路暂态过程解的三要素公式

$$\tau\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}+f(t)=g(t)$$

$$f(0_+)=F_0$$

通解为 $f(t)=f_{\mathrm{p}}(t)+f_{\mathrm{h}}(t)=f_{\mathrm{p}}(t)+A\mathrm{e}^{-t/\tau}$

令t=0$_+$ $f(0_+)=f_{\mathrm{p}}(0_+)+A \quad \Rightarrow A=f(0_+)-f_{\mathrm{p}}(0_+)$

代入 $f(t)=f_{\mathrm{p}}(t)+[f(0_+)-f_{\mathrm{p}}(0_+)]\mathrm{e}^{-t/\tau}$

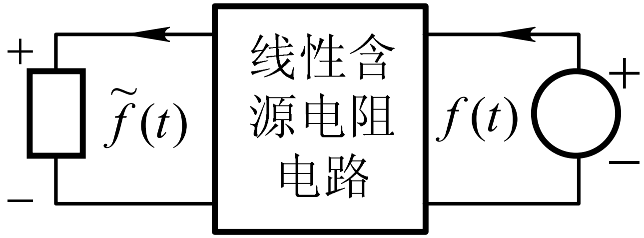
求暂态解的三要素公式：利用响应的初始值 $f(0_+)$ 、时间常数 τ 和特解 $f_{\mathrm{p}}(t)$ (通常用强制分量作为特解)来求响应 $f(t)$ 的方法。

若外加激励是直流电源，因为 $f_{\mathrm{p}}(t)=f_{\mathrm{p}}(0_+)=f(\infty)$

得直流激励下的三要素公式：$f(t)=f(\infty)+[f(0_+)-f(\infty)]\mathrm{e}^{-t/\tau}$

§ 10.7 求一阶电路暂态过程解的三要素公式

求解任意的待求电压或电流的三要素公式



已知u_C或i_L求其它响应的电路

设已知u_C或i_L，统一用$f(t)$表示。欲求某元件的电压或电流表示为$\tilde{f}(t)$

如右图，可得

$$\tilde{f}(t)=k_1\tilde{g}(t)+k_2 f(t)=k_1\tilde{g}(t)+k_2 f_{\mathrm{p}}(t)+[k_2 f(0_+)-k_2 f_{\mathrm{p}}(0_+)]\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

由t=0_+，得 $\tilde{f}(0_+)=k_1\tilde{g}(0_+)+k_2 f(0_+)$

由$t\to\infty$，得 $\tilde{f}_{\mathrm{p}}(t)=k_1\tilde{g}(t)+k_2 f_{\mathrm{p}}(t)$

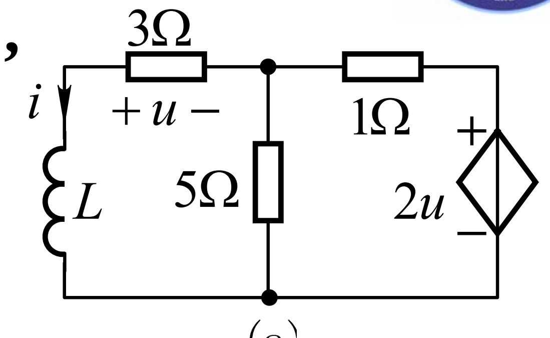
代回原式

$$\tilde{f}(t)=k_1\tilde{g}(t)+k_2 f_{\mathrm{p}}(t)+[k_1\tilde{g}(0_+)+k_2 f(0_+)-k_1\tilde{g}(0_+)-k_2 f_{\mathrm{p}}(0_+)]\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

$$=\tilde{f}_{\mathrm{p}}(t)+[\tilde{f}(0_+)-\tilde{f}_{\mathrm{p}}(0_+)]\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

§ 10.7 求一阶电路暂态过程解的三要素公式

例10.5 图(a)所示电路中，电感电流 $i(0\_)$ =10A，L=(1/6)H。求 $t\geq 0$ 时电流 i 的变化规律。

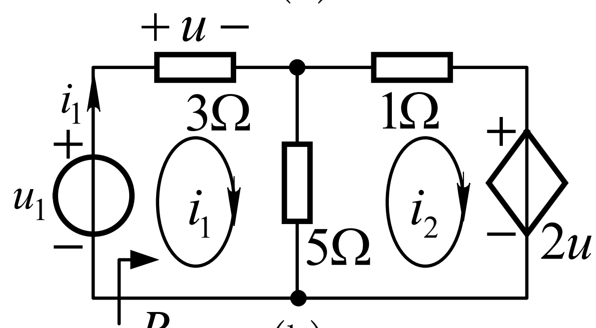


(a)

解 初始值：$i(0_+)=i(0_-)=10\text{A}$

稳态值：$i(\infty)=0$

用图(b)计算电感两端的等效电阻 R。



(b)

$$\begin{cases}(3+5)\Omega\times i_1-5\Omega\times i_2=u_1\\-5\Omega\times i_1+(5+1)\Omega\times i_2+2u=0\\u=3\Omega\times i_1\end{cases}$$

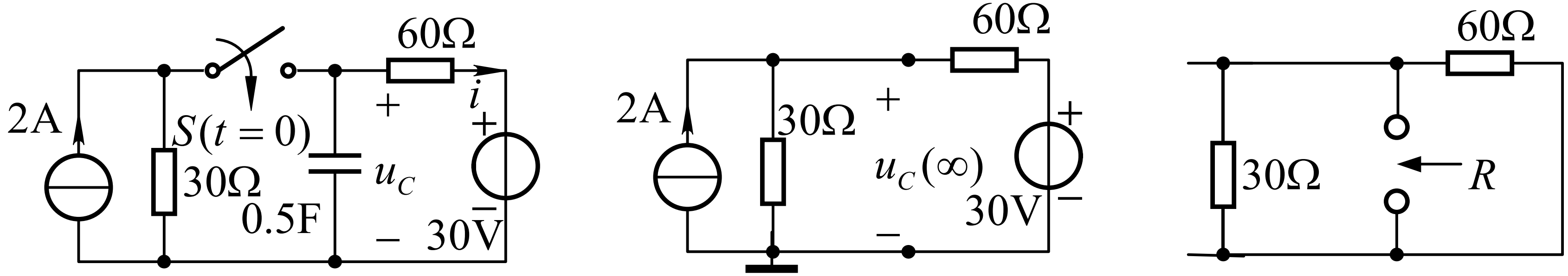
等效电阻 $R=\dfrac{u_1}{i_1}=\dfrac{53}{6}\Omega$　　时间常数 $\tau=\dfrac{L}{R}=\dfrac{1}{53}\text{s}$

由三要素法公式

$$i(t)=i(\infty)+[i(0_+)-i(\infty)]\mathrm{e}^{-t/\tau}=10\mathrm{e}^{-53t}\text{A}\qquad t\geq 0$$

§ 10.7 求一阶电路暂态过程解的三要素公式

例10.6图(a)所示电路$t<0$时处于稳态。 $t=0$时开关接通。求$t>0$时电压u_C和电流i。



(a) (b) (c)

解 由图(a)求得 $u_C(0_-)=30\text{V}$ $\therefore u_C(0_+)=u_C(0_-)=30\text{V}$

计算直流稳态电压的电路如图(b)所示，列节点电压方程：

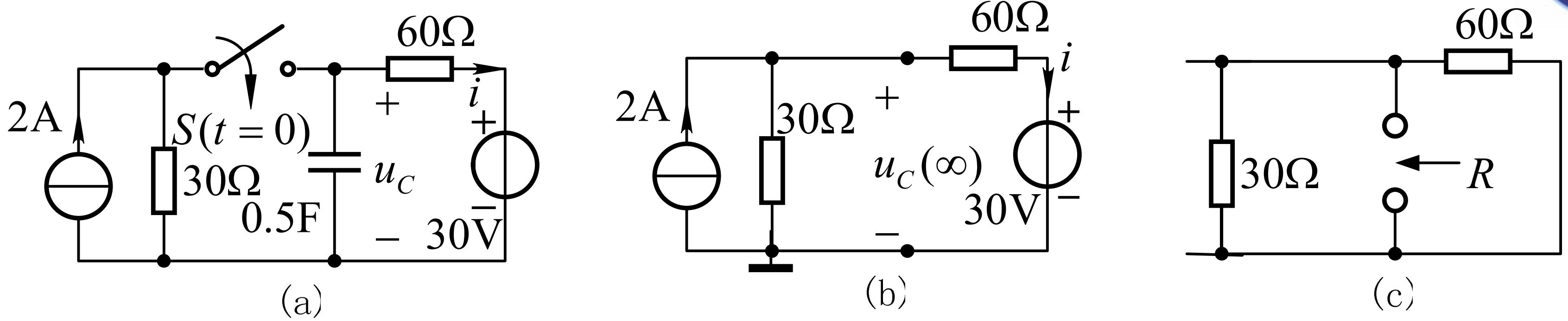
$$\left(\frac{1}{30\Omega}+\frac{1}{60\Omega}\right)u_C(\infty)=2\text{A}+\frac{30\text{V}}{60\Omega} \qquad u_C(\infty)=50\text{V}$$

将两个独立电源置零，得到计算等效电阻的电路如图(c)所示。

$$R=\frac{30\times 60}{30+60}\Omega=20\Omega$$

时间常数 $\tau=RC=20\Omega\times 0.5\text{F}=10\text{s}$

§ 10.7 求一阶电路暂态过程解的三要素公式



三要素：$u_C(0_+)=30\text{V}$ $u_C(\infty)=50\text{V}$ $\tau=10\text{s}$

由三要素公式得电容电压

$$u_C(t)=u_C(\infty)+[u_C(0_+)-u_C(\infty)]\mathrm{e}^{-t/\tau}=(50-20\mathrm{e}^{-0.1t})\text{V} \qquad (t\geq 0)$$

电阻电流

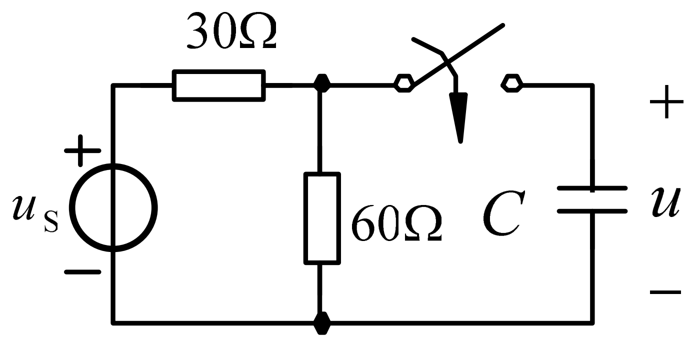
$$i(t)=\frac{u_C-30\text{V}}{60\Omega}=\frac{1}{3}(1-\mathrm{e}^{-0.1t})\text{A} \qquad (t>0)$$

求电阻电流方法2：直接求电阻电流的三要素

$$i(0_+)=0 \qquad i(\infty)=\frac{1}{3}\text{A} \qquad \tau=10\text{s}$$

§ 10.7 求一阶电路暂态过程解的三要素公式

例**10.8** 电路如图**(a)**所示，$C=0.001\mathrm{F}$， u_S为正弦电压源，幅值为**90V**，角频率为**50rad/s**。当u_S为正的最大值时，将开关接通，开关接通前电容电压为**10V**。求开关接通后电压u的变化规律。



(a)

解 据题意，u_S表示为

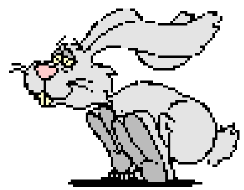
$$u_S = 90\cos(50t)\mathrm{V}$$

初始值：

$$u(0_+) = u(0_-) = 10\mathrm{V}$$

时间常数

$$\tau = RC = \frac{30\times 60}{30+60}\Omega\times 0.001\mathrm{F} = 0.02\mathrm{s}$$

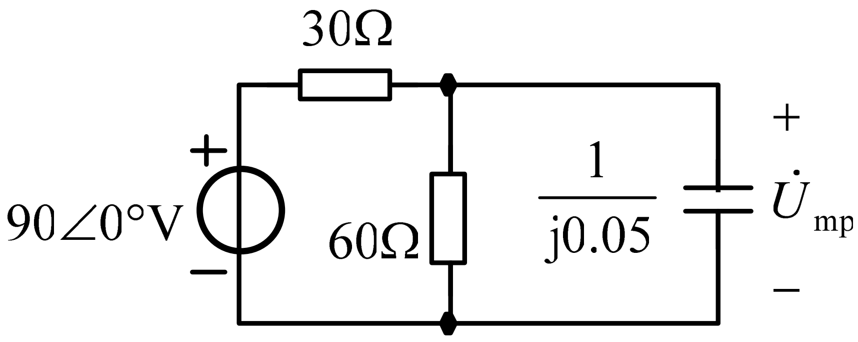


§ 10.7 求一阶电路暂态过程解的三要素公式

该电路当$t\to\infty$时，达到正弦稳态。利用相量模型[图(b)]计算正弦稳态分量$u_p(t)$。

$$\left(\frac{1}{30\Omega}+\frac{1}{60\Omega}+\mathrm{j}0.05\mathrm{S}\right)\dot{U}_{\mathrm{mp}}=\frac{90\angle 0°\mathrm{V}}{30\Omega}$$

$$\dot{U}_{\mathrm{mp}}=\frac{3\mathrm{V}}{0.05(1+\mathrm{j})}=30\sqrt{2}\angle -45^{\circ}\,\mathrm{V}$$



(b)

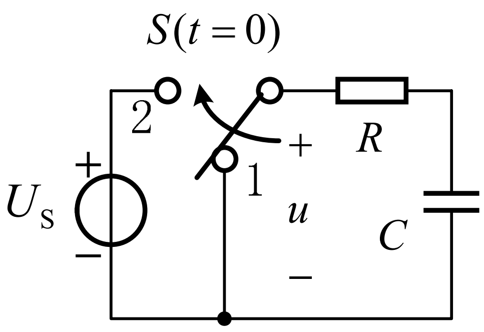
$$u_{\mathrm{p}}(t)=30\sqrt{2}\cos(50t-45^{\circ})$$

由三要素公式，得

$$u(t)=u_{\mathrm{p}}(t)+[u(0_{+})-u_{\mathrm{p}}(0_{+})]\mathrm{e}^{-t/\tau}$$
$$=30\sqrt{2}\cos(50t-45^{\circ})+[10-30\sqrt{2}\cos(-45^{\circ})]\mathrm{e}^{-50t}$$
$$=30\sqrt{2}\cos(50t-45^{\circ})-20\mathrm{e}^{-50t}\,\mathrm{V}\qquad(t\geq 0)$$

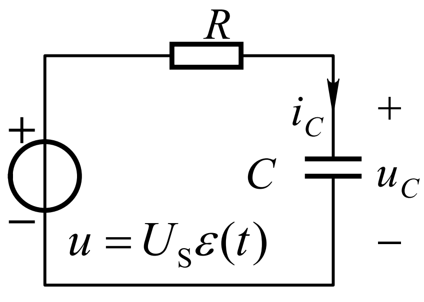
§ 10.4.1 阶跃函数和冲激函数

1单位阶跃函数



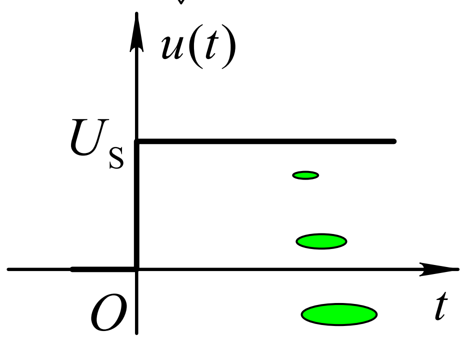
(a)

等效为



(c)

u(t)的波形

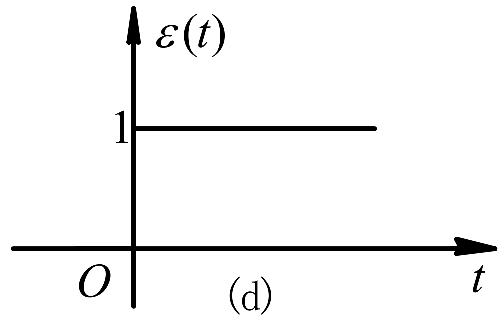


(b)

阶跃函数

若幅值为**1**

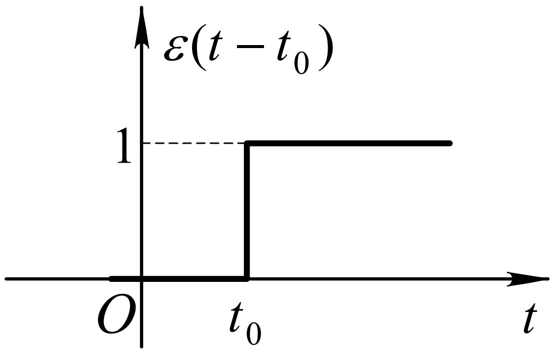
单位阶跃函数



(d)

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t>0)\end{cases}$$

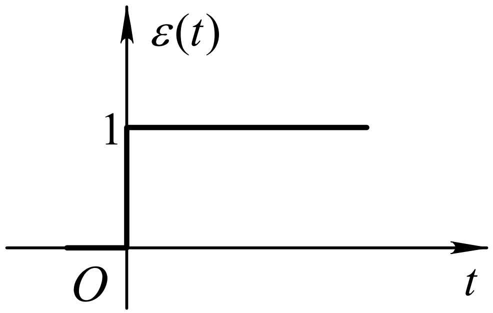
§ 10.4.1 阶跃函数和冲激函数



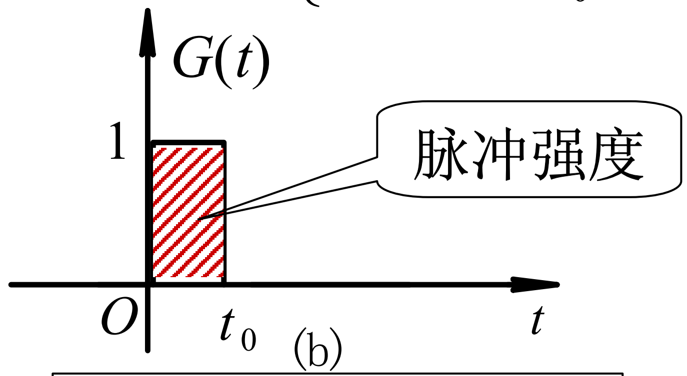
阶 跃 发 生
在$t=t_0$时刻

延迟单位阶跃函数

$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & (t<t_0)\\ 1 & (t>t_0)\end{cases}$$



二者相减得
到脉冲函数



$$\boxed{G(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-t_0)}$$

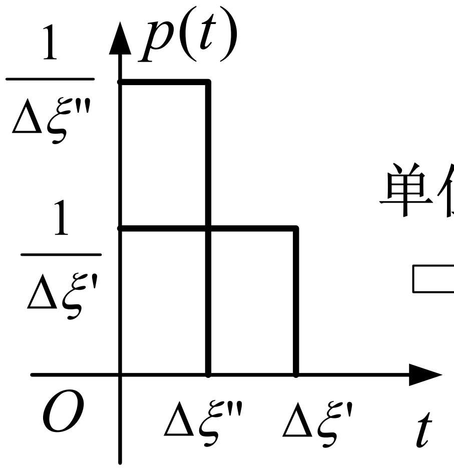
构造一般的脉冲函数

$$\left.\begin{aligned} f_1(t)&=AG(t)=A[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-t_0)]\\ f_2(t)&=BtG(t)=Bt[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-t_0)]\end{aligned}\right\}$$

单位脉冲：强度等于**1**的脉冲。

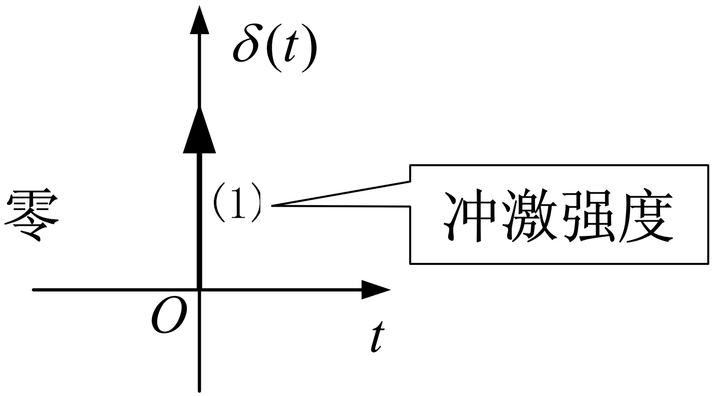
§ 10.4.1 阶跃函数和冲激函数

2 单位冲激函数



单位脉冲函数宽度的变化

单位脉冲函数的宽度趋于零 ⟹



单位冲激函数

⇓ 单位冲激函数定义

$$\begin{cases} \delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ 奇异 & t = 0 \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1 \end{cases}$$

延迟单位冲激函数 ⟸

$\boxed{\delta(t - t_0)}$

§ 10.4.1 阶跃函数和冲激函数

3.单位冲激函数的性质

$$\begin{cases}\delta(t)=\delta(-t)\\ \delta(t-t_1)=\delta(t_1-t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)\\ f(t)\delta(t-t_1)=f(t_1)\delta(t-t_1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t)\mathrm{d}t=f(0)\\ \int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t-t_1)\mathrm{d}t=f(t_1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{t}\delta(\xi)\mathrm{d}\xi=\varepsilon(t)\\ \int_{-\infty}^{t}\delta(\xi-t_1)\mathrm{d}\xi=\varepsilon(t-t_1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\delta(t)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon(t)=\varepsilon'(t)\\ \delta(t-t_1)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon(t-t_1)=\varepsilon'(t-t_1)\end{cases}$$

§ 10.4.2 阶跃响应和冲激响应

1 阶跃响应与单位阶跃特性

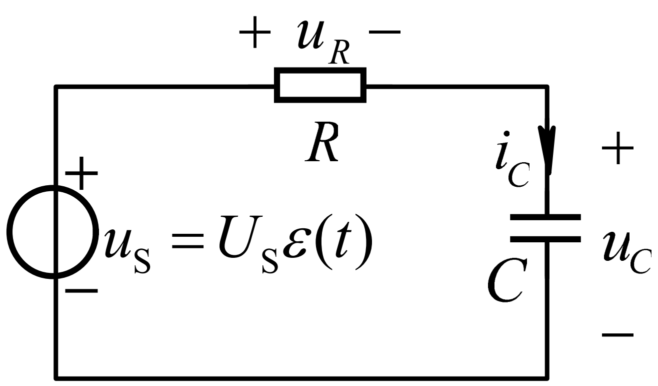
阶跃响应：电路在阶跃电源作用下的零状态响应。

单位阶跃特性：线性电路的阶跃响应与阶跃电源的幅值之比，表示为**s(t)**。

图示电路中$u_C(0_-)=0$，以$u_C(t)$为响应的单位阶跃特性为

$$s(t)=\frac{u_C(t)}{U_S}$$

⟹ **s(t)**无量纲

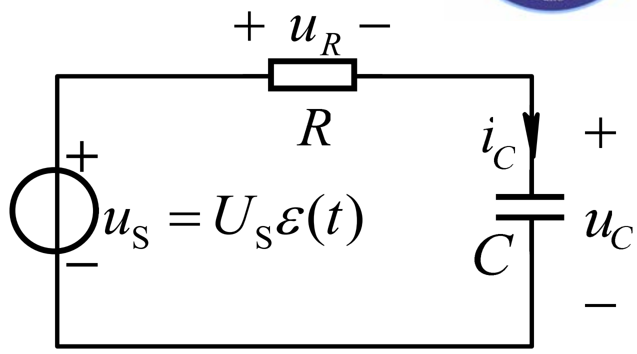


***RC*电路的阶跃响应**

单位阶跃特性还可能具有电阻或电导的量纲。

§ 10.4.2 阶跃响应和冲激响应

单位阶跃特性



RC电路的阶跃响应

零状态响应

列KVL方程 $u_R + u_C = u_S$

$\boldsymbol{u_R = Ri_C}$，$\boldsymbol{i_C = C\mathrm{d}u_C/\mathrm{d}t}$，$\boldsymbol{u_S = U_S\,\varepsilon(t)}$

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = U_S\varepsilon(t) \qquad u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$$

由于 $s(t) = \dfrac{u_C(t)}{U_S}$

所以： $RC\dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + s(t) = \varepsilon(t) \qquad s(0_+) = 0$

其通解 $s(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}$

引用ε**(t)**，拓展**s(t)**的定义域至–∞<**t**<∞

$$s(t) = (1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})\varepsilon(t)$$

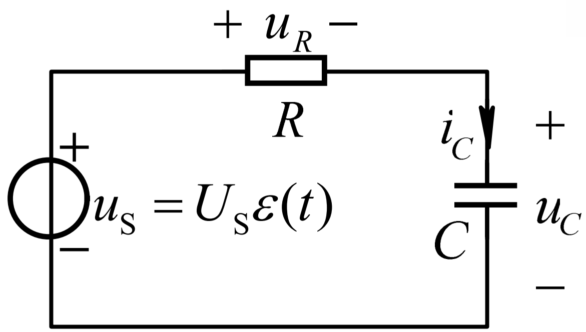
§ 10.4.2 阶跃响应和冲激响应

利用单位阶跃特性**s(t)**求阶跃响应

$$s(t)=(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})\varepsilon(t)$$

$$\boldsymbol{s(t)=u_C/U_S}$$

$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{u_C=U_S\,s(t)}$$

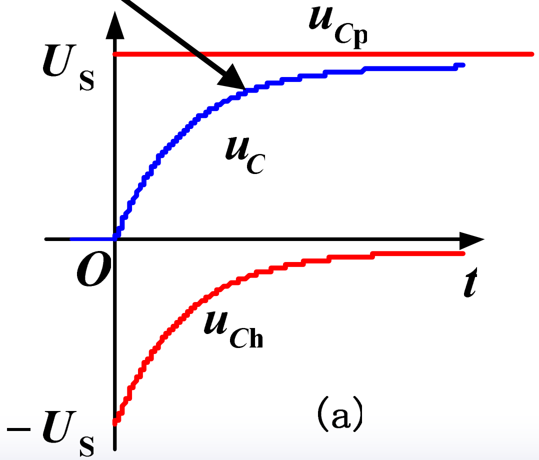


***RC*电路的阶跃响应**

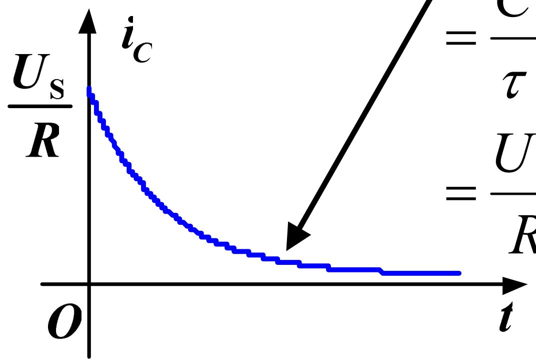
$$u_C(t)=U_Ss(t)=U_S(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})\varepsilon(t) \Longrightarrow i_C(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{C}{\tau}U_S\mathrm{e}^{-t/\tau}\varepsilon(t)+CU_S(1-e^{-t/\tau})\delta(t)$$

$$=\frac{U_S}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}\varepsilon(t)$$



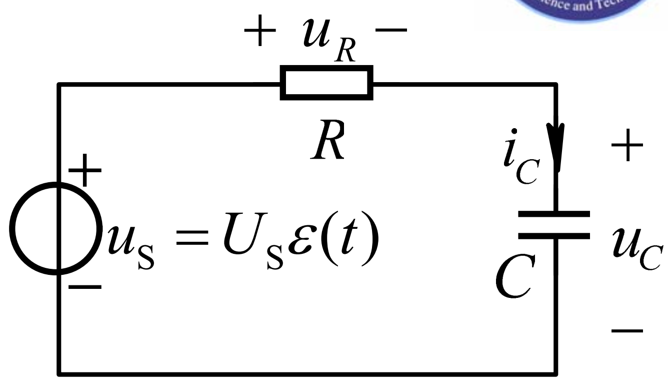
(a)



(b)

§ 10.4.2 阶跃响应和冲激响应

阶跃响应 $u_C(t)=U_S s(t)=U_S(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})\varepsilon(t)$

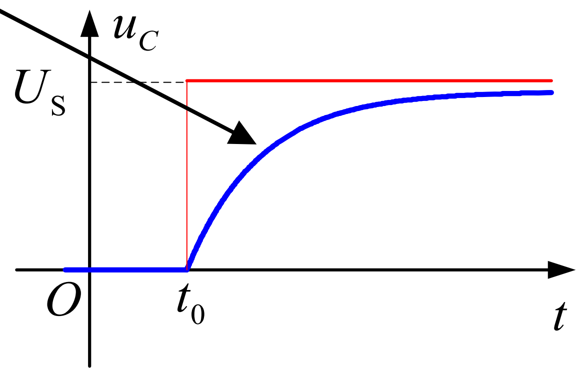


***RC*电路的阶跃响应**

延迟阶跃响应

若$\boldsymbol{u_S=U_S\,\varepsilon(t\text{-}t_0)}$

$$u_C(t)=U_S s(t-t_0)=U_S[1-\mathrm{e}^{-(t-t_0)/\tau}]\varepsilon(t-t_0)$$



延迟阶跃响应波形

脉冲响应

将$\boldsymbol{u_S}$换成矩形脉冲

$$u_S=U_S[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-t_0)]$$

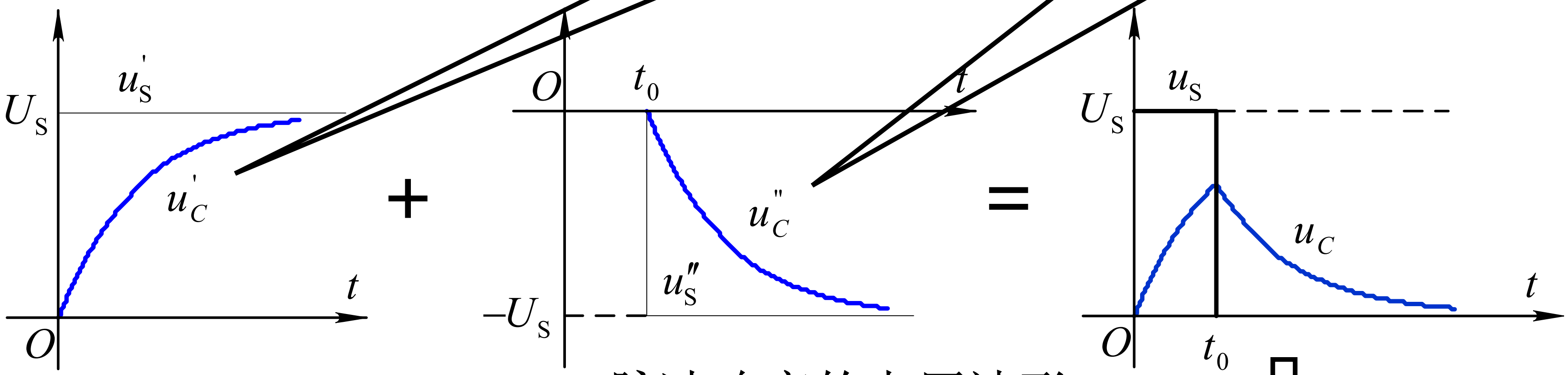
$$u_C(t)=U_S s(t)-U_S s(t-t_0)$$

$$=U_S(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})\varepsilon(t)-U_S[1-\mathrm{e}^{-(t-t_0)/\tau}]\varepsilon(t-t_0)$$

§ 10.4.2 阶跃响应和冲激响应

脉冲响应波形

$$u_C(t)=U_S s(t)-U_S s(t-t_0)=\boxed{U_S(1-e^{-t/\tau})\varepsilon(t)}-\boxed{U_S[1-e^{-(t-t_0)/\tau}]\varepsilon(t-t_0)}$$

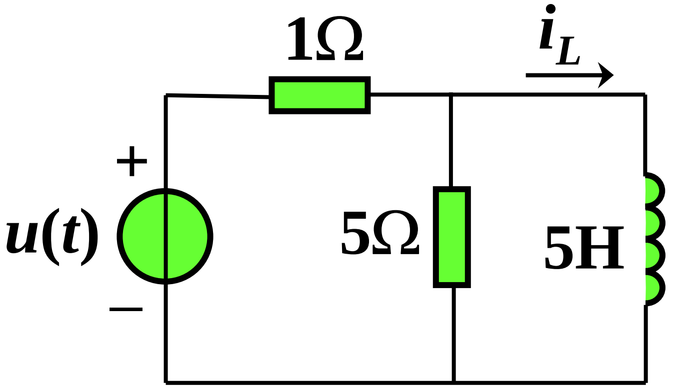


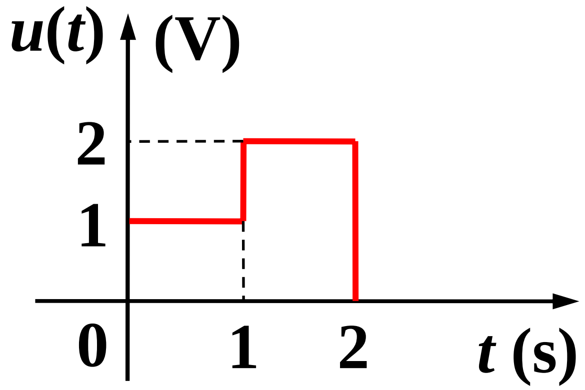
脉冲响应的电压波形

u_C表示为分段函数

$$u_C(t)=\begin{cases}0, & (t<0)\\ U_S(1-e^{-t/\tau}), & (0\le t<t_0)\\ U_S(1-e^{-t/\tau})-U_S[1-e^{-(t-t_0)/\tau}]=U_S(1-e^{-t_0/\tau})e^{-(t-t_0)/\tau}, & (t\ge t_0)\end{cases}$$

例. 已知： $u(t)$如图示，$i_L(0)=0$ 。求：$i_L(t)$，并画波形 .





解 方法一：用分段函数表示

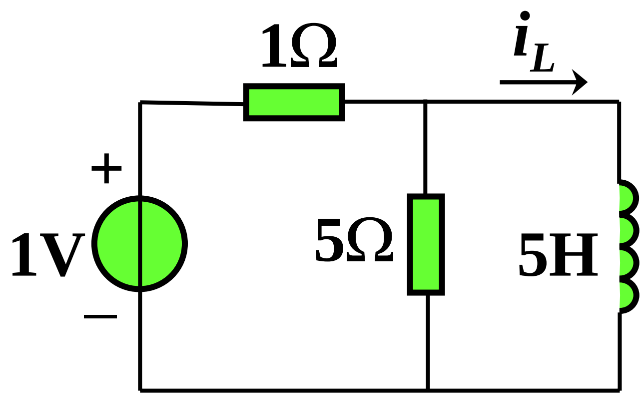
$t \le 0$ $\quad i_L(t)=0$

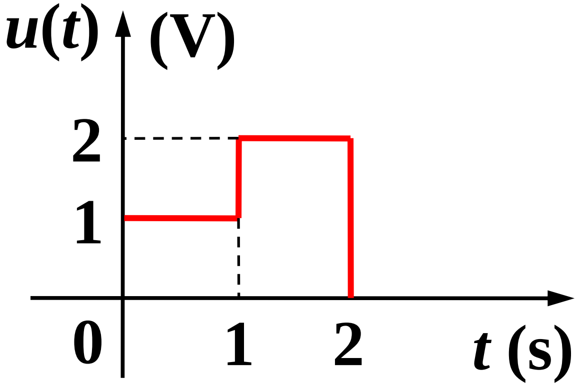
$0 < t \le 1$ $\quad i_L(0^+)=0$

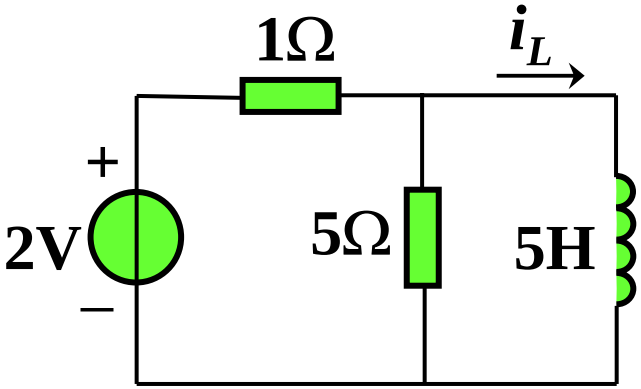
$i_L(\infty)=1\text{A}$

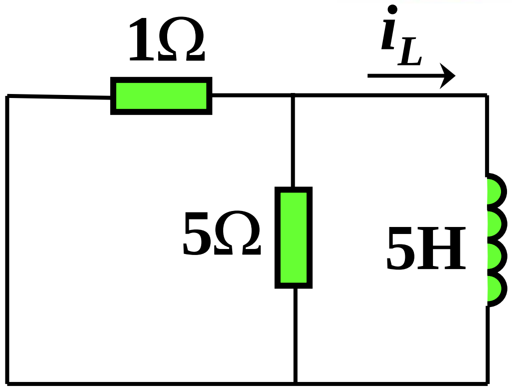
$\tau = 5/(1//5) = 6\ \text{s}$

$i_L(t) = 1 - e^{-t/6}\ \text{A}$









$1 < t \le 2$ $\quad i_L(1^+) = i_L(1^-) = 1 - e^{-1/6} = 0.154\ \text{A}$

$i_L(\infty) = 2\text{A} \qquad \tau = 6\ \text{s}$

$i_L(t) = 2 + [0.154 - 2]\, e^{-(t-1)/6} = 2 - 1.846\, e^{-(t-1)/6}\ \text{A}$

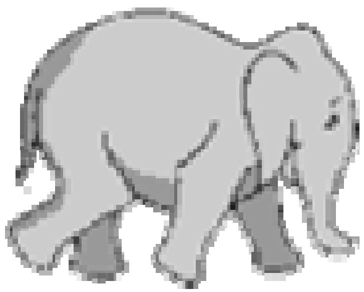
$t > 2$ $\quad i_L(2^+) = i_L(2^-) = 2 - 1.846\, e^{-(2-1)/6} = 0.437\ \text{A}$

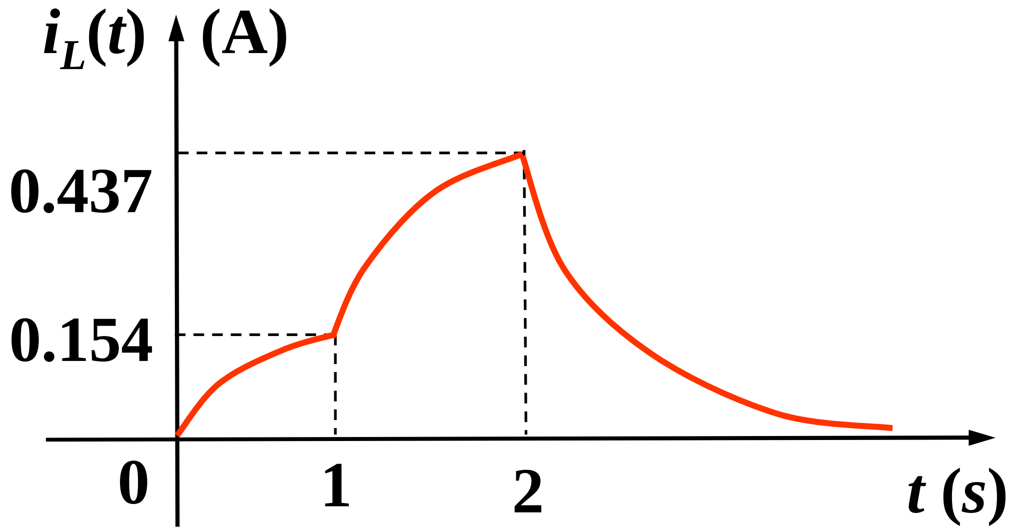
$i_L(\infty) = 0 \qquad \tau = 6\ \text{s}$

$i_L(t) = 0.437\, e^{-(t-2)/6}\ \text{A}$

§ 10.4.2 阶跃响应和冲激响应

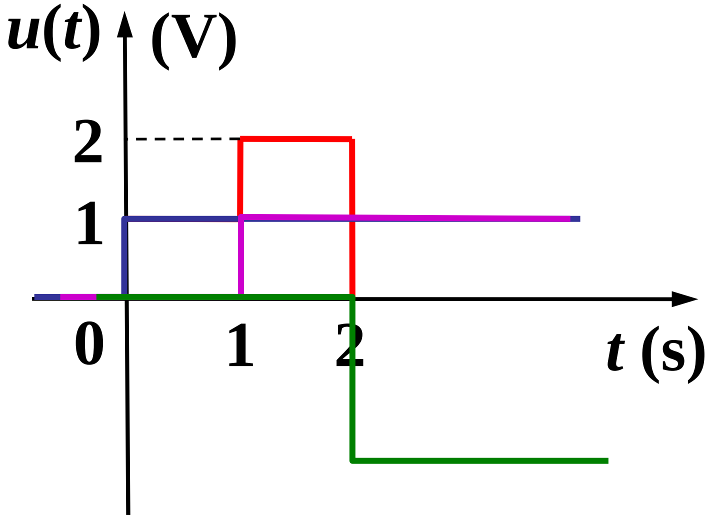
$$
i_L(t)=\begin{cases}0 & t\le 0\\ 1-\mathrm{e}^{-t/6}\ \mathrm{A} & 0<t\le 1\\ 2-1.846\mathrm{e}^{-(t-1)/6}\ \mathrm{A} & 1<t\le 2\\ 0.437\mathrm{e}^{-(t-2)/6}\ \mathrm{A} & t>2\end{cases}
$$





§ 10.4.2 阶跃响应和冲激响应

解法二：用全时间域函数表示(叠加)



$$u(t)=\varepsilon(t)+\varepsilon(t-1)-2\varepsilon(t-2)$$

$$s(t) \longrightarrow (1-e^{-t/6})\varepsilon(t)$$

$$\varepsilon(t) \longrightarrow (1-e^{-t/6})\varepsilon(t)\text{A}$$

$$\varepsilon(t-1) \longrightarrow [1-e^{-(t-1)/6}]\varepsilon(t-1)\text{A}$$

$$-2\varepsilon(t-2) \longrightarrow -2[1-e^{-(t-2)/6}]\varepsilon(t-2)\text{A}$$

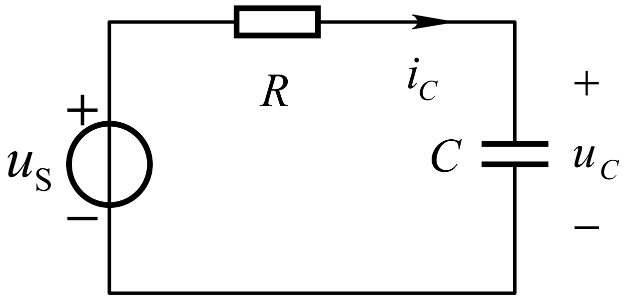
$$i_L(t)=(1-e^{-t/6})\varepsilon(t)+[1-e^{-(t-1)/6}]\varepsilon(t-1)-2[1-e^{-(t-2)/6}]\varepsilon(t-2)\ \text{A}$$

§ 10.4.2 阶跃响应和冲激响应

2 冲激响应与单位冲激特性

冲激响应：电路在冲激电源作用下的零状态响应。

单位冲激特性：线性电路的冲激响应与电源的冲激强度之比，以$h(t)$表示。



电路中 $\Rightarrow$

$$\begin{cases} u_C(0_-)=0 \\ u_S = \Psi\delta(t) \\ \text{响应为} u_C(t) \end{cases}$$

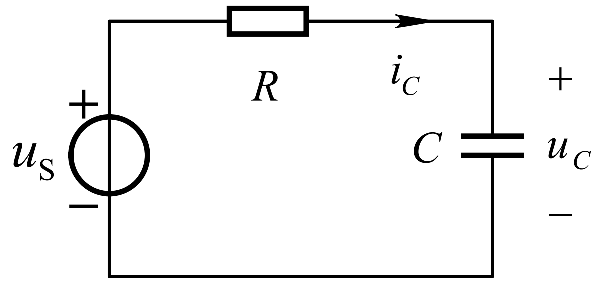
单位冲激特性 $\Rightarrow$ $h(t) = \dfrac{u_C(t)}{\Psi}$

单位冲激特性$h(t)$在量值上等于单位冲激电源$\delta(t)$引起的零状态响应。

§ 10.4.2 阶跃响应和冲激响应

冲激响应和单位冲激特性的计算

设u_S是宽度为$\Delta\xi$、幅度为$\Psi/\Delta\xi$的矩形脉冲电压

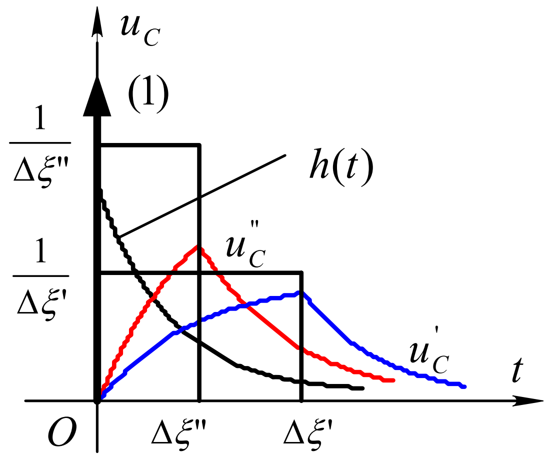


冲激电压源作用下的*RC*电路

分解为 $u_S = u'_S + u''_S = \dfrac{\Psi}{\Delta\xi}\varepsilon(t) - \dfrac{\Psi}{\Delta\xi}\varepsilon(t-\Delta\xi)$

根据叠加定理

$$u_C(t) = \frac{\Psi}{\Delta\xi}s(t) - \frac{\Psi}{\Delta\xi}s(t-\Delta\xi) = \frac{\Psi}{\Delta\xi}[s(t) - s(t-\Delta\xi)]$$



*RC*电路的单位脉冲响应与单位冲激响应

$\Delta\xi \to 0$时

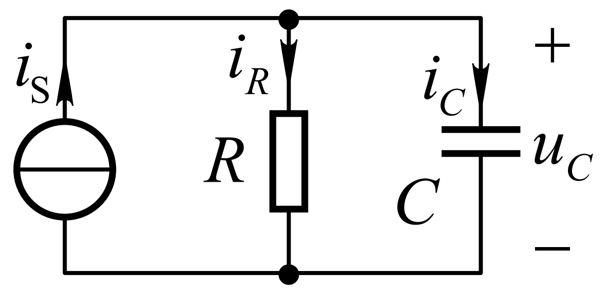
$$h(t) = \lim_{\Delta\xi\to 0}\frac{u_C(t)}{\Psi} = \lim_{\Delta\xi\to 0}\frac{1}{\Delta\xi}[s(t) - s(t-\Delta\xi)] = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}$$

推广得 $h(t) = \dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}$ $\qquad s(t) = \int_{0_-}^{t} h(\xi)d\xi$

§ 10.4.2 阶跃响应和冲激响应

一阶电路冲激响应的另一种方法

- 先计算冲激电源在储能元件中产生的初始值；
- 再求t>0时的零输入响应。



冲激电流源作用下的**RC**电路

求解***RC***一阶电路的单位冲激响应

已知 $\boldsymbol{i_S = Q\delta(t)}$， 列**KCL**方程

$$i_C + i_R = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{R}u_C = i_S = Q\delta(t)$$

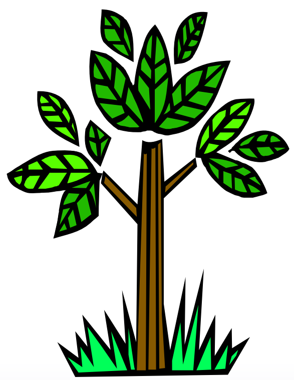
两边计算定积分

$$C\int_{0_-}^{0_+}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + \frac{1}{R}\int_{0_-}^{0_+}u_C\mathrm{d}t = Q\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)\mathrm{d}t$$

$\boldsymbol{u_C}$有限

$$\frac{1}{R}\int_{0_-}^{0_+}u_C\mathrm{d}t = 0$$

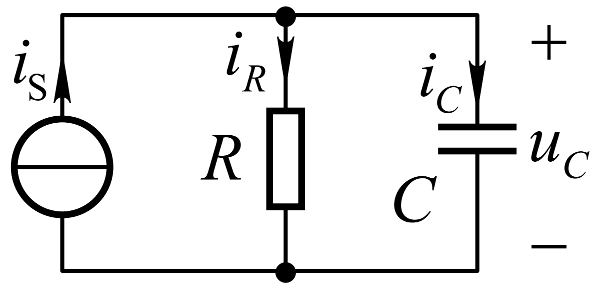
$$C\int_{0_-}^{0_+}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = C\int_{u_C(0_-)}^{u_C(0_+)}\mathrm{d}u_C = C[u_C(0_+) - u_C(0_-)] = Q$$



§ 10.4.2 阶跃响应和冲激响应

$$C[u_C(0_+)-u_C(0_-)]=Q$$

$$\Rightarrow \quad u_C(0_+)=\frac{Q}{C}+u_C(0_-)$$



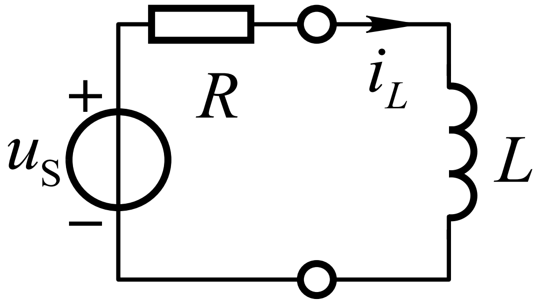
冲激电流源作用下的**RC**等效电路

求解***RL***一阶电路的单位冲激响应

设$\boldsymbol{u_S = \Psi\delta(t)}$

由对偶原理

$$i_L(0_+)=\frac{\Psi}{L}+i_L(0_-)$$



冲激电压源作用下的***RL***等效电路

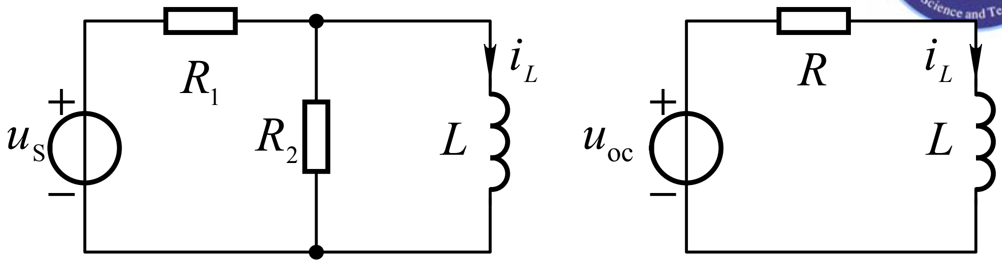
含冲激电源的复杂电路，可应用诺顿定理或戴维南定理先将复杂电路化简成图示两电路，然后再按上两式求初始值。

§ 10.4.2 阶跃响应和冲激响应

例**10.3** 图**(a)**所示电路，设

$$R_1 = 30\Omega, R_2 = 60\Omega, L = 0.1\text{H}$$

$u_S = 18\text{Wb} \times \delta(t)$ 求冲激响应$\boldsymbol{i_L}$



(a) (b)

解 将除电感以外的电路用戴维南电路等效，如图**(b)**所示。其中

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 20\Omega \qquad u_{oc} = \frac{R_2 u_S}{R_1 + R_2} = 12\text{Wb} \times \delta(t)$$

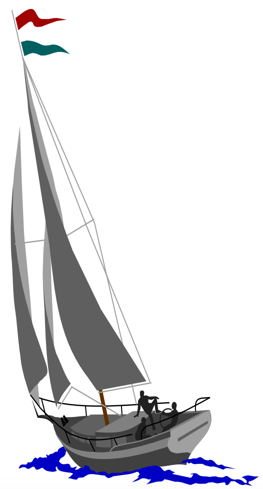
$\boldsymbol{u_{oc}}$的冲激强度为**12Wb**。所以电流的初始值为

$$i_L(0_+) = \frac{12\text{Wb}}{L} = 120\text{A}$$

时间常数为 $$\tau = \frac{L}{R} = 0.005\text{s}$$

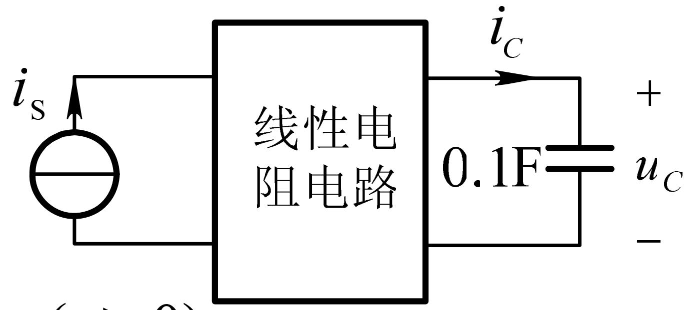
电感电流的冲激响应为

$$i_L = i_L(0_+)\text{e}^{-t/\tau} = 120\text{e}^{-200t}\text{A} \quad (t>0)$$



§ 10.4.2 阶跃响应和冲激响应

例10.4在图示电路中，以电流源i_S为激励，以电压u_C为响应时，已知其单位阶跃特性$s(t)$ =2(1−e^{-5t}) Ω×ε (t)。t<0时电容已充电， $u_C(0_-)$=3V。分别在i_S =2ε (t)A和 i_S =0.2C × δ (t)（C表示电荷的单位即库仑）两种情况下求全响应i_C (t)。



解 先求零输入响应 u'_C，u'_C 只有自由分量，其函数形式与$s(t)$中的自由分量相同

$$u'_C(t) = u'_C(0_+)e^{-5t} = u_C(0_-)e^{-5t} = 3e^{-5t}\text{V},\quad (t \ge 0)$$

再求零状态响应u''_C

(1)令i_S =2ε (t)A作用，阶跃响应为

$$u''_C(t) = 2\text{A} \times s(t) = 4(1 - e^{-5t})\varepsilon(t) \quad \text{V}$$

故全响应为 $u_C(t) = u'_C(t) + u''_C(t) = \begin{cases} 3\text{V}, & (t \to 0_-) \\ (4 - e^{-5t})\text{V}, & (t \ge 0) \end{cases}$

§ 10.4.2 阶跃响应和冲激响应

$$u_C(t)=u'_C(t)+u''_C(t)=\begin{cases}3\text{V}, & (t\to 0_-)\\ (4-\text{e}^{-5t})\text{V}, & (t\geq 0)\end{cases}$$

上式在**t=0**处连续,$\boldsymbol{u_C(t)=(4-e^{-5t})}$ **V ,(t≥0)**。对此式求导计算电流$\boldsymbol{i_C}$：

$$i_C(t)=C\frac{\text{d}u_C(t)}{\text{d}t}=0.1\times 5\text{e}^{-5t}\text{A}=0.5\text{e}^{-5t}\text{A} \qquad \text{t}>0$$

(2)令$\boldsymbol{i_S}$ **=0.2C × δ(t)**作用，求冲激响应$\boldsymbol{u''_C}$。

先求单位冲激特性***h*** **(t)**

$$h(t)=\frac{\text{d}s(t)}{\text{d}t}=2(1-\text{e}^{-5t})\Omega\times\delta(t)+10\text{e}^{-5t}(\Omega/\text{s})\times\varepsilon(t)=10\text{e}^{-5t}\ (\Omega/\text{s})\times\varepsilon(t)$$

冲激响应$\boldsymbol{u''_C}$为 $\quad u''_C(t)=0.2\text{C}\times h(t)=2\text{e}^{-5t}\varepsilon(t)\quad \text{V}$

全响应 $\quad u_C(t)=u'_C(t)+u''_C(t)=\begin{cases}3\text{V}, & (t\to 0_-)\\ (3\text{e}^{-5t}+2\text{e}^{-5t})\text{V}=5\text{e}^{-5t}\text{V}, & (t>0)\end{cases}$

§ 10.4.2 阶跃响应和冲激响应

$$u_C(t)=u'_C(t)+u''_C(t)=\begin{cases}3\text{V}, & (t\to 0_-)\\ (3\text{e}^{-5t}+2\text{e}^{-5t})\text{V}=5\text{e}^{-5t}\text{V}, & (t>0)\end{cases}$$

$\boldsymbol{u_C(0_+)=5\text{V}}$**,**$\boldsymbol{u_C}$在 $\boldsymbol{t=0}$ 处不连续**,**故上式定义域不含$\boldsymbol{t=0}$。为求 $i_C=C\dfrac{\text{d}u_C}{\text{d}t}$ 须将$\boldsymbol{u_C}$表示在统一的表达式内，即

$$u_C(t)=5\text{e}^{-5t}\varepsilon(t)+3\varepsilon(-t)\quad \text{V}$$

$$i_C(t)=C\frac{\text{d}u_C(t)}{\text{d}t}=0.1[5\text{e}^{-5t}\delta(t)-25\text{e}^{-5t}\varepsilon(t)-3\delta(t)]$$

$$=0.2\text{C}\times\delta(t)-2.5\text{e}^{-5t}\varepsilon(t)\quad \text{A}$$

上式表明，在$\boldsymbol{t=0}$瞬间电容充入电荷$\boldsymbol{Q=0.2\text{C}}$，致使电压跃变，

$$\Delta u_C=Q/C=2\text{V}$$

从$\boldsymbol{u_C(0_-)=3\text{V}}$跃升至$\boldsymbol{u_C(0_+)=5\text{V}}$ 。

§ 10.9 二阶电路的暂态过程

二阶电路

1）定义:用二阶微分方程描述的电路称为二阶电路。
(二阶电路一般含有两个储能元件)

2）最简单的二阶电路：***RLC***串联电路，***GCL***并联电路。

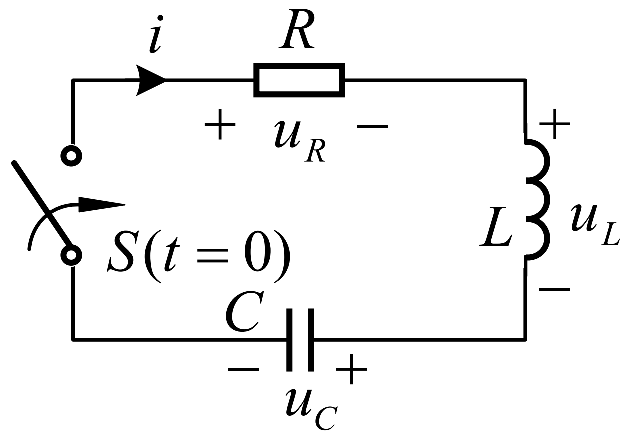
3）二阶电路中,初始值有两个。

RLC串联电路的零输入响应

图示电路中,**t=0**时开关接通。已知$u_C(0_-)=U_{C0}$,求 $u_C(t)$, $i(t)$, $u_L(t)$

t>0时由**KVL**得 $u_R+u_L+u_C=0$

元件方程 $u_R=Ri,\quad u_L=L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t},\quad i=C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$



RLC串联电路的零输入响应

代入上式，求得描述u_C的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{LC}u_C=0$$

初始条件

$$\begin{cases} u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_{C0} \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+}=\dfrac{1}{C}i(0_+)=\dfrac{1}{C}i(0_-)=0 \end{cases}$$

§ 10.9 二阶电路的暂态过程

描述二阶电路的二阶微分方程

$$\frac{d^2u_C}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{LC}u_C=0$$

零输入 $\therefore u_{Cp}=0$

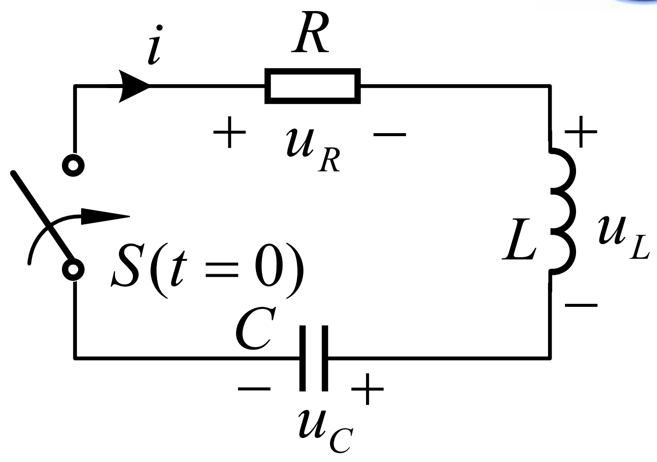
特征方程 $p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{LC}=0$

特征根为 $p=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$

令 $\alpha=R/(2L)$

$\omega_0=1/\sqrt{LC}$

$$\Longrightarrow\begin{cases}p_1=-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}\\ p_2=-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}\end{cases}$$



***RLC*串联电路的零输入响应**

§ 10.9 二阶电路的暂态过程

$$p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \qquad p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

特征根的形式不同，响应的变化规律也不同

1 $\alpha > \omega_0$，即电路参数满足 $R > 2\sqrt{L/C}$

p_1，p_2为不等负实根　通解为 $u_C = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$

2 $\alpha < \omega_0$，即电路参数满足 $R < 2\sqrt{L/C}$

p_1，p_2为共轭复根　　通解为 $u_C = A e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \theta)$

3 $\alpha = \omega_0$，即电路参数满足 $R = 2\sqrt{L/C}$

p_1，p_2为相等负实根　通解为 $u_C = (A_1 + A_2 t) e^{-\alpha t}$

§ 10.9 二阶电路的暂态过程

二阶电路的暂态过程与特征根的关系

1 $\alpha > \omega_0$ ，即电路参数满足 $R > 2\sqrt{L/C}$

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C = 0$$

$$p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$\boldsymbol{p}_1$、$\boldsymbol{p}_2$互异

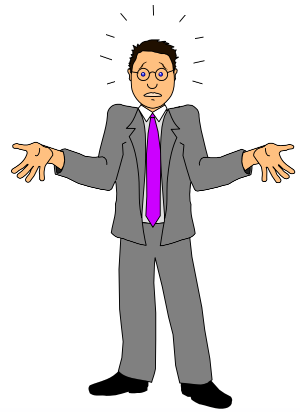
通解为

$$u_C = A_1 \mathrm{e}^{p_1 t} + A_2 \mathrm{e}^{p_2 t}$$

$$\begin{cases} u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_{C0} \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+} = \dfrac{1}{C} i(0_+) = \dfrac{1}{C} i(0_-) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_C(0_+) = A_1 + A_2 = U_{C0} \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+} = A_1 p_1 + A_2 p_2 = 0 \end{cases}$$

解得：$A_1 = \dfrac{p_2}{p_2 - p_1} U_{C0}$，$A_2 = -\dfrac{p_1}{p_2 - p_1} U_{C0}$



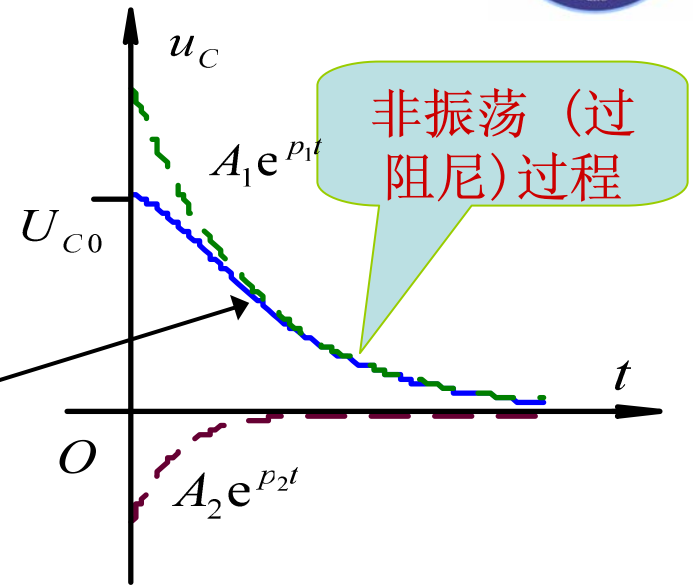
§ 10.9 二阶电路的暂态过程

$$p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \qquad p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$A_1 = \frac{p_2}{p_2 - p_1} U_{C0}, \quad A_2 = -\frac{p_1}{p_2 - p_1} U_{C0}$$

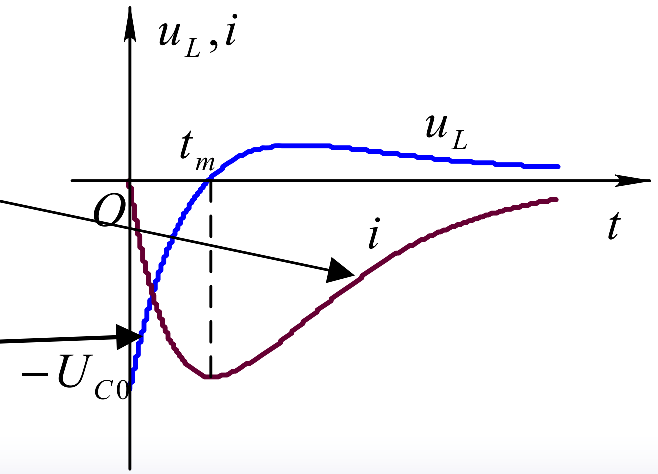
$$\Downarrow$$

$$u_C = \frac{U_{C0}}{p_2 - p_1}(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) \qquad (t > 0)$$

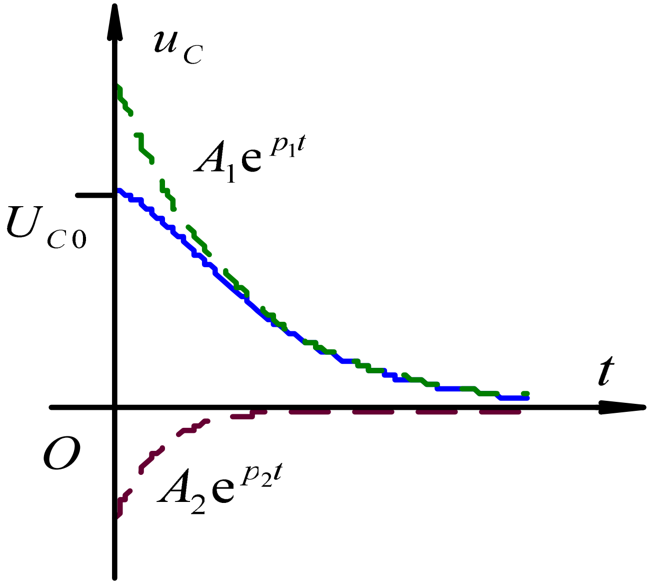


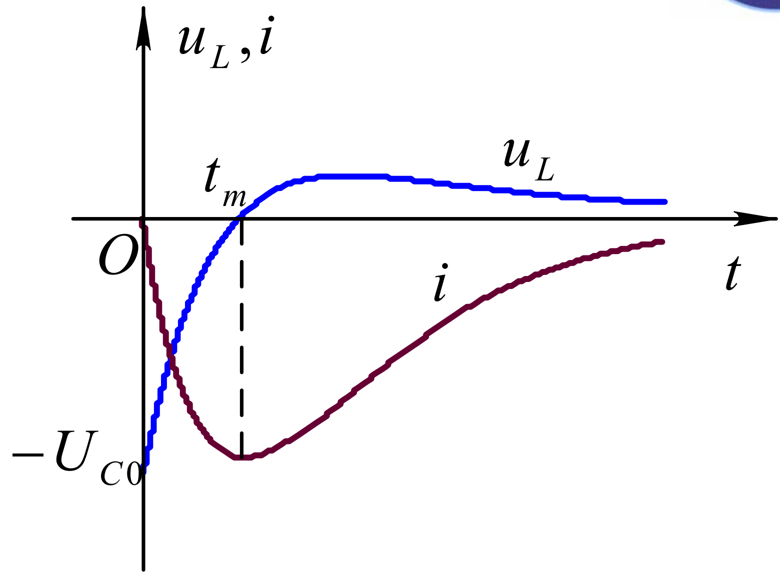
$$i = C\frac{du_C}{dt} = \frac{U_{C0}}{L(p_2 - p_1)}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \qquad (t > 0)$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = \frac{U_{C0}}{p_2 - p_1}(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}) \qquad (t > 0)$$



§ 10.9 二阶电路的暂态过程



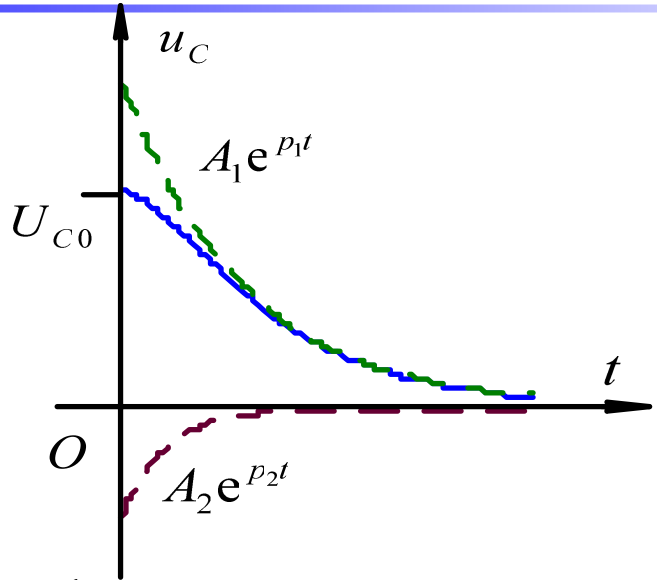


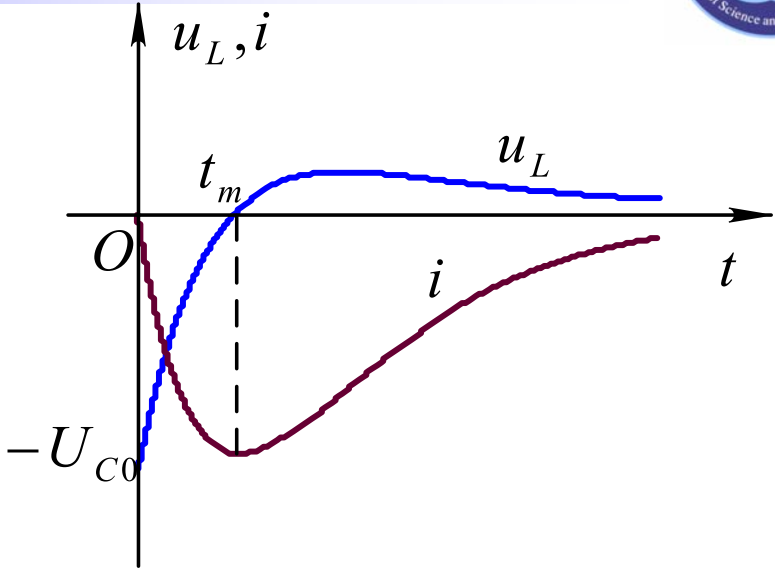
$$i = \frac{U_{C0}}{L(p_2 - p_1)}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$$

因为 $t=0_+$，$i=0$； $t=\infty$，$i=0$，即在放电过程中，始终有$i<0$，故i一定有一个极小值。设：$t=t_m$ 时i 最小。

令 $\frac{di}{dt} = 0$ 即 $p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t} = 0 \Longrightarrow t_m = \frac{1}{p_1 - p_2} \ln \frac{p_2}{p_1}$

§ 10.9 二阶电路的暂态过程





$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{U_{C0}}{p_2 - p_1}(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t})$$

$0 < t < t_m$　i 减小，$u_L < 0$

$t > t_m$　i 增加，$u_L > 0$

过程中必然有一个u_L=0的点

因此也可由 $u_L = 0$ 计算 t_m：

即　$p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t} = 0$　　得　$t_m = \dfrac{1}{p_1 - p_2}\ln\dfrac{p_2}{p_1}$

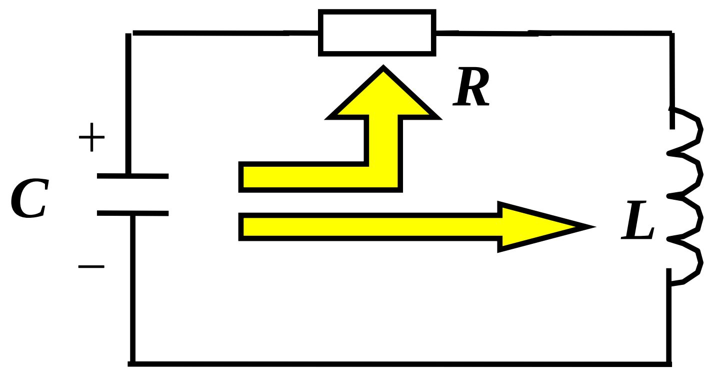
§ 10.9 二阶电路的暂态过程

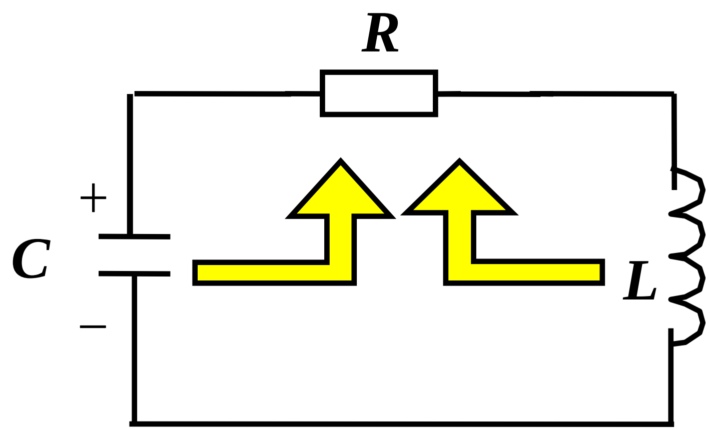
能量转换关系：

1) 整个过程中u_C曲线单调下降，电容一直释放储存的电能。因此称为非振荡放电过程，又称为过阻尼放电。

2) 电感在$0 < t < t_m$时，吸收能量，建立磁场；当$t > t_m$时电感释放能量，磁场逐渐衰减。

非振荡放电(过阻尼)：





$0 < t < t_m$　u_C减小，$|i|$增加　　　$t > t_m$　u_C减小，$|i|$减小

3) 整个过程完毕，u_C=0，i=0，u_L=0，电容的初始储能全部被电阻消耗。

§ 10.9 二阶电路的暂态过程

2 $\alpha < \omega_0$ ，即电路参数满足 $R < 2\sqrt{L/C}$

$$p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha + \mathrm{j}\omega_\mathrm{d}$$

$$p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha - \mathrm{j}\omega_\mathrm{d}$$

$\boldsymbol{p}_1$、$\boldsymbol{p}_2$共轭

$$\omega_\mathrm{d} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

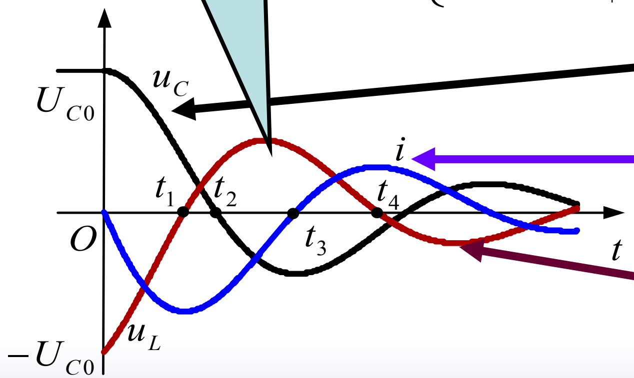
$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C = 0$$

通解

$$u_C = \mathrm{e}^{-\alpha t}(A_1 \sin\omega_\mathrm{d} t + A_2 \cos\omega_\mathrm{d} t) = A\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega_\mathrm{d} t + \theta)$$

$$\left\{\begin{array}{l} u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_{C0} \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+} = \dfrac{1}{C}i(0_+) = \dfrac{1}{C}i(0_-) = 0 \end{array}\right.$$

振荡(欠阻尼)过程



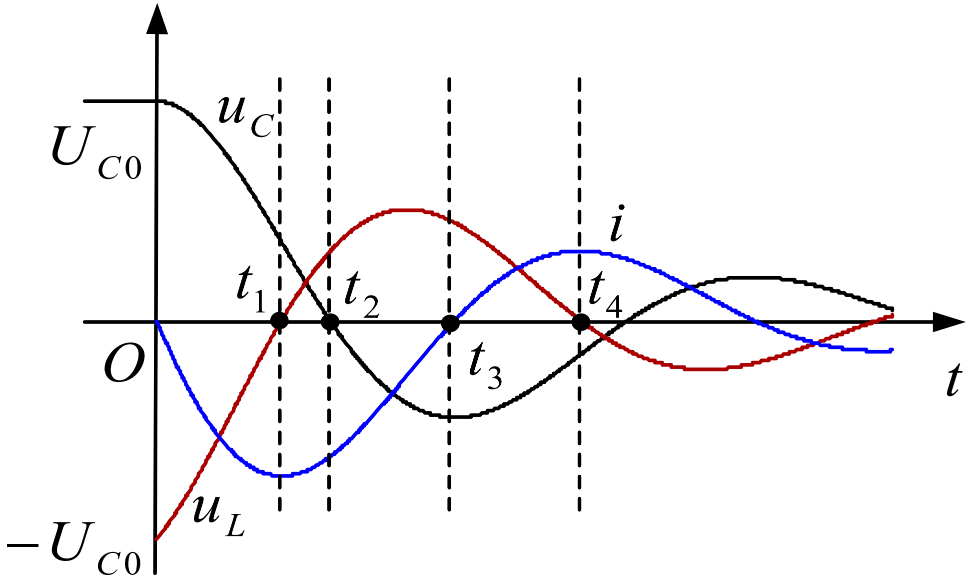
$$u_C = \frac{\omega_0}{\omega_\mathrm{d}}U_{C0}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega_\mathrm{d} t + \theta)$$

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\frac{U_{C0}}{\omega_\mathrm{d} L}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\omega_\mathrm{d} t$$

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega_0}{\omega_\mathrm{d}}U_{C0}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega_\mathrm{d} t - \theta)$$

§ 10.9 二阶电路的暂态过程

能量转换关系：



	$0<t<t_1$	$t_1<t<t_2$	$t_2<t<t_3$	$t_3<t<t_4$
电容*C*	释放	释放	吸收	释放
电感*L*	吸收	释放	释放	吸收
电阻*R*	消耗	消耗	消耗	消耗

§ 10.9 二阶电路的暂态过程

3 $\alpha = \omega_0$ ，即电路参数满足 $R = 2\sqrt{L/C}$

临界电阻

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = 0$$

p_1，p_2为相等负实根 $p_1 = p_2 = p = -\alpha$

通解为

$$u_C = (A_1 + A_2 t)e^{-\alpha t}$$

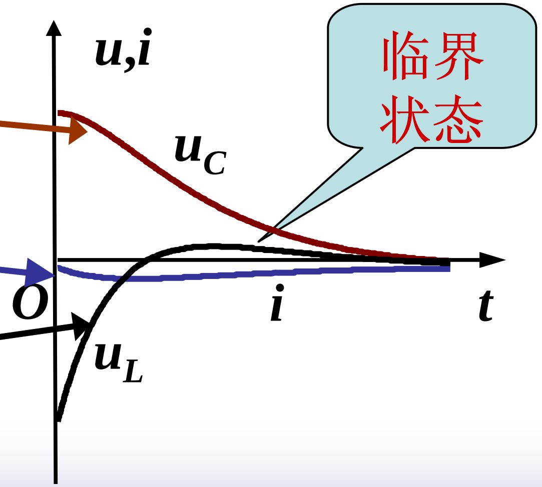
$$\begin{cases} u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_{C0} \\ \left.\dfrac{du_C}{dt}\right|_{t=0_+} = \dfrac{1}{C}i(0_+) = \dfrac{1}{C}i(0_-) = 0 \end{cases}$$

解得

$$u_C = U_{C0}(1+\alpha t)e^{-\alpha t}$$

$$i = C\frac{du_C}{dt} = -\alpha^2 C U_{C0} t e^{-\alpha t} = -\frac{U_{C0}}{L} t e^{-\alpha t}$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = U_{C0}(\alpha t - 1)e^{-\alpha t}$$



§ 10.9 二阶电路的暂态过程

二阶电路用三个参数 α，ω_0，和ω_d 来表示暂态响应。

$$p_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2} \qquad \omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$$

特征根	响应性质	自由分量形式
$p_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$ 不等负实根	非振荡（过阻尼）	$A_1e^{p_1t}+A_2e^{p_2t}$
$p_{1,2}=-\alpha\pm j\omega_d$ 共轭复根	衰减振荡（欠阻尼）	$Ae^{-\alpha t}\sin(\omega_d t+\theta)$
$p_{1,2}=\pm j\omega_0$ 共轭虚根	等幅振荡（无阻尼）	$A\sin(\omega_0 t+\frac{\pi}{2})$
$p_{1,2}=-\alpha$ 相等的负实根	非振荡（临界阻尼）	$(A_1+A_2t)e^{-\alpha t}$

§ 10.9 二阶电路的暂态过程

小结：

1. 电路是否振荡取决于特征根。特征根仅取决于电路的结构和参数，与初始条件的大小没有关系。

2. 经典法分析二阶电路的暂态过程步骤：

(1) 对换路后 (0_+) 电路列写微分方程

(2) 求特征根，由根的性质写出自由分量（积分常数待定）

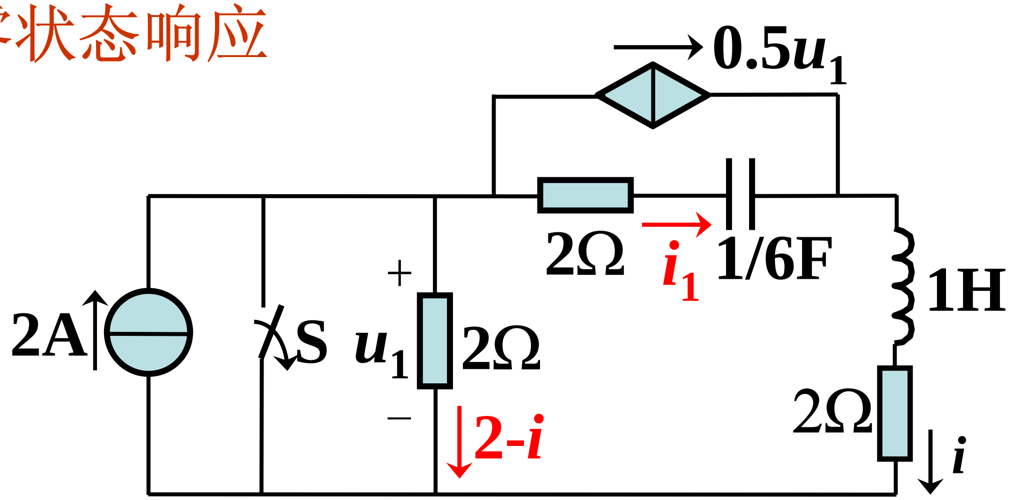
(3) 求强制分量（稳态分量）

(4) 全解=自由分量+强制分量

(5) 将初值 $f(0_+)$和 $f'(0_+)$代入全解，确定积分常数求响应

(6) 画出波形，讨论物理过程

零状态响应



求左图所示电路中电流 $i(t)$的零状态响应。

解：(1) 列写微分方程

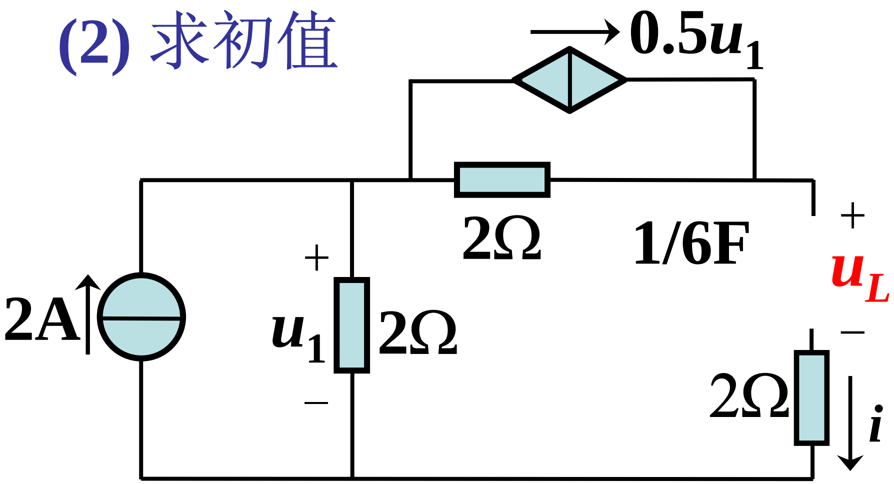
由KVL $\quad 2(2-i)=2i_1+6\int_{-\infty}^{t} i_1 \mathrm{d}\xi + 1\times\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+2i$

$$i_1 = i - 0.5\,u_1 \quad = i - 0.5\times 2\,(2-i) = 2i - 2$$

整理得 $\quad \frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}+8\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+12i=12 \quad$ 二阶非齐次常微分方程

§ 10.9 二阶电路的暂态过程

(2) 求初值



0^+电路模型：

$$\begin{cases} i(0^+) = i(0^-) = 0 \\ \left.\dfrac{di}{dt}\right|_{0^+} = \dfrac{1}{L} u_L(0^+) \end{cases}$$

$$u_1(0^+) = 2 \times 2 = 4\text{V}$$

$$u_L(0^+) = 0.5u_1(0^+) \times 2 + u_1(0^+)$$
$$= 8\text{V}$$

(3) 确定解的形式

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 8\frac{di}{dt} + 12i = 12$$

解的形式为：

$$i = i' + i''$$

通解i'：

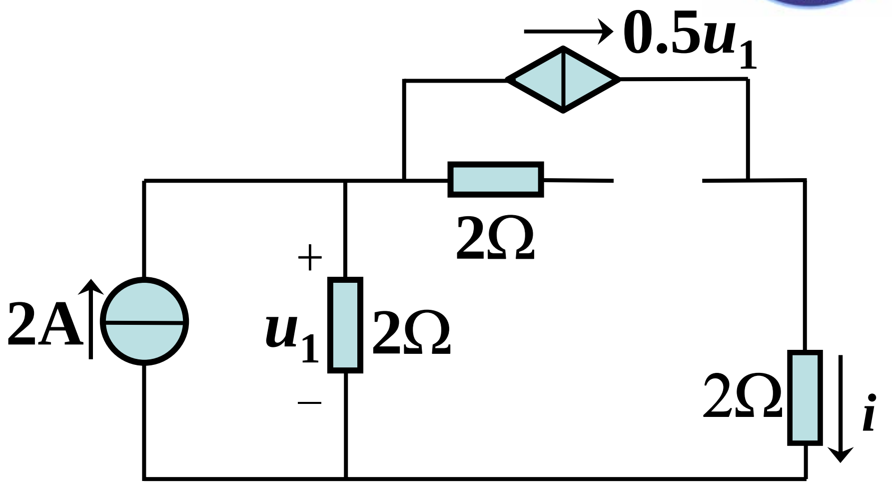
$$p^2+8p+12=0$$

$$p_1 = -2\ ,\quad p_2 = -6$$

$$i' = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-6t}$$

§ 10.9 二阶电路的暂态过程

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + 8\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + 12i = 12$$



稳态模型

特解i''：

$i(\infty) = 0.5\, u_1(\infty)$

$u_1(\infty)=2[2-0.5u_1(\infty)]$ ⇒ $u_1(\infty)=2\text{V}$, $i(\infty)=1\text{A}$

求特解 i''的另一种方法: $i''=1\text{A}$

全解为： $i(t) = 1 + A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-6t}$

(4) 定常数

$$\begin{cases} 0 = 1 + A_1 + A_2 \\ 8 = -2A_1 - 6A_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 0.5 \\ A_2 = -1.5 \end{cases}$$

$$\therefore\ i(t) = 1 + 0.5\mathrm{e}^{-2t} - 1.5\mathrm{e}^{-6t}\ \text{A} \quad (t \geq 0)$$

小结

动态电路的暂态过程分析是电路理论的重要内容，本章讨论线性动态电路暂态过程的时域分析。

首先介绍动态电路的暂态过程，建立时域分析法的基本思路；

然后重点介绍求解一阶电路的三要素法及其相关概念；

最后讨论二阶电路在不同条件下解的特点。