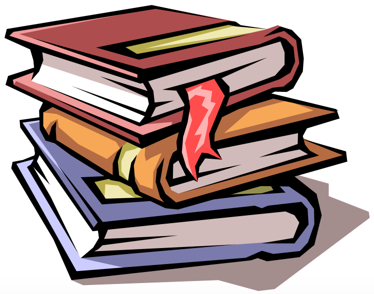
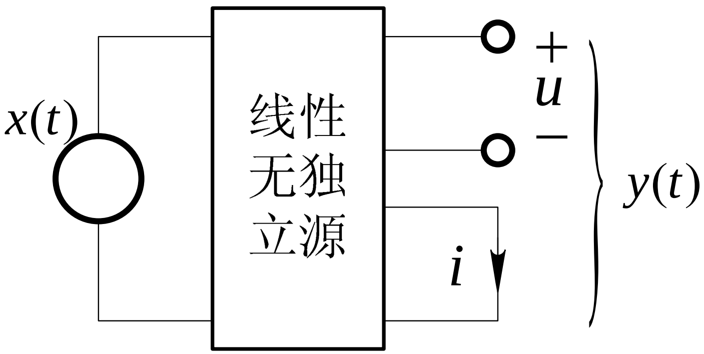
中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

第九章 频率特性和谐振现象

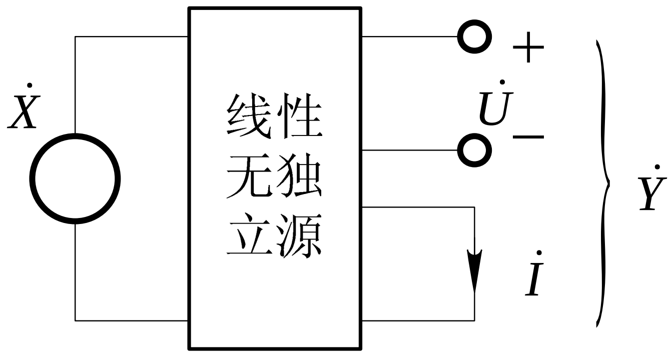
本章目录



§ 9.1 网络函数和频率特性



(a) 时域分析



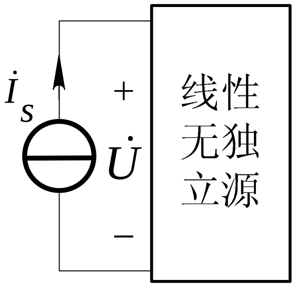
(b) 频域分析

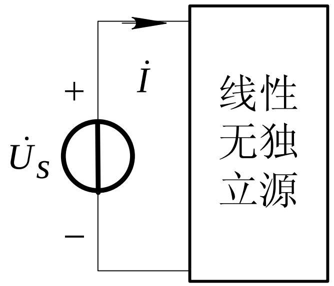
1 网络函数的定义: 电路在单一激励作用下，响应相量与激励相量之比称为网络函数，即

$$H(\mathrm{j}\omega) \overset{\text{def}}{=} \frac{\dot{Y}}{\dot{X}}$$

2 网络函数分类：

（1）激励和响应属于同一端口

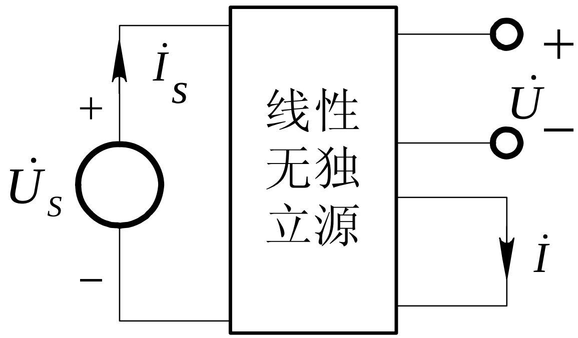




等效输入阻抗 $H(\mathrm{j}\omega)=\dot{U}/\dot{I}_S$

等效输入导纳 $H(\mathrm{j}\omega)=\dot{I}/\dot{U}_S$

（2）激励和响应属于不同端口



转移电流比 $H(\mathrm{j}\omega)=\dot{I}/\dot{I}_S$

转移阻抗 $H(\mathrm{j}\omega)=\dot{U}/\dot{I}_S$

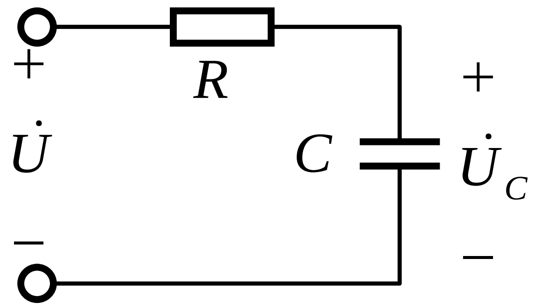
转移导纳 $H(\mathrm{j}\omega)=\dot{I}/\dot{U}_S$

转移电压比 $H(\mathrm{j}\omega)=\dot{U}/\dot{U}_S$

§ 9.1 网络函数和频率特性

在图示 ***RC*** 电路中，若以电容电压为响应，以输入电压为激励，其网络函数为：

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot{U}_C}{\dot{U}}=\frac{1/\mathrm{j}\omega C}{R+1/\mathrm{j}\omega C}=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega CR}$$



RC 串联电路

将 $\dot{U}_C$、$\dot{U}$ 和 $H(\mathrm{j}\omega)$ 都写成极坐标式，即

$$|H(\mathrm{j}\omega)|\angle\theta(\omega)=\frac{U_C\angle\psi_C}{U\angle\psi}=\frac{U_C}{U}\angle(\psi_C-\psi)$$

由此可得

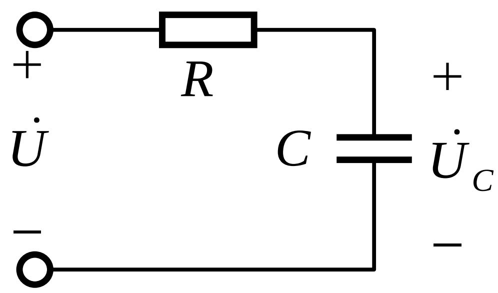
$$|H(\mathrm{j}\omega)|=U_C/U \xrightarrow{\text{网络函数的模}} \text{幅频特性}$$

$$\theta(\omega)=\psi_C-\psi \xrightarrow{\text{网络函数的辐角}} \text{相频特性}$$

幅频特性、相频特性 } 频率特性

§ 9.1 网络函数和频率特性

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot U_C}{\dot U}=\frac{1/\mathrm{j}\omega C}{R+1/\mathrm{j}\omega C}=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega CR}$$



RC串联电路

式中 ***RC*** 之积具有时间的量纲，其倒数具有频率的量纲，设

$$\omega_0=\frac{1}{RC}$$

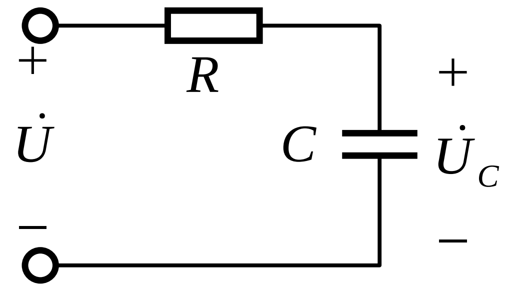
称其为 ***RC*** 电路的固有频率或自然频率**(natural frequency)**

代入网络函数表达式得

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega/\omega_0}=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}}\angle\left(-\arctan\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

§ 9.1 网络函数和频率特性

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega/\omega_0}=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}}\angle\left(-\arctan\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$



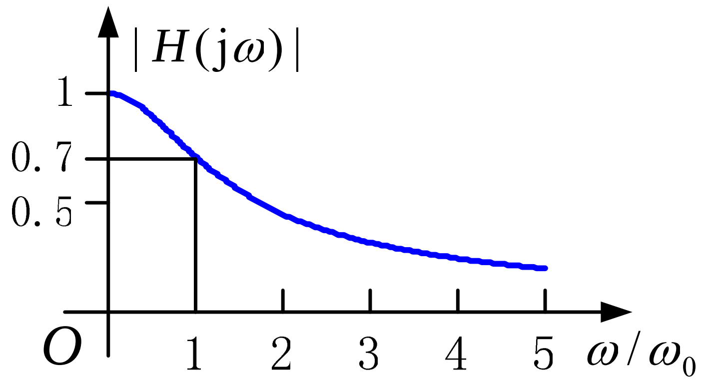
***RC*串联电路**

模和辐角与角频率的对应关系表

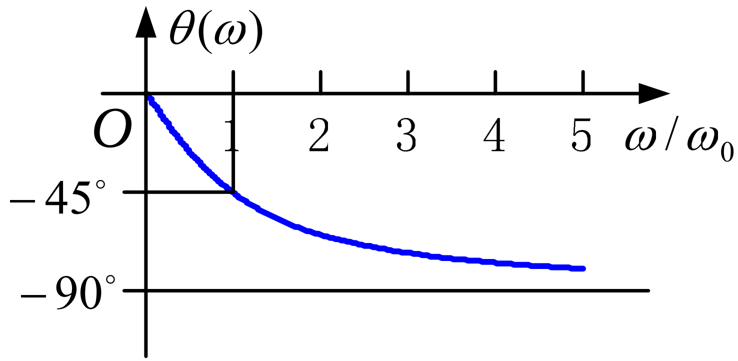
ω/ω_0	$\lvert H(\mathrm{j}\omega)\rvert$	$\theta(\omega)$
0	**1**	**0°**
1	$1/\sqrt{2}$	**-45°**
2	$1/\sqrt{5}$	**-63.43°**
…	…	…
∞	**0**	**-90°**

§ 9.1 网络函数和频率特性

幅频特性和相频特性曲线



(a) 幅频特性曲线



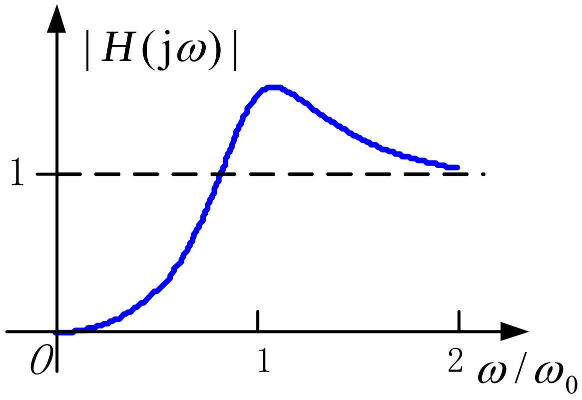
(b) 相频特性曲线

低通网络：网络允许低频信号顺利通过，而使高频信号产生较大衰减。

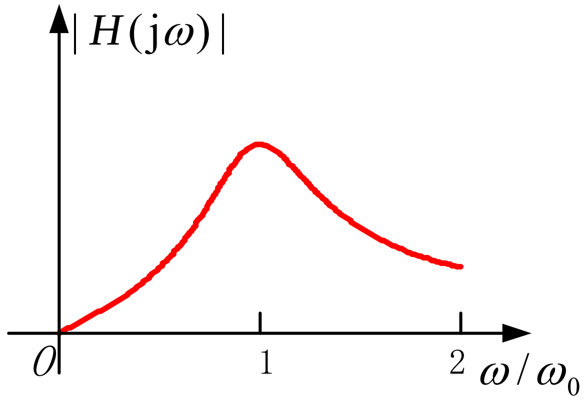
将网络函数的模下降到最大值的 $1/\sqrt{2}$ 时所对应的频率称为截止频率**(out-off frequency)**，记为 ω_c。

§ 9.1 网络函数和频率特性

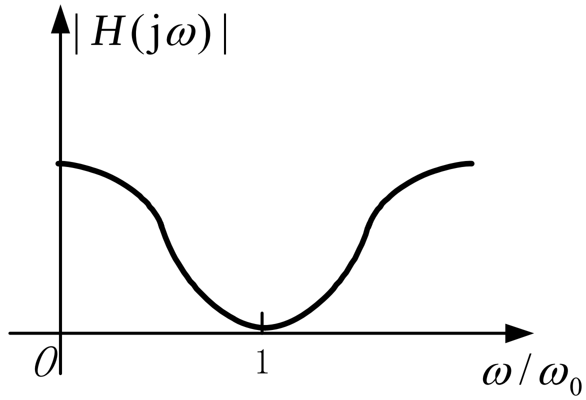
使用不同电路还可以实现具有下列特性的网络



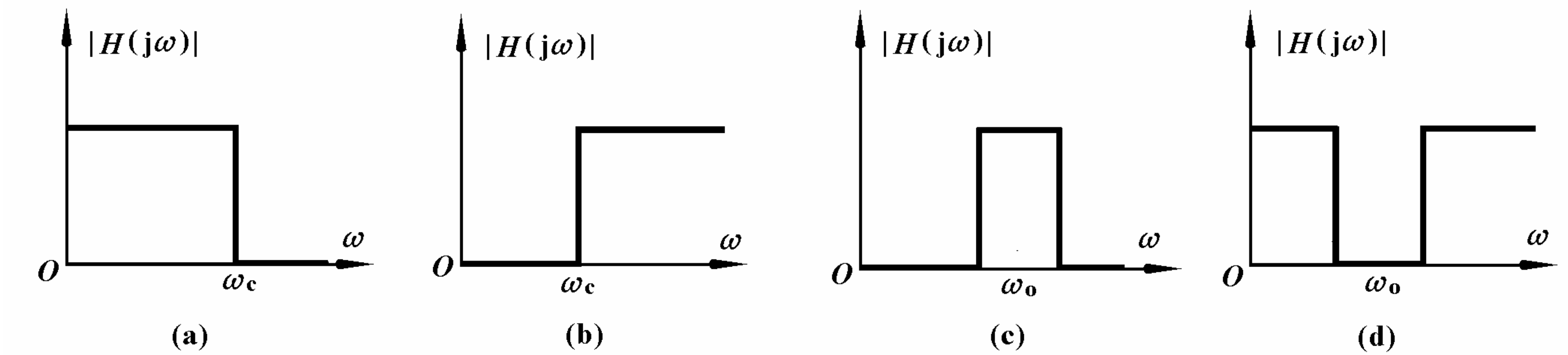
高通网络



带通网络



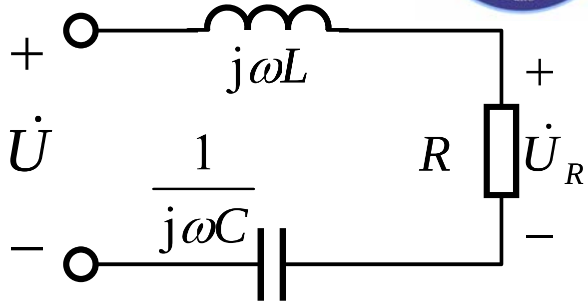
带阻网络



几种理想滤波器的特性

§ 9.2 RLC串联电路的频率特性

1 当以电阻电压 $\dot{U}_R$ 为响应时，其网络函数(即转移电压比为)



RLC串联电路

$$H_R(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot{U}_R}{\dot{U}}=\frac{R}{R+\mathrm{j}[\omega L-1/(\omega C)]}$$

当频率达到某一量值时有：$\omega_0 L=1/(\omega_0 C)$，即 $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$

称为***RLC***串联电路的**谐振角频率(resonance angular frequency)** 。

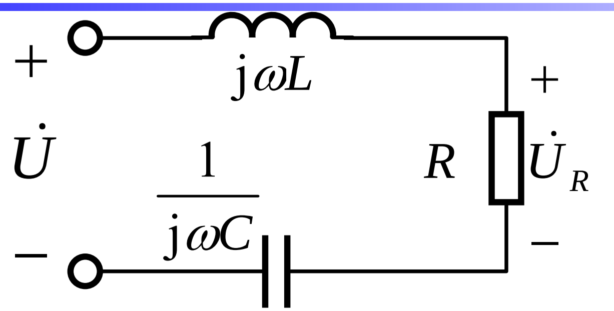
令 $\rho=\omega_0 L=1/\omega_0 C=\sqrt{\frac{L}{C}}$

称为***RLC***串联电路的**特性阻抗(characteristic impedance)**。

又令 $Q=\frac{\rho}{R}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ 　　进而有 $Q=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{1}{R\omega_0 C}$

称为***RLC***串联电路的**品质因数(quality factor)**。

§ 9.2 RLC串联电路的频率特性

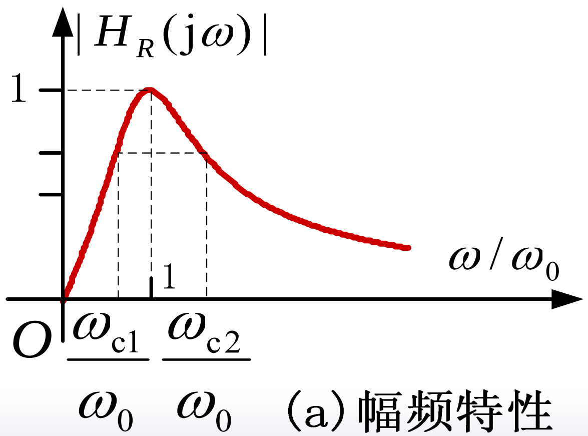


RLC串联电路

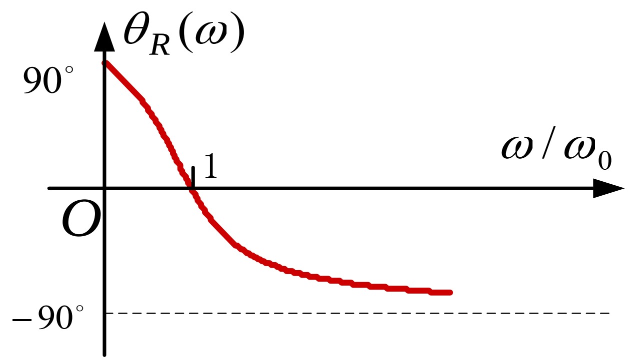
$$H_R(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot{U}_R}{\dot{U}}=\frac{R}{R+\mathrm{j}[\omega L-1/(\omega C)]}$$

将谐振角频率和品质因数引入上式，写出其幅频特性和相频特性：

$$|H_R(\mathrm{j}\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{R^2}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}\qquad \theta_R(\omega)=-\arctan Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)$$



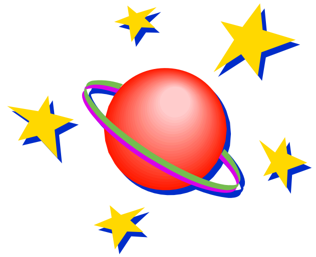
(a) 幅频特性



(b) 相频特性

§ 9.2 RLC串联电路的频率特性

求截止角频率： 令 $\dfrac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\dfrac{\omega_C}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega_C}\right)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$



由上式求得两个截止角频率：

$$\omega_{C1}=\omega_0\left(-\frac{1}{2Q}+\sqrt{\frac{1}{4Q^2}+1}\right)\qquad \omega_{C2}=\omega_0\left(\frac{1}{2Q}+\sqrt{\frac{1}{4Q^2}+1}\right)$$

通带宽度、谐振角频率和品质因数的关系：

$$\Delta\omega=\omega_{C2}-\omega_{C1}=\frac{\omega_0}{Q}$$

这说明带宽 $\Delta\omega$ 与品质因数 Q 成反比，Q 越大，$\Delta\omega$ 越小，通带越窄，曲线越尖锐，对信号的选择性越好。

§ 9.2 RLC串联电路的频率特性

例9.2　设计 ***RLC*** 带通滤波器电路，已知总电阻为***R***=20Ω，要求谐振频率为 f_0 =10⁴Hz，带宽为 Δf =10³Hz,，求电感***L***和电容***C***的值以及低频截止频率和高频截止频率。

解　　品质因数为　$Q=\dfrac{\omega_0}{\Delta\omega}=\dfrac{f_0}{\Delta f}=10$

进一步求得：

$$C=\frac{1}{QR\omega_0}=\frac{1}{10\times 20\Omega\times(2\pi\times 10^4)\mathrm{s}^{-1}}\approx 0.0796\mu\mathrm{F}\quad L=\frac{QR}{\omega_0}=\frac{10\times 20\Omega}{(2\pi\times 10^4)\mathrm{s}^{-1}}\approx 3.18\mathrm{mH}$$

由公式 $\omega_{c1}=\omega_0\left(-\dfrac{1}{2Q}+\sqrt{\dfrac{1}{4Q^2}+1}\right)$ 和 $\omega_{c2}=\omega_0\left(\dfrac{1}{2Q}+\sqrt{\dfrac{1}{4Q^2}+1}\right)$

最后求得低频和高频截止频率分别为

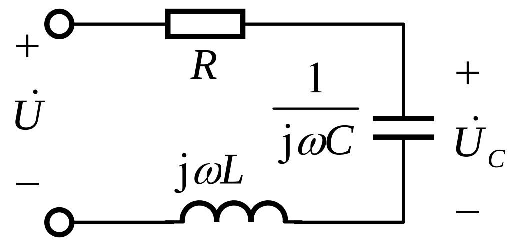
$$f_{c1}=f_0\left(-\frac{1}{2Q}+\sqrt{\frac{1}{4Q^2}+1}\right)\approx f_0\left(-\frac{1}{2Q}+1\right)=9500\mathrm{Hz}$$

$$f_{c2}=f_0\left(+\frac{1}{2Q}+\sqrt{\frac{1}{4Q^2}+1}\right)\approx f_0\left(+\frac{1}{2Q}+1\right)=10500\mathrm{Hz}$$

§ 9.2 RLC串联电路的频率特性

2 以电容电压u_C为响应，有

$$H_C(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot U_C}{\dot U}=\frac{1/(\mathrm{j}\omega C)}{R+\mathrm{j}\omega L+1/(\mathrm{j}\omega C)}$$



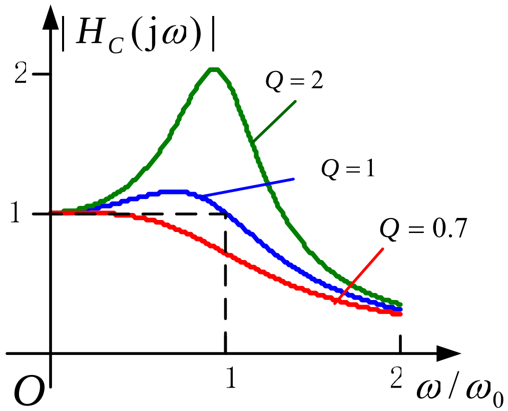
***RLC*串联电路**

幅频特性和相频特性分别为

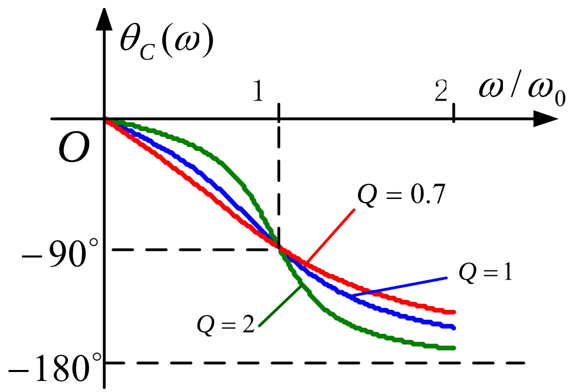
$$|H_C(\mathrm{j}\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2+\frac{1}{Q^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\theta_C(\omega)=-\arctan\frac{1}{Q(\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0})}$$

对应不同品质因数的频率特性曲线如图：



(a) 幅频特性

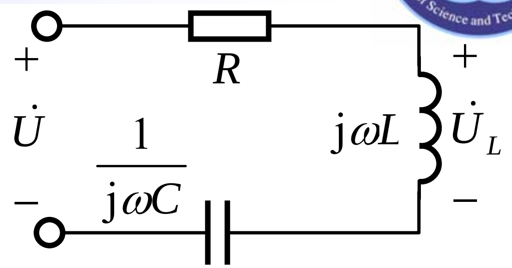


(b) 相频特性

§ 9.2 RLC串联电路的频率特性

3 以电感电压为响应，其转移电压比为：

$$H_L(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot{U}_L}{\dot{U}}=\frac{\mathrm{j}\omega L}{R+\mathrm{j}\omega L+1/(\mathrm{j}\omega C)}$$



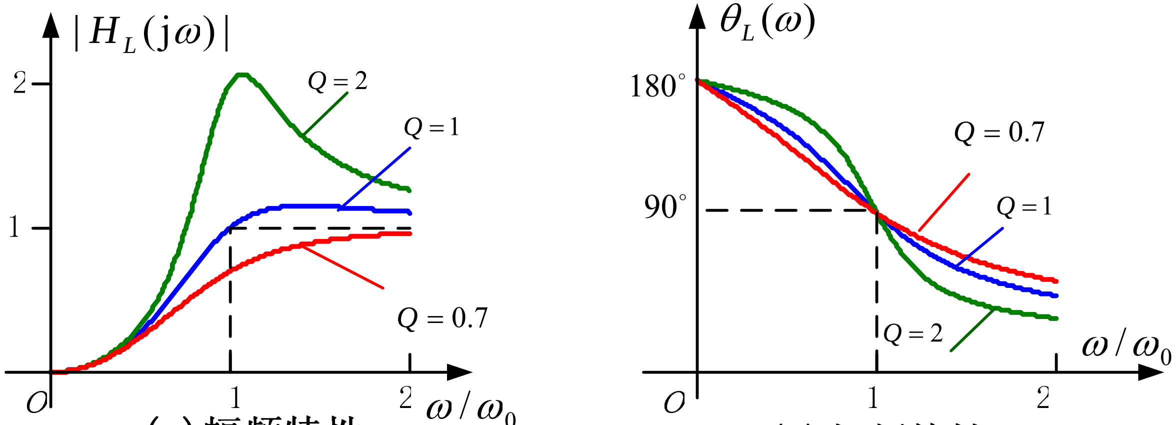
***RLC*串联电路**

则其幅频特性和相频特性分别为：

$$|H_L(\mathrm{j}\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]^2+\dfrac{1}{Q^2}\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

$$\theta_L(\omega)=-\arctan\frac{-1}{Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

对应不同品质因数的频率特性曲线如图：

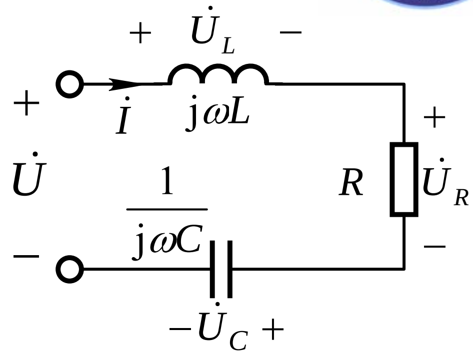


(a) 幅频特性　　(b) 相频特性

以电感电压为响应的网络函数频率特性曲线

§ 9.3 串联谐振电路

1 定义：对于含有电感和电容的一端口电路，如果在一定条件下呈现电阻性，即端口电压与电流同相位，则称此一端口电路发生**谐振**。



RLC 串联谐振电路

右图为***RLC*** 串联**谐振**电路。

根据谐振定义，***RLC*** 串联电路发生谐振的条件是：

$$\mathrm{Im}[Z] = \mathrm{Im}[R + \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C})] = 0 \quad 即 \quad \omega L = 1/(\omega C)$$

改变电源频率，或改变电感，或改变电容均可实现串联谐振。在给定电感和电容时，电路的谐振角频率为

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

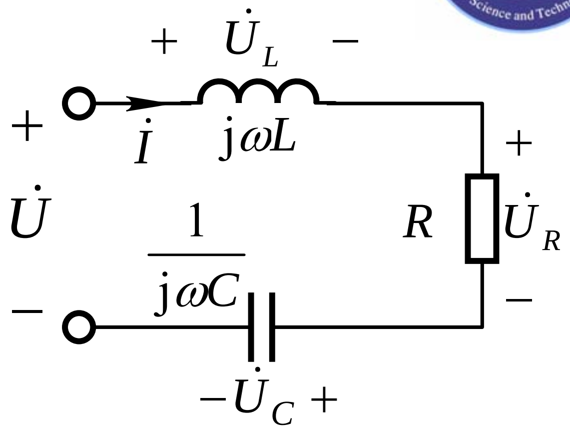
§ 9.3 串联谐振电路

RLC串联电路的电流、电感电压和电容电压分别为

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_R}{R} = H_R(\mathrm{j}\omega)\frac{\dot{U}}{R}$$

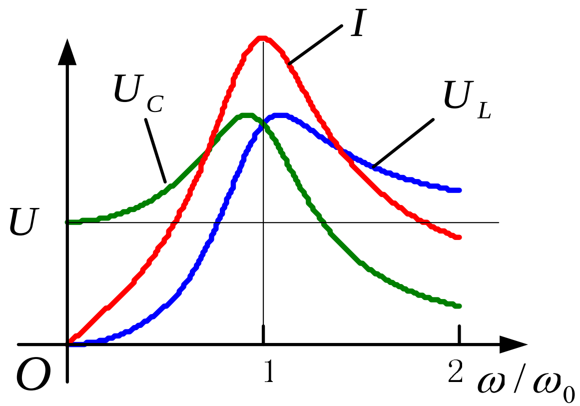
$$\dot{U}_C = H_C(\mathrm{j}\omega)\dot{U}$$

$$\dot{U}_L = H_L(\mathrm{j}\omega)\dot{U}$$

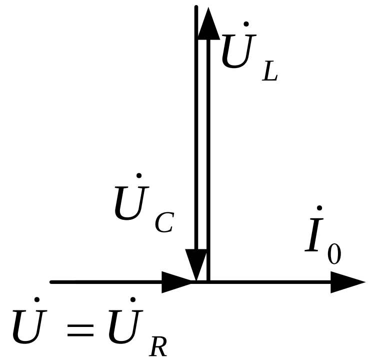


***RLC*串联谐振电路**

由上三式，可画出电流 I 和电压U_C、U_L随频率变动的曲线[下图(a)]，以及谐振时的相量图［下图(b)］（以电流为参考相量）



(a) 谐振曲线



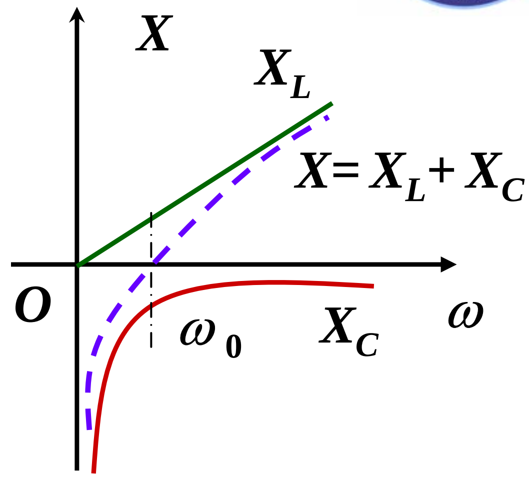
(b) 谐振时相量图

§ 9.3 串联谐振电路

2 串联谐振的特点

（1） 阻抗方面 $\omega_0 L = 1/(\omega_0 C)$

谐振时，感抗与容抗相抵消，串联电路呈电阻性。



电抗频率特性曲线

（2） 电流方面

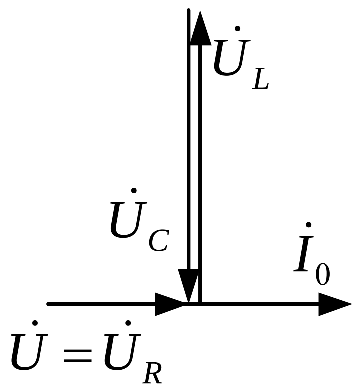
此时串联电路电流为：$\dot{I}_0 = \dfrac{\dot{U}}{R}$ 达到最大值。

（3） 电压方面 $\dot{U}_L = \mathrm{j}\omega_0 L \dot{I}_0$ $\dot{U}_C = -\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega_0 C}\dot{I}_0$

特性阻抗和品质因数为

$$\rho = \omega_0 L = 1/(\omega_0 C) \qquad Q = \rho / R$$

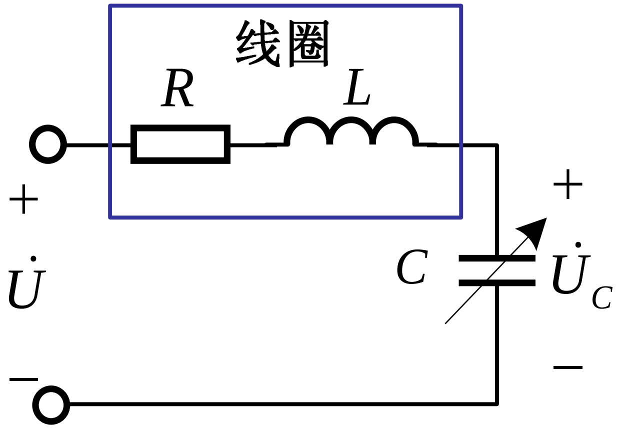
代入上式得 $U_L = U_C = \rho I_0 = \rho \dfrac{U}{R} = QU$



串联谐振相量图

§ 9.3 串联谐振电路

例9.3 一个线圈与电容相串联，线圈电阻R=16.2Ω，电感L=0.26mH ，当把电容调节到100pF时发生串联谐振。(1)求谐振频率和品质因数；(2)设外加电压为10μV，其频率等于电路的谐振频率，求电路中的电流和电容电压；(3)若外加电压仍为10μV ，但其频率比谐振频率高10%，再求电容电压。



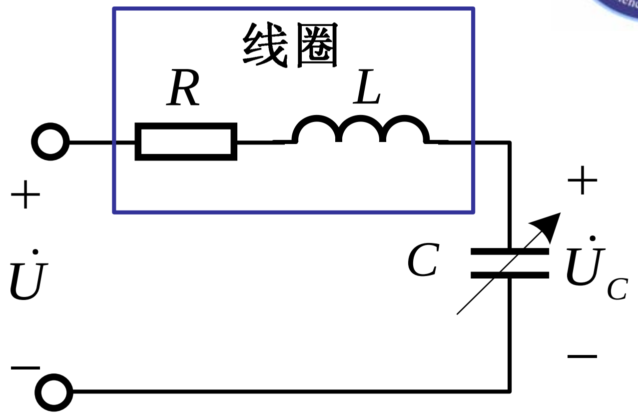
线圈与电容串联电路

解 (1)谐振频率和品质因数分别为

$$f_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{0.26\times10^{-3}\,\mathrm{H}\times100\times10^{-12}\,\mathrm{F}}}=987\times10^{3}\,\mathrm{Hz}$$

$$Q=\frac{\omega_0L}{R}=\frac{2\pi f_0L}{R}=\frac{2\pi\times987\times10^{3}\,\mathrm{s}^{-1}\times0.26\times10^{-3}\,\mathrm{H}}{16.2\Omega}=99.5$$

§ 9.3 串联谐振电路



线圈与电容串联电路

(2) 谐振时的电流和电容电压为

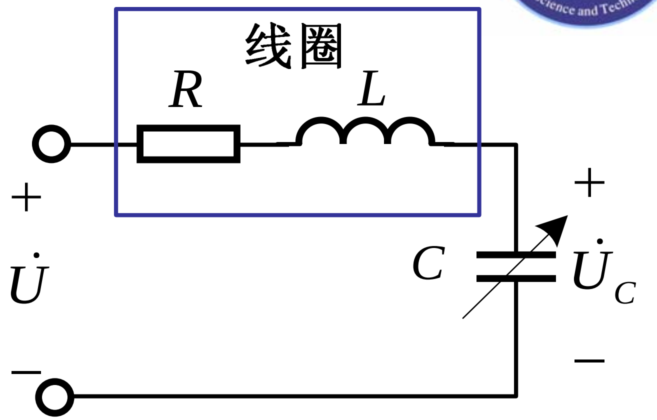
$$I_0 = \frac{U}{R} = \frac{10\times10^{-6}\,\mathrm{V}}{16.2\Omega} = 0.617\mu\mathrm{A}$$

$$X_C = -\frac{1}{\omega_0 C} = -\frac{1}{(2\pi\times987\times10^3)\mathrm{s}^{-1}\times100\times10^{-12}\,\mathrm{F}} = -1610\Omega$$

$$U_C = |X_C| I_0 = 1610\Omega\times0.617\times10^{-6}\,\mathrm{A} = 0.995\mathrm{mV}$$

U_C也可用下式直接得到

$$U_C = QU = 99.5\times10\times10^{-6}\,\mathrm{V} = 0.995\,\mathrm{mV}$$



线圈与电容串联电路

(3) 电源频率比电路谐振频率高**10%**的情形

$$f' = (1+0.1)f_0 = 1.1\times 987\times 10^3\,\text{Hz} = 1090\times 10^3\,\text{Hz}$$

$$X_L' = \omega' L = (2\pi\times 1090\times 10^3)\text{s}^{-1}\times 0.26\times 10^{-3}\,\text{H} = 1780\Omega$$

$$X_C' = -\frac{1}{\omega' C} = -\frac{1}{(2\pi\times 1090\times 10^3)\text{s}^{-1}\times 100\times 10^{-12}\,\text{F}} = -1460\Omega$$

$$|Z'| = \sqrt{R^2+(X_L'+X_C')^2} = \sqrt{(16.2)^2+(1780-1460)^2}\,\Omega = 320\Omega$$

$$U_C' = \frac{U}{|Z'|}\times|X_C'| = \frac{10\times 10^{-6}\,\text{V}}{320\Omega}\times 1460\Omega = 0.046\text{mV}$$

§ 9.4 并联谐振电路

1 *GCL*并联谐振电路

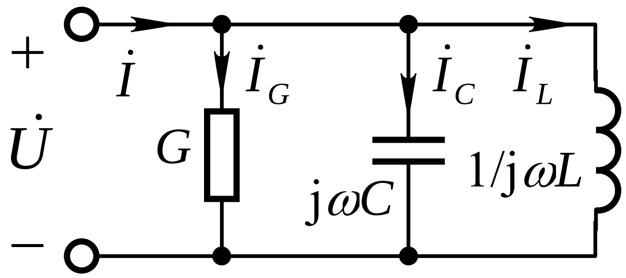
GCL并联电路的导纳为：

$$Y = G + \mathrm{j}(\omega C - 1/\omega L) = G + \mathrm{j}B$$

实现谐振的条件是导纳的虚部为零，

$$\omega C - 1/\omega L = 0$$

谐振角频率为 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$



GCL并联谐振电路

并联谐振的特点

谐振时导纳达到最小值，即 $|Y| = G$

在总电流有效值一定的条件下，并联电压达到最大

$$\dot{U}_0 = \dot{I}/Y = \dot{I}/G$$

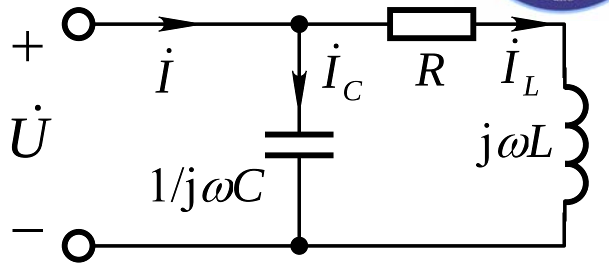
在电感和电容中产生较大电流(但不是最大)

$$\dot{I}_L = \dot{U}_0/(\mathrm{j}\omega_0 L) = -\mathrm{j}\dot{I}/(\omega_0 LG)$$

$$\dot{I}_C = \mathrm{j}\omega_0 C\dot{U}_0 = \mathrm{j}\omega_0 C\dot{I}/G$$

§ 9.4 并联谐振电路

2 电感线圈和电容器构成并联谐振电路，即***RL***与***C***并联谐振电路。



线圈与电容并联谐振

电路模型如右图，等效导纳为

$$Y=\frac{1}{R+\mathrm{j}\omega L}+\mathrm{j}\omega C=\frac{R}{R^2+(\omega L)^2}+\mathrm{j}[\omega C-\frac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2}]$$

产生谐振的条件是导纳的虚部为零。因此谐振时电容为

$$C_0=\frac{L}{R^2+(\omega L)^2}$$

当改变频率时，可得谐振角频率：

$$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{L^2}}$$ （当 $R<\sqrt{L/C}$ 时存在）

若改变电感，可得谐振时电感为：

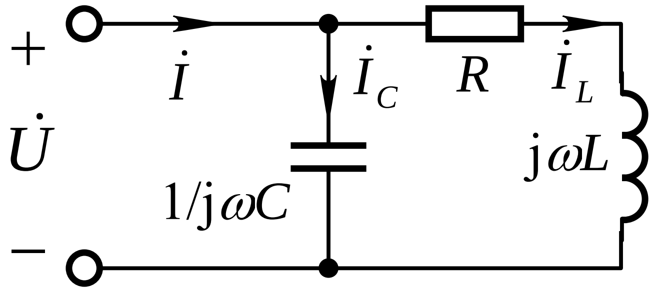
$$L_0=\frac{1\pm\sqrt{1-4\omega^2C^2R^2}}{2\omega^2C}$$ （当$\boldsymbol{R<1/2\omega C}$ 时存在）

§ 9.4 并联谐振电路

RL 与 *C* 并联谐振的特点

谐振时其等效阻抗为一个电阻，记为

$$R_0 = \frac{R^2 + (\omega_0 L)^2}{R}$$

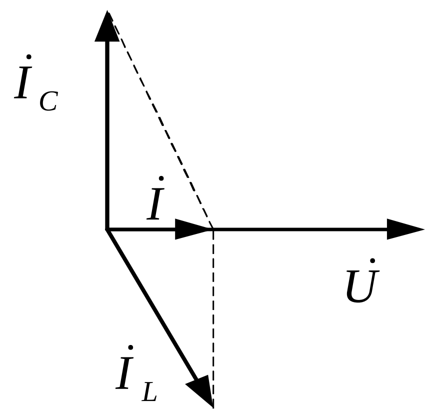


线圈与电容并联谐振

将谐振角频率代入上式得：

$$R_0 = R + \frac{L^2}{R}\left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}\right) = \frac{L}{RC}$$

如果线圈与电容相并联的电路用一定的电流源来激励，在谐振时由于阻抗接近于最大值，电压*U*也接近于最大值，这时在线圈和电容中产生的电流可能比电源电流大得多。



谐振时电压电流相量图

小结

通过正弦电流电路和非正弦周期电流电路的学习得知，感抗和容抗分别与频率成正比和反比关系。由此得知电路特性与电源频率密切相关。本章专门研究电路特性与频率的关系。包括网络函数及其频率特性的概念及一般分析方法、典型电路的频率特性、串联谐振与并联谐振的条件及特点、滤波的概念等。