



中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

# 第6章 正弦电流电路





## 本章目录

1 正弦电流

2 正弦量的相量表示法

3 基尔霍夫定律的相量形式

4 RLC元件上电压与电流的相量关系

5 RLC串联电路的阻抗

6 GCL并联电路的导纳

7 正弦电流电路的相量分析法

8 含互感元件的正弦电流电路

9 正弦电流电路的功率

10 复功率

11 最大功率传输定理

## § 6.1 正弦电流



### 1 正弦量

随时间按正弦规律变动的电路变量。

随时间按正弦规律变动的电流称为**正弦电流**。

正弦电流的瞬时值表达式： $i = I_m \cos(\omega t + \psi_i)$

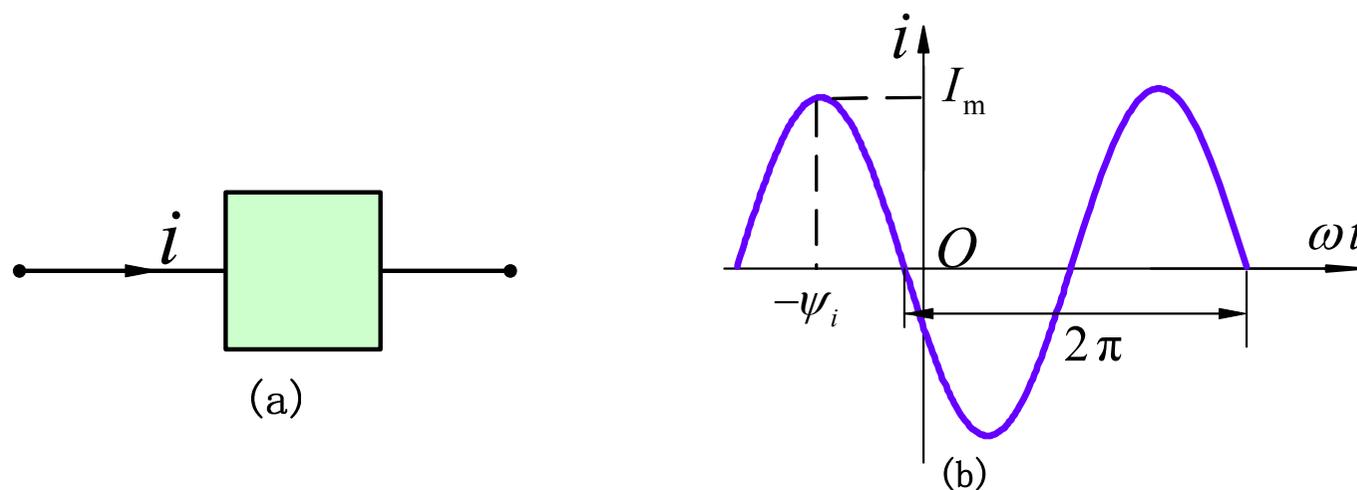


图6.1 经过某支路的正弦电流、波形



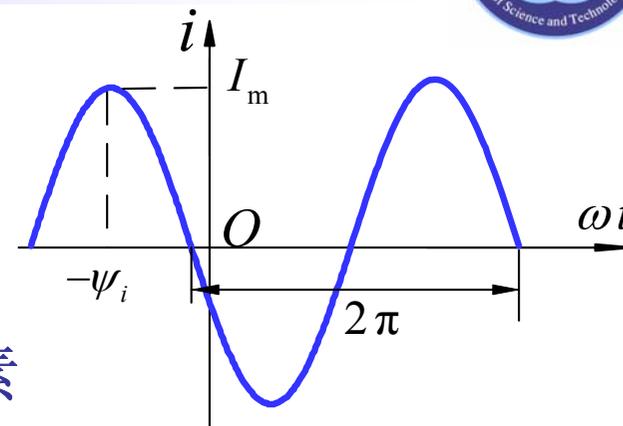
## § 6.1 正弦电流

### 2 正弦电流的三要素

正弦电流的瞬时值表达式:

$$i = I_m \cos(\omega t + \psi_i)$$

$I_m$ ,  $\omega$ ,  $\psi_i$  称为正弦电流的三要素



(1) 振幅或幅值  $I_m$ : 正弦电流的最大值, 恒为正。

(2) 初相  $\psi_i$

( $\omega t + \psi_i$ ) 为正弦电流的相位, 正弦电流在  $t = 0$  时刻的相位, 称为正弦量的初相。即  $(\omega t + \psi_i)|_{t=0} = \psi_i$ , 一般  $|\psi_i| \leq 180^\circ$

(3) 角频率  $\omega$ : 单位时间内相位变动的角度  $\frac{d(\omega t + \psi_i)}{dt}$

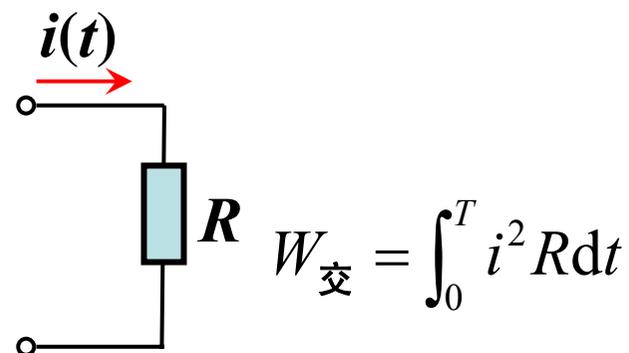
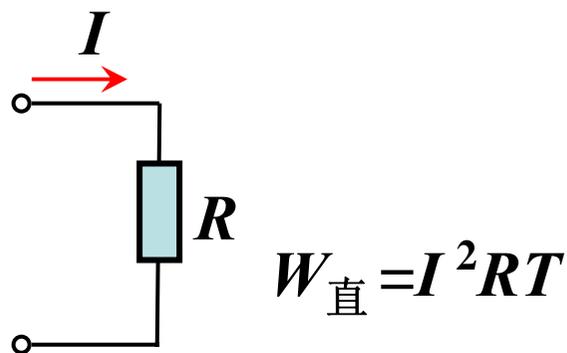
角频率的单位为  $rad/s$ 。它与正弦量的周期  $T$  和频率  $f$  之间的关系为:  $\omega T = 2\pi$ ,  $\omega = 2\pi f$ ,  $f = 1/T$



## § 6.1 正弦电流

### 3 正弦电流的有效值

当周期电流  $i = f(t)$  和直流  $I$  分别通过相同的电阻  $R$ ，若二者做功的平均效果相同，则将此直流  $I$  的量值规定为周期电流  $i$  的有效值，用  $I$  表示。



若  $W_{\text{直}} = W_{\text{交}}$ ，则  $I$  为周期电流有效值

$$I^2 RT = \int_0^T i^2 R dt \quad I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$



## § 6.1 正弦电流

有效值是瞬时值的平方在一个周期内的平均值再开方：

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (6.3)$$

有效值也称**方均根值(RMS)**。

将 $i = I_m \cos(\omega t + \psi_i)$ 代入，得有效值与最大值间的关系

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2(\omega t + \psi_i) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \frac{1 + \cos[2(\omega t + \psi_i)]}{2} dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{I_m^2}{2} dt} = \sqrt{\frac{1}{2} I_m^2} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

正弦电流瞬时值另一种表达式： $i = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \psi_i)$



## § 6.1 正弦电流

### 4 同频率正弦量的相位差

设两个同频率正弦量  $u$  和  $i$  分别为：

$$u = U_m \cos(\omega t + \psi_u) \quad i = I_m \cos(\omega t + \psi_i)$$

$$\text{相位差 } (\omega t + \psi_u) - (\omega t + \psi_i) = \psi_u - \psi_i = \psi_\Delta \quad (6.5)$$

同频率正弦量间的相位差为初相之差。



## § 6.1 正弦电流

(1) 若  $\psi_u - \psi_i = 0$  则称电压、电流为同相。如图 (6.3a) 所示:

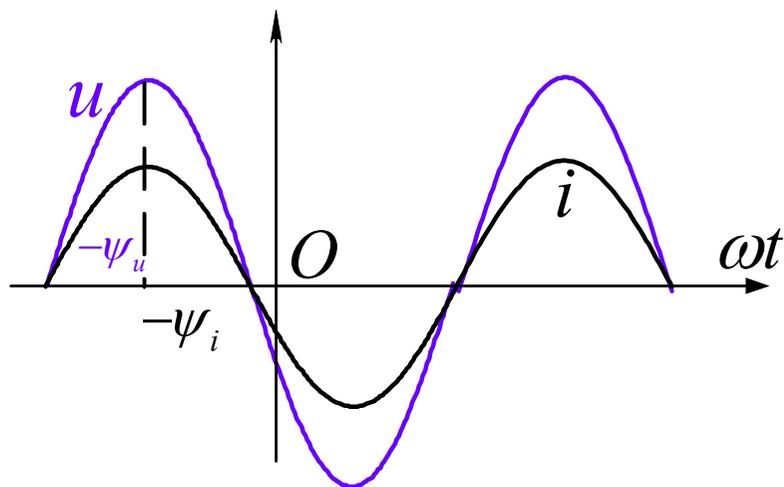


图6.3a  $u$ 与 $i$ 同相

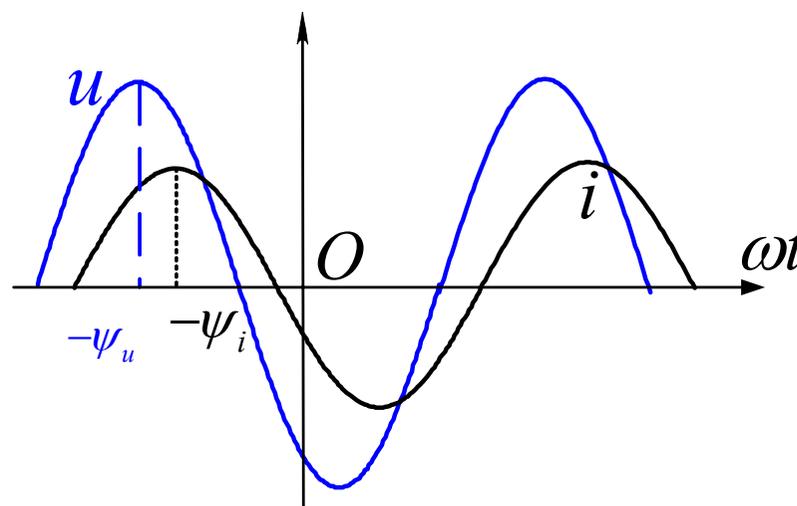


图6.3b  $u$ 越前于 $i$

(2)  $\psi_\Delta > 0$  , 则称  $u$  越前  $i$  于  $\psi_\Delta$  , 即  $u$  比  $i$  先达到最大值或先达到零值。如图6.3b所示

(3)  $\psi_\Delta < 0$  , 则称  $u$  滞后  $i$  于  $\psi_\Delta$

越前或滞后的相角通常以 $180^\circ$  为限。



## § 6.1 正弦电流

(4) 若两个正弦量的相差为 $90^\circ$ ，则称它们相位正交，如图6.3c所示：

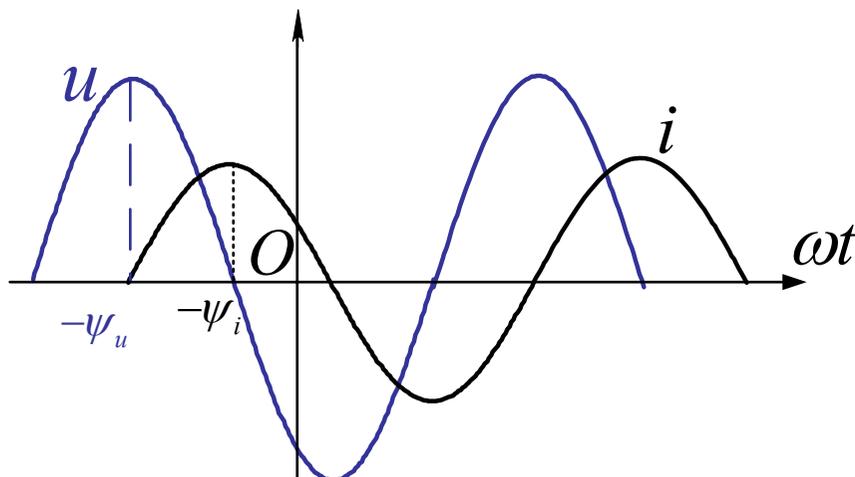


图6.3c  $u$ 与 $i$  正交

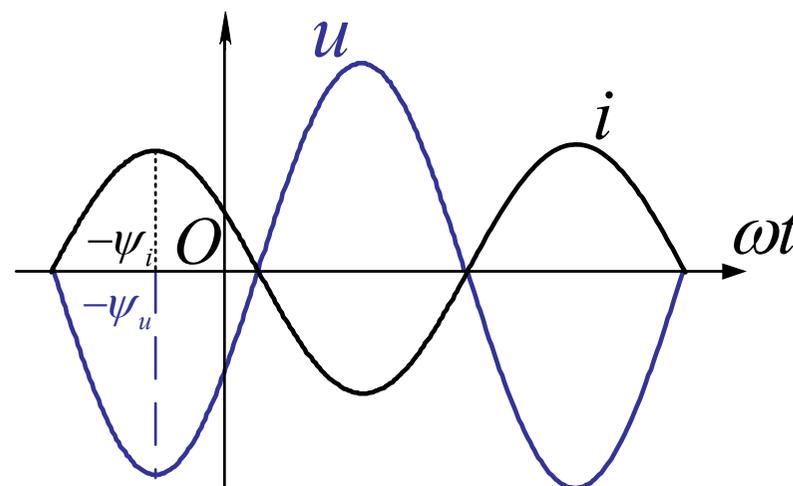
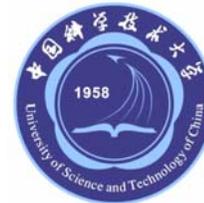


图6.3d  $u$ 与 $i$  反相

(5) 若两个正弦量的相差为 $180^\circ$ ，则称为相位相反。如图6.3d所示：



## § 6.1 正弦电流

5 参考正弦量：初相为零的正弦量称为参考正弦量。

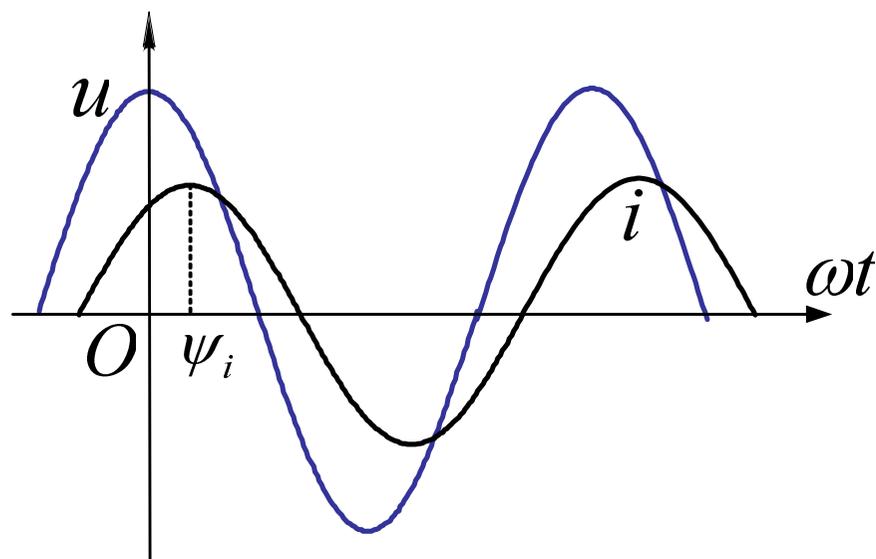


图6.4  $u$ 为参考正弦量的波形

电压  $u$  通过最大值的瞬间  
作为时间坐标原点 ( $t=0$ ), 此  
时  $\psi_u=0$ , 正弦电压记为

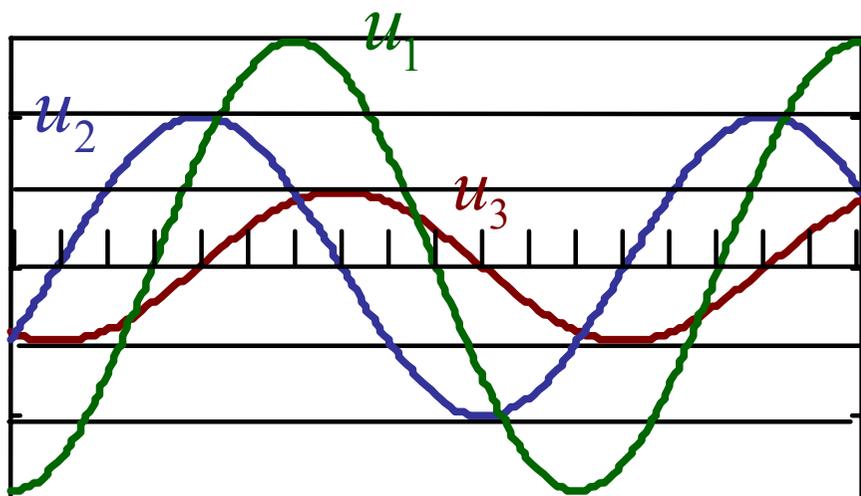
$$u = U_m \cos \omega t$$

一旦把某一正弦量选作参考正弦量，其它同频率的正弦量的初相也就相应被确定。



## § 6.1 正弦电流

例6.1 示波器显示三个工频正弦电压的波形如图所示，已知图中纵坐标每格表示5V。试写出各电压的瞬时表达式。



图题6.1 示波器上显示的三个正弦波

**解** 设 $u_1$ 、 $u_2$ 和 $u_3$ 依次表示图中振幅最大、中等和最小的电压，其幅值分别为15V、10V和5V。

取 $u_1$ 为参考正弦量，即

$$u_1 = 15 \cos(\omega t) \text{ V}$$

由图可见 $u_2$ 比 $u_1$ 超前 $60^\circ$ ， $u_3$ 比 $u_1$ 滞后 $30^\circ$ ，于是得

$$u_2 = 10 \cos(\omega t + 60^\circ) \text{ V}$$

$$u_3 = 5 \cos(\omega t - 30^\circ) \text{ V}$$



## § 6.2 正弦量的相量表示法

含有电感或电容的正弦电路中，在时域内对电路进行分析，需要建立含微积分的电路方程，分析过程如图6.5所示。

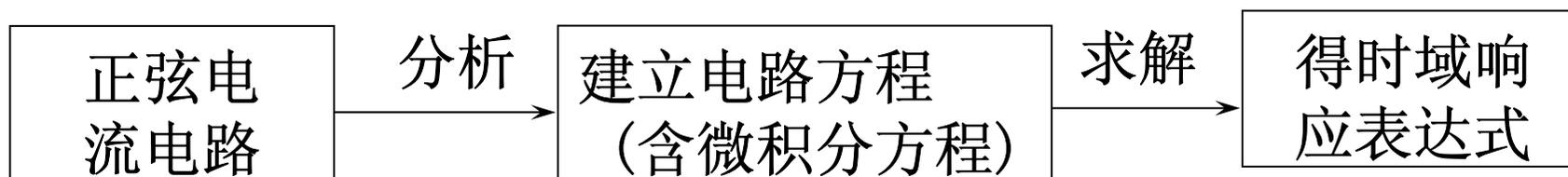


图6.5 时域分析过程示意图

**思考：**能否用一种简单的数学变换方法以避免繁琐的运算？

相量法是正弦电流电路分析的一种简便有效的方法。  
应用相量法，需要用到复数的运算。

## § 6.2 正弦量的相量表示法



### 1 复数

#### (1) 复数的表示形式

1) 直角坐标式  $F = a + jb$  ( $j = \sqrt{-1}$ )

实部  $\text{Re}[F] = a$       虚部  $\text{Im}[F] = b$

2) 极坐标式  $F = |F| e^{j\theta} = |F| \angle \theta$

$|F|$ : 复数的模;  $\theta$ : 复数的辐角,  $\theta = \arg F$

直角坐标式与极坐标式的转换:

$$|F| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \theta = \arctan(b/a)$$

$$a = |F| \cos \theta \quad b = |F| \sin \theta$$



## § 6.2 正弦量的相量表示法



### 3) 用复平面上的点或有向线段表示

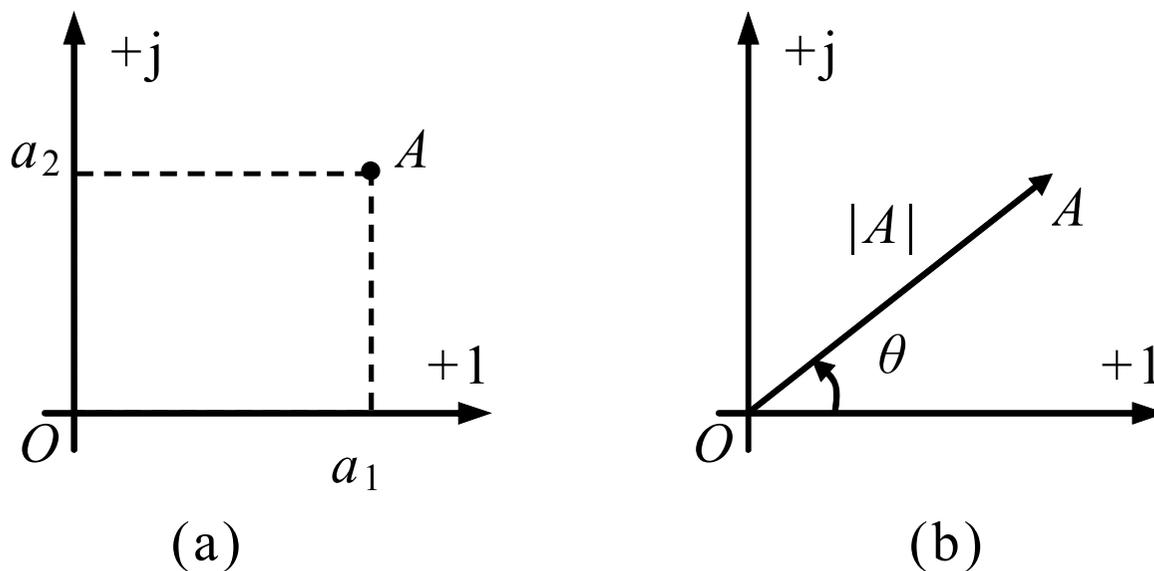


图 6.5 用复平面上的点或有向线段表示复数



## § 6.2 正弦量的相量表示法

### (2) 复数的运算

#### 1) 加减运算

$$\text{设 } F_1 = a_1 + jb_1 = |F_1| \angle \theta_1, \quad F_2 = a_2 + jb_2 = |F_2| \angle \theta_2$$

$$F_1 \pm F_2 = (a_1 + jb_1) \pm (a_2 + jb_2) = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$$

复数的加减运算必须采用直角坐标式。

#### 2) 乘除运算

##### a) 乘法运算

$$\text{直角坐标式: } F_1 F_2 = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

$$\text{极坐标式: } F_1 F_2 = |F_1| \angle \theta_1 |F_2| \angle \theta_2 = |F_1| |F_2| \angle (\theta_1 + \theta_2)$$

复数乘积的模等于各复数模的积；辐角等于各复数辐角的和。



## § 6.2 正弦量的相量表示法

### b) 除法运算

直角坐标式:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + j(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

极坐标式:  $\frac{F_1}{F_2} = \frac{|F_1| \angle \theta_1}{|F_2| \angle \theta_2} = \frac{|F_1|}{|F_2|} \angle (\theta_1 - \theta_2)$

### 3) 相等运算

两个复数相等必须满足两个条件: 复数的实部、虚部分别对应相等; 或者复数的模和辐角分别对应相等。即若  $F_1 = F_2$

则必须有  $\text{Re}[F_1] = \text{Re}[F_2]$ ,  $\text{Im}[F_1] = \text{Im}[F_2]$

或必须有  $|F_1| = |F_2|$ ,  $\arg(F_1) = \arg(F_2)$



## § 6.2 正弦量的相量表示法

### 2 正弦量的相量表示:

• 正弦量一般表达式为:  $f(t) = A_m \cos(\omega t + \psi)$  (6.9)

设一复数函数为  $A_m e^{j(\omega t + \psi)}$  根据欧拉公式得

$$A_m e^{j(\omega t + \psi)} = A_m \cos(\omega t + \psi) + jA_m \sin(\omega t + \psi) \quad (6.14)$$

比较式 (6.9)、(6.14) 得

$$f(t) = A_m \cos(\omega t + \psi) = \operatorname{Re}[A_m e^{j(\omega t + \psi)}] = \operatorname{Re}[A_m e^{j\psi} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\dot{A}_m e^{j\omega t}]$$

其中  $\dot{A}_m = A_m e^{j\psi} = A_m \angle \psi$

最大值相量

正弦量振幅

正弦量初相

注: 相量是复值常量, 而正弦量是时间的余弦函数, 相量只是代表正弦量, 而不等于正弦量。



## § 6.2 正弦量的相量表示法

$$A_m e^{j(\omega t + \psi)} = \dot{A}_m e^{j\omega t}$$

$A_m e^{j(\omega t + \psi)}$ : 旋转相量,  $e^{j\omega t}$ : 旋转因子

几何意义: 正弦量的瞬时值等于其对应的旋转相量在实轴上的投影。

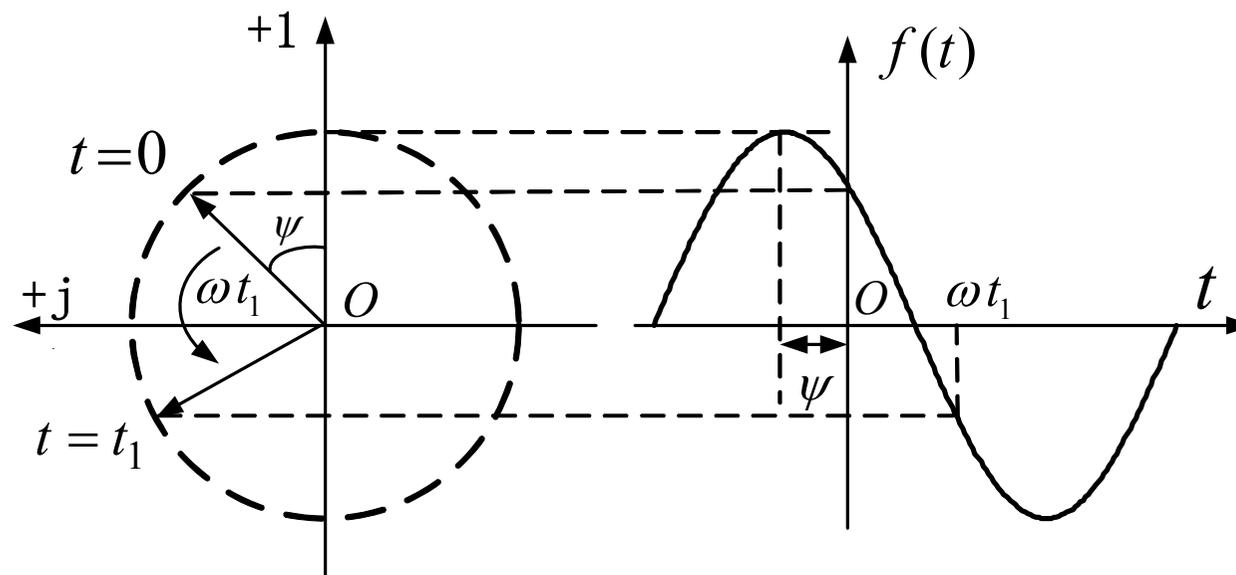


图6.8 旋转相量在实轴上的投影对应于正弦波

## § 6.2 正弦量的相量表示法

### 相量图

相量可以用复平面上的有向线段表示，按照一定振幅和相位关系画出若干相量的图形称为相量图。如图6.7所示：

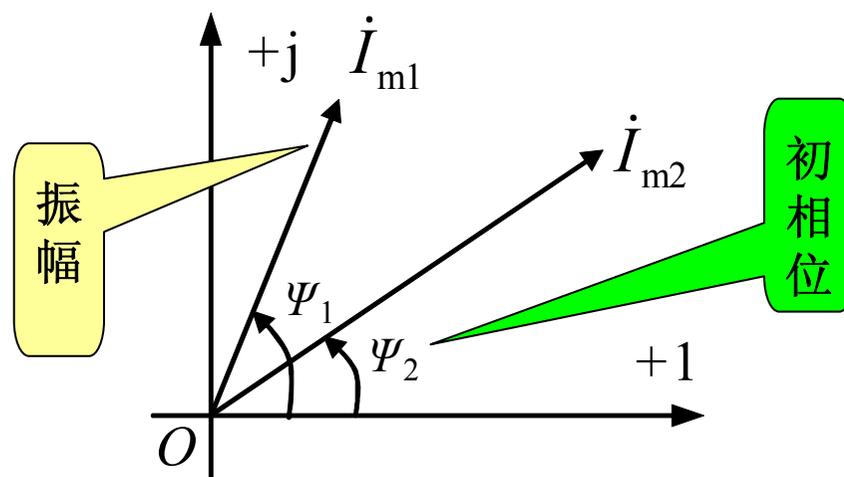


图 6.7 相量图





## § 6.2 正弦量的相量表示法

例6.2 分别写出代表正弦量的相量

$$i_1 = -5 \cos(\omega t - 60^\circ) \text{A}, i_2 = 6 \sin(\omega t + 30^\circ) \text{A}$$

解

$$i_1 = -5 \cos(\omega t - 60^\circ) = 5 \cos(\omega t - 60^\circ + 180^\circ) \text{A} \quad \rightarrow \dot{I}_{1\text{m}} = 5 \angle 120^\circ \text{A}$$

$$i_2 = 6 \sin(\omega t + 30^\circ) = 6 \cos(\omega t + 30^\circ - 90^\circ) \text{A} \quad \rightarrow \dot{I}_{2\text{m}} = 6 \angle -60^\circ \text{A}$$

例6.3 已知电压相量  $\dot{U}_{1\text{m}} = (3 - j4) \text{V}$ ,  $\dot{U}_2 = j4 \text{V}$ 。写出各电压相量所代表的正弦量（设角频率为  $\omega$ ）。

解

$$U_{1\text{m}} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5 \text{ V} \quad \psi_1 = \arctan \frac{-4}{3} = -53.1^\circ$$

$$\dot{U}_{1\text{m}} = 5 \angle -53.1^\circ \text{V} \quad \rightarrow u_1 = 5 \cos(\omega t - 53.1^\circ) \text{V}$$

$$\dot{U}_2 = j4 \text{ V} = 4 \angle 90^\circ \text{V} \quad \rightarrow u_2 = 4\sqrt{2} \cos(\omega t + 90^\circ) \text{V}$$



## § 6.2 正弦量的相量表示法

### 正误判断

1. 已知:

$$u = 220 \cos(\omega t + 45^\circ) \text{ V}$$

$$\dot{U} \neq \frac{220}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ \text{ V}$$

有效值

$j45^\circ$

$$\dot{U}_m \neq 220 e^{j45^\circ} \text{ V}$$

2. 已知:  $\dot{I} = 10 \angle 60^\circ \text{ A}$

$$i \neq 10 \cos(\omega t + 60^\circ) \text{ A}$$

最大值

3. 已知:

$$\dot{I} = 4 e^{j30^\circ} \text{ A}$$

复数

$$\neq 4\sqrt{2} \cos(\omega t + 30^\circ) \text{ A}$$

瞬时值

4. 已知:

$$\dot{U} = 100 \angle -15^\circ \text{ V}$$

$$U \checkmark 100 \text{ V}$$



## § 6.2 正弦量的相量表示法

### 3. 相量运算规则:

#### (1) 惟一性

两个同频率正弦量相等的充要条件是代表这两个正弦量的相量相等。即对于所有的时间 $t$ ， $\text{Re}[\dot{A}_{m1}e^{j\omega t}] = \text{Re}[\dot{A}_{m2}e^{j\omega t}]$

的充要条件为  $\dot{A}_{m1} = \dot{A}_{m2}$

#### (2) 线性性质

$N$ 个同频率正弦量线性组合（具有实系数）的相量等于各个正弦量相量的同样的线性组合。设  $f_k(t) = \text{Re}[\dot{A}_{mk}e^{j\omega t}]$  ( $b_k$  为实数)，则

$$\sum_{k=1}^N b_k \cdot f_k(t) = \text{Re}\left[\left(\sum_{k=1}^N b_k \dot{A}_{mk}\right)e^{j\omega t}\right]$$



## § 6.2 正弦量的相量表示法

### (3) 微分规则

正弦量(角频率为 $\omega$ ) 时间导数的相量等于表示原正弦量的相量乘以因子  $j\omega$

$$\text{即设 } f(t) = \text{Re}[\dot{A}_m e^{j\omega t}] , \text{ 则 } \frac{d}{dt} f(t) = \text{Re}[j\omega \dot{A}_m e^{j\omega t}]$$

证明:

$$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{d}{dt} \text{Re}[\dot{A}_m e^{j\omega t}] = \text{Re}\left[\frac{d}{dt} (\dot{A}_m e^{j\omega t})\right] = \text{Re}[j\omega \dot{A}_m e^{j\omega t}]$$

由于采用相量表示正弦量，正弦量对时间求导运算变换为用  $j\omega$  乘以代表它们的相量的运算。这给正弦电流电路的运算带来极大方便。

## § 6.3 基尔霍夫定律的相量形式



### 1 基尔霍夫电流定律KCL的相量形式:

基尔霍夫电流定律方程的时域形式为  $\sum i = 0$

当方程中各电流均为同频率的正弦量时，根据相量的惟一性和线性性质，可得基尔霍夫电流定律方程的相量形式为：

$$\sum \dot{I}_m = 0 \text{ 或 } \sum I = 0$$

在集中参数正弦电流电路中，流出（流入）任一节点的电流相量的代数和等于零。

## § 6.3 基尔霍夫定律的相量形式



证明:

假设电路中全部电流都是相同频率  $\omega$  的正弦电流, 则可以将它们用振幅相量或有效值相量表示为以下形式:

$$i_k(t) = \operatorname{Re}[I_{km} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\sqrt{2} I_k e^{j\omega t}]$$

代入KCL方程中:

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}[I_{km} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}\left[\sum_{k=1}^n I_{km} e^{j\omega t}\right] = \operatorname{Re}\left[\left(\sum_{k=1}^n I_{km}\right) e^{j\omega t}\right] = 0$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n I_{km} = 0$$

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0$$



## § 6.3 基尔霍夫定律的相量形式



### 2 基尔霍夫电压定律KVL的相量形式:

基尔霍夫电压定律方程的时域形式为  $\sum u = 0$

当方程中各电压均为同频率的正弦量时，根据相量的唯一性和线性性质，可得基尔霍夫电压定律方程的相量形式为：

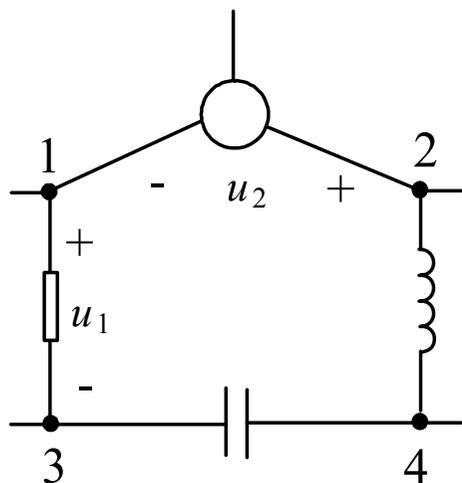
$$\sum \dot{U}_m = 0 \text{ 或 } \sum \dot{U} = 0$$

在集中参数正弦电流电路中，沿任一回路各支路电压相量的代数和等于零。



## § 6.3 基尔霍夫定律的相量形式

例6.5 图 (a) 已知  $u_1 = 6\sqrt{2} \cos(\omega t + 30^\circ) \text{ V}$ ,  $u_2 = 4\sqrt{2} \cos(\omega t + 60^\circ) \text{ V}$  求节点2与3之间的电压  $u_{23}$ , 并画出电压相量图。



图题 6.5a

**解** 设代表电压  $u_1$ 、 $u_2$ 、 $u_{23}$  的相量分别为

$$\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_{23}$$

$$\text{则 } \dot{U}_1 = 6 \angle 30^\circ \text{ V} \quad , \quad \dot{U}_2 = 4 \angle 60^\circ \text{ V}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_{23} &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 6 \angle 30^\circ + 4 \angle 60^\circ \\ &\approx (5.2 + j3) + (2 + j3.5) = 9.7 \angle 42.1^\circ \end{aligned}$$

$$u_{23} = 9.7\sqrt{2} \cos(\omega t + 42.1^\circ) \text{ V}$$

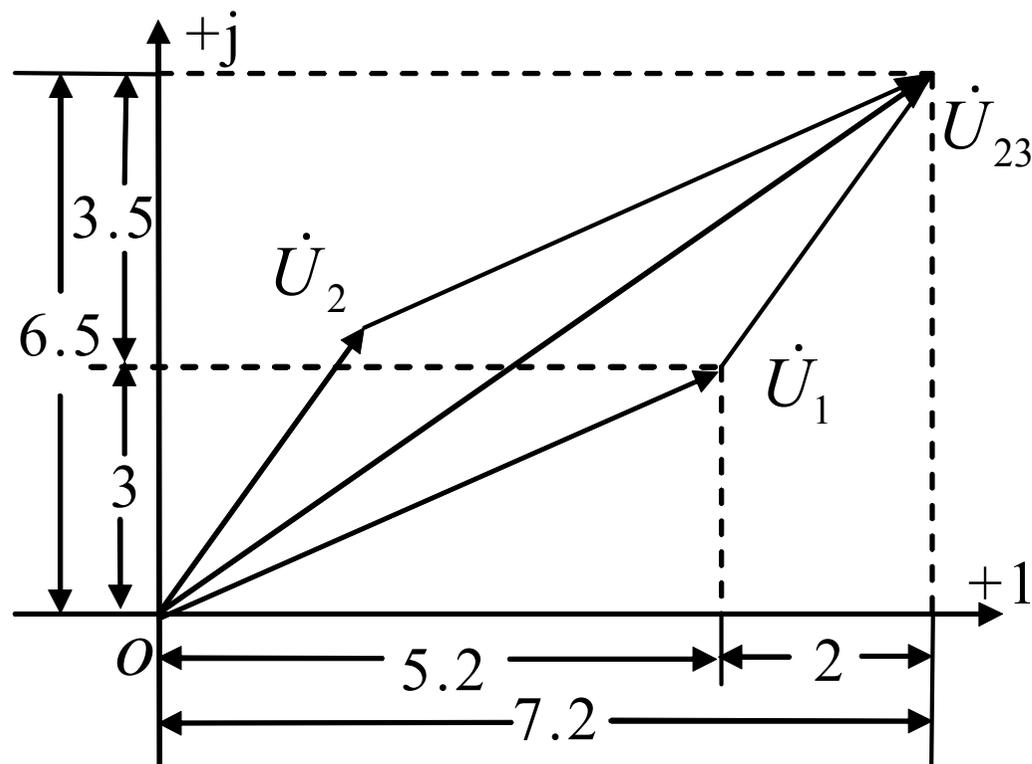


## § 6.3 基尔霍夫定律的相量形式

$$\dot{U}_1 = 6\angle 30^\circ \text{ V} \quad , \quad \dot{U}_2 = 4\angle 60^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_{23} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 9.7\angle 42.1^\circ$$

电压相量图见 (b)



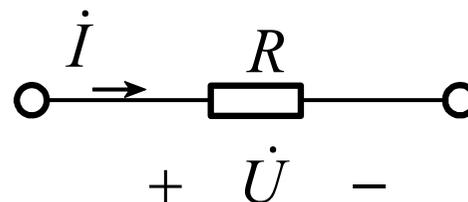
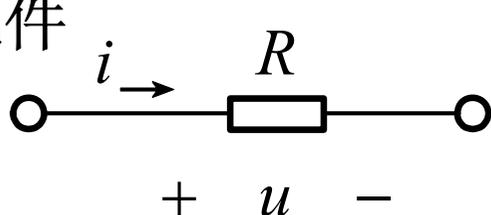
图题 6.5b 用相量图求  $\dot{U}_1$  和  $\dot{U}_2$  之和





# § 6.4 RLC元件上电压与电流的相量关系

## 1 电阻元件



电阻的相量模型

时域  $u = Ri$   $\Rightarrow$  频域  $\dot{U}_m = R\dot{I}_m$  或  $\dot{U} = R\dot{I}$

$U\angle\psi_u = RI\angle\psi_i$   $\Rightarrow$  有效值  $U = RI$  相位  $\psi_u = \psi_i$

电阻R上电压电流有效值(或振幅)之比等于电阻；电压与电流同相位。相量图和波形如图6.9所示。

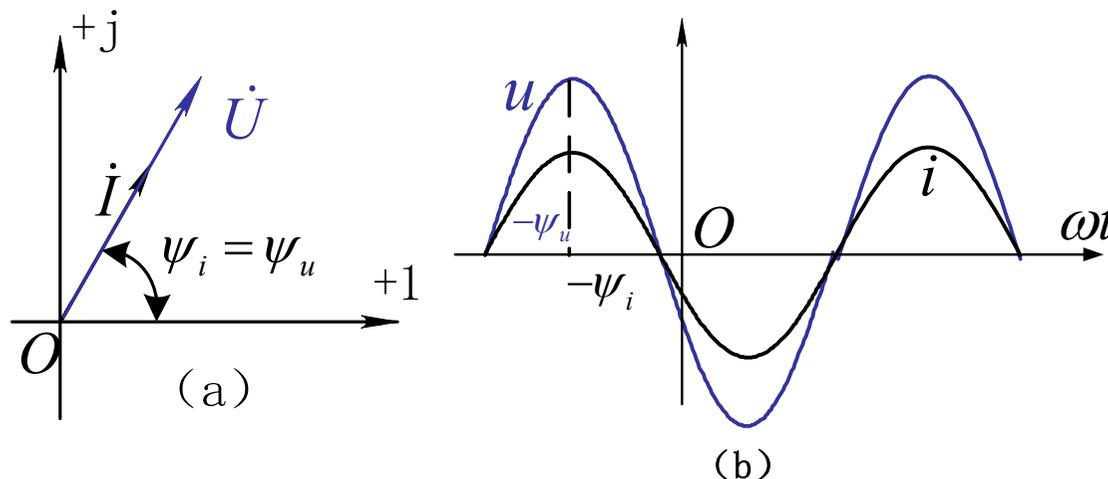
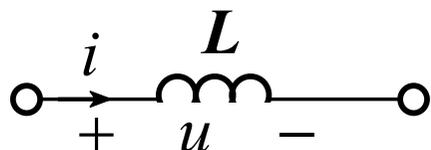


图6.9 电阻元件相量图和波形图

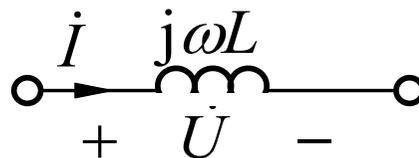


# § 6.4 RLC元件上电压与电流的相量关系

## 2 电感元件



时域  $u = L \frac{di}{dt}$



电感的相量模型

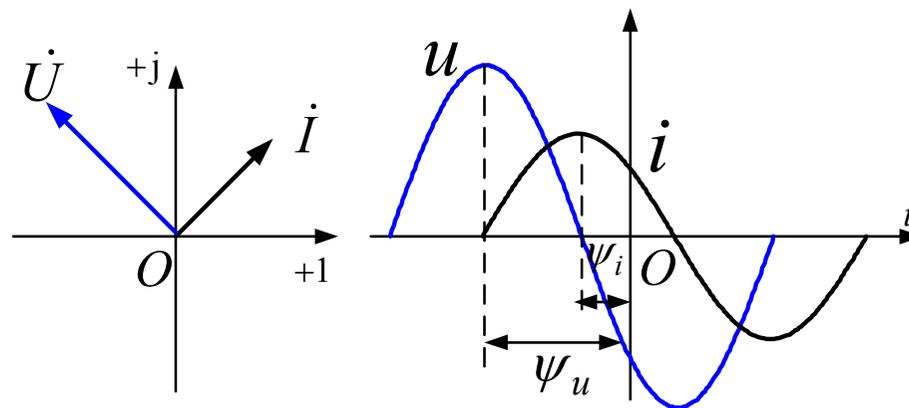
$X_L = \omega L$

称为感抗，单位为  $\Omega$

频域:  $\dot{U} = j\omega L \dot{I} = jX_L \dot{I}$

有效值:  $U = \omega L I$  相位:  $\psi_u = \psi_i + \frac{\pi}{2}$

电感上电压比电流超前  $90^\circ$ ；电压、电流有效值(或幅值)之比等于感抗  $X_L$ 。相量图和波形图如图 6.10 所示：

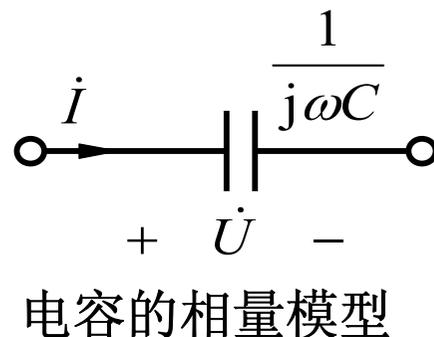
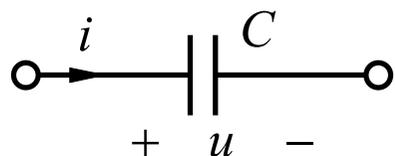


如图6.10



# § 6.4 RLC元件上电压与电流的相量关系

## 3 电容元件



$$\text{容抗: } X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

时域:  $i = C \frac{du}{dt}$   $\longrightarrow$  频域:  $\boxed{\dot{I} = j\omega C \dot{U}}$  或  $\boxed{\dot{U} = \frac{1}{j\omega C} \dot{I} = jX_C \dot{I}}$

$U \angle \psi_u = -j \frac{1}{\omega C} I \angle \psi_i \longrightarrow$  有效值:  $U = \frac{I}{\omega C}$  相位:  $\psi_u = \psi_i - 90^\circ$

电压、电流有效值(或振幅)之比等于容抗的绝对值; 电压比电流滞后 $90^\circ$ 。相量和波形如图6.11所示。

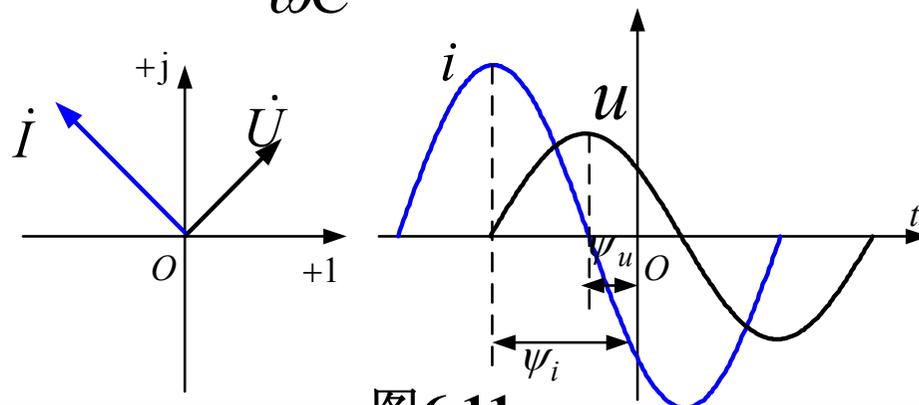


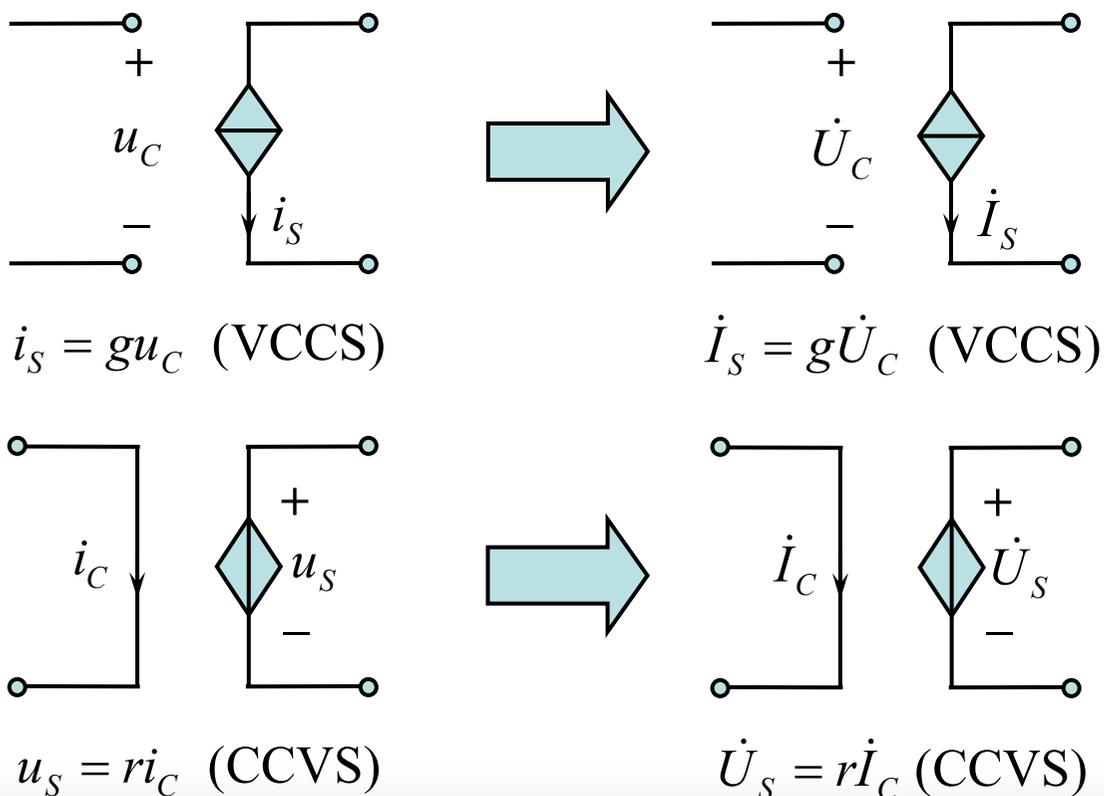
图6.11



## § 6.4 RLC元件上电压与电流的相量关系

### 4 受控源

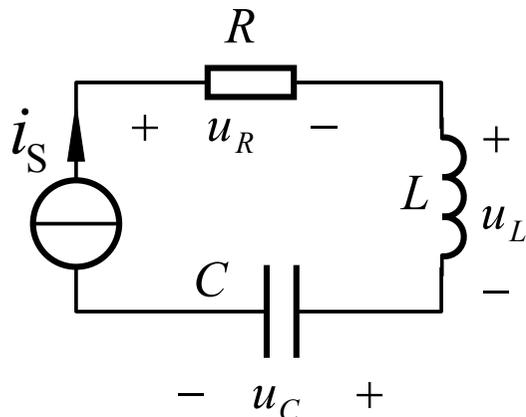
如果线性受控源的控制电压或电流是正弦量，则受控源的电压或电流将是同一频率的正弦量。例如：





## § 6.4 RLC元件上电压与电流的相量关系

例6.6 已知图6.6所示电路： $i_S = 0.2 \cos(\omega t + 45^\circ) \text{ A}$ ， $\omega = 10 \text{ rad/s}$ ， $R = 20 \Omega$ ， $L = 3 \text{ H}$ ， $C = 5 \times 10^{-3} \text{ F}$ 。试求电压  $u_R$ 、 $u_L$  和  $u_C$ 。



图题 6.6

**解**  $i_S = 0.2 \cos(\omega t + 45^\circ) \text{ A}$

$$\rightarrow \dot{I}_{mS} = 0.2 \angle 45^\circ \text{ A}$$

感抗和容抗分别为

$$X_L = \omega L = 30 \Omega$$

$$X_C = -1/(\omega C) = -20 \Omega$$

根据

$$\dot{U}_{mR} = R \dot{I}_{mS} = 20 \times 0.2 \angle 45^\circ = 4 \angle 45^\circ \text{ (V)}$$

$$\dot{U}_{mL} = jX_L \dot{I}_{mS} = j30 \times 0.2 \angle 45^\circ = 6 \angle 135^\circ \text{ (V)}$$

$$\dot{U}_{mC} = jX_C \dot{I}_{mS} = -j20 \times 0.2 \angle 45^\circ = 4 \angle -45^\circ \text{ (V)}$$

得各电压的时域表达式

$$u_R = 4 \cos(\omega t + 45^\circ) \text{ V}$$

$$u_L = 6 \cos(\omega t + 135^\circ) \text{ V}$$

$$u_C = 4 \cos(\omega t - 45^\circ) \text{ V}$$



## § 6.5 RLC串联电路的阻抗

直流电路中无独立源一端口网络（仅由线性电阻和线性受控源组成的电路）对外可以等效成 **电阻  $R$** ；

那么不含独立源的线性交流一端口网络，如图6.12

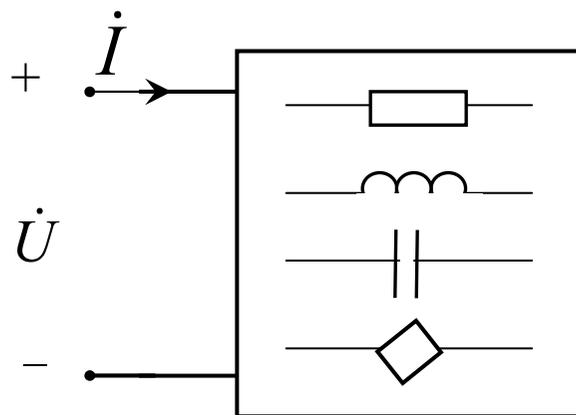
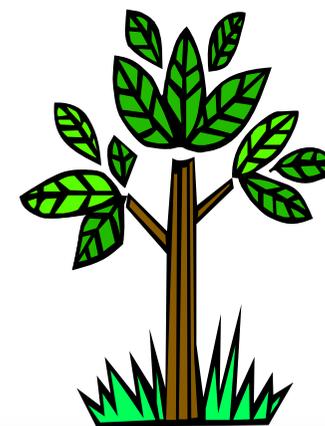


图6.12 无独立源交流一端口网络

它对外的等效电路是什么？

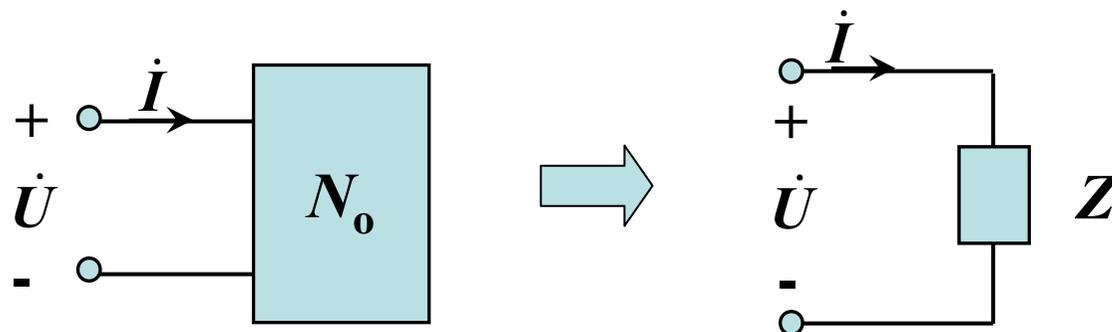




## § 6.5 RLC串联电路的阻抗

### 1 阻抗 $Z$

线性无独立源一端口 $N_0$ 在正弦激励下处于稳态时，端口电压相量  $\dot{U}$  与电流相量  $\dot{I}$  的比值定义为该一端口的**阻抗  $Z$** ，即：



若  $\dot{U} = U \angle \psi_u$ ,  $\dot{I} = I \angle \psi_i$ , 则阻抗:

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U}{I} \angle (\psi_u - \psi_i) = |Z| \angle \varphi = R + jX$$

单位为  $\Omega$



## § 6.5 RLC串联电路的阻抗

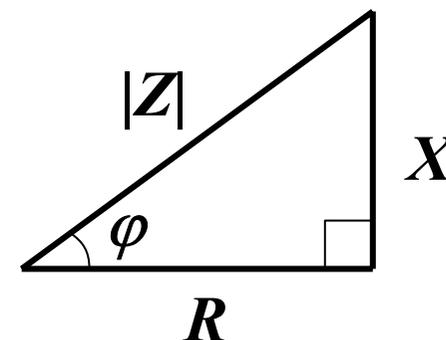
$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U}{I} \angle(\psi_u - \psi_i) = |Z| \angle\varphi = R + jX$$

其中  $|Z| = U / I = \sqrt{R^2 + X^2}$  阻抗模

$\varphi = \psi_u - \psi_i$  阻抗角

$R = |Z| \cos \varphi$  电阻

$X = |Z| \sin \varphi$  电抗



阻抗三角形

欧姆定律的相量形式:  $\dot{U} = Z\dot{I}$

如果 $N_0$ 内部仅含单个元件 $R$ 、 $L$ 或 $C$ , 则对应的阻抗分别为:

$$Z_R = R$$

$$Z_L = j\omega L = jX_L$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = jX_C$$

$$X_L = \omega L$$

$$X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

感抗

容抗

## § 6.5 RLC串联电路的阻抗

### 2 RLC串联电路

#### (1) RLC串联电路的阻抗

根据 **KVL** 的相量形式，图(b)所示电路的端口电压相量方程为：

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C \\ &= R\dot{I} + j\omega L\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I} \\ &= [R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})]\dot{I} \quad (6.33)\end{aligned}$$

$$= Z\dot{I} \quad (6.37)$$

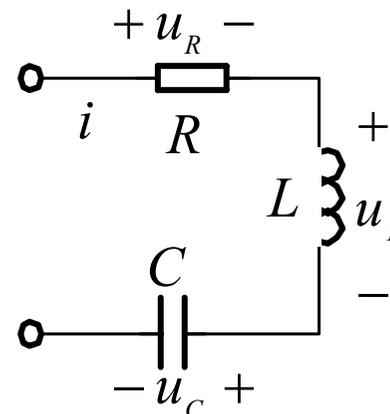
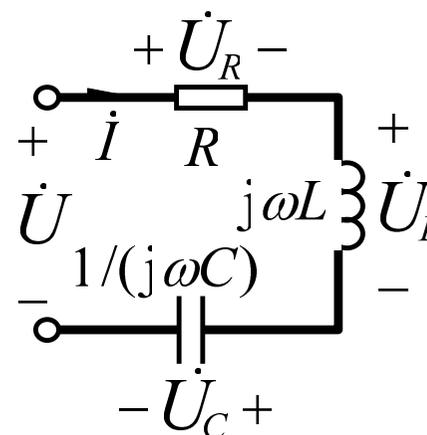


图6.13 (a) *RLC* 串联电路



相量模型如图 6.13(b) 所示



## § 6.5 RLC串联电路的阻抗

### (2) RLC串联电路的性质

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j(X_L + X_C) = R + jX = |Z| \angle \varphi$$

$$\text{其中 } \varphi = \arctan \frac{X_L + X_C}{R} \quad (6.36)$$

分析:  $X_L > |X_C|$  时阻抗角  $\varphi > 0$

电压  $u$  超前于电流  $i$ ,  $R$ 、 $L$ 、 $C$  串联电路呈现感性;

$X_L < |X_C|$  时阻抗角  $\varphi < 0$

电压  $u$  滞后于电流  $i$ ,  $R$ 、 $L$ 、 $C$  串联电路呈现容性;

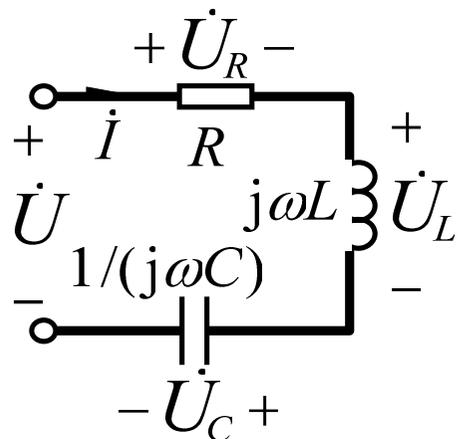
$X_L = |X_C|$  时阻抗角  $\varphi = 0$

电压  $u$  与电流  $i$  同相,  $R$ 、 $L$ 、 $C$  串联电路呈现阻性。



## § 6.5 RLC串联电路的阻抗

### (3) RLC串联电路各电压有效值关系

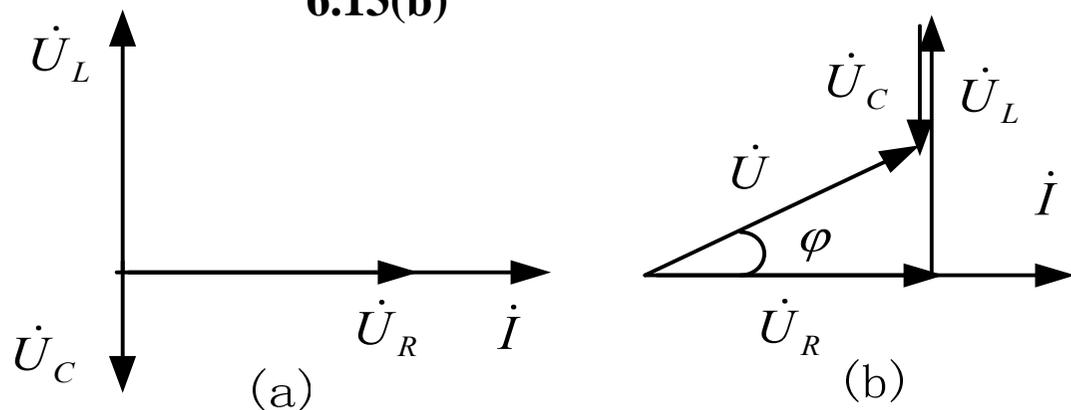


$$\dot{U}_R = RI$$

$$\dot{U}_L = j\omega LI = jX_L I$$

$$\dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C} I = jX_C I$$

6.13(b)



电压有效值关系:

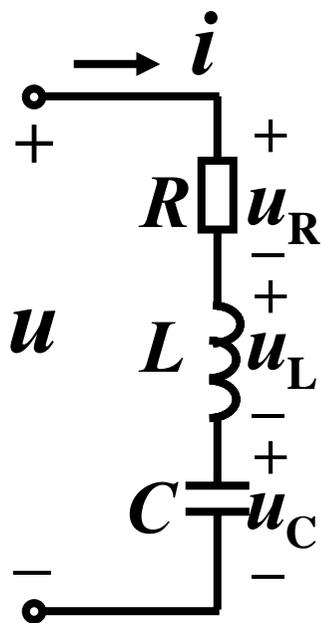
$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}$$

图6.14 RLC串联电路的相量图

## § 6.5 RLC串联电路的阻抗



思考



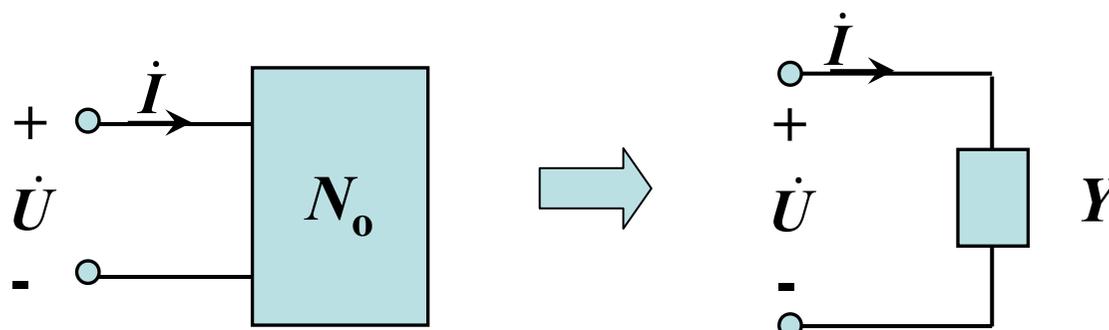
1. 假设  $R$ 、 $L$ 、 $C$  已定，电路性质能否确定？阻性？感性？容性？

2.  $RLC$  串联电路中是否会出现  $U_R > U$ ， $U_L > U$ ， $U_C > U$  的情况？

3. 在  $RLC$  串联电路中，当  $L > C$  (数值上) 时， $u$  超前  $i$ ；当  $L < C$  (数值上) 时， $u$  滞后  $i$ ，这样分析对吗？

## § 6.6 GCL 并联电路的导纳

### 1 导纳 $Y$



$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{I}{U} \angle(\psi_i - \psi_u) = |Y| \angle \varphi_Y = G + jB$$

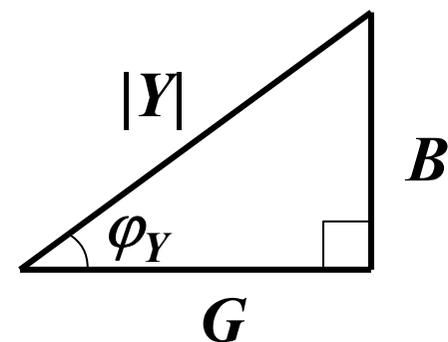
其中

$$|Y| = I / U = \sqrt{G^2 + B^2} \quad \text{导纳模}$$

$$\varphi_Y = \psi_i - \psi_u = -\varphi \quad \text{导纳角}$$

$$G = |Y| \cos \varphi_Y \quad \text{电导}$$

$$B = |Y| \sin \varphi_Y \quad \text{电纳}$$



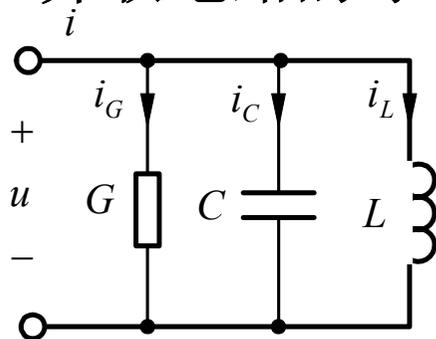
导纳三角形



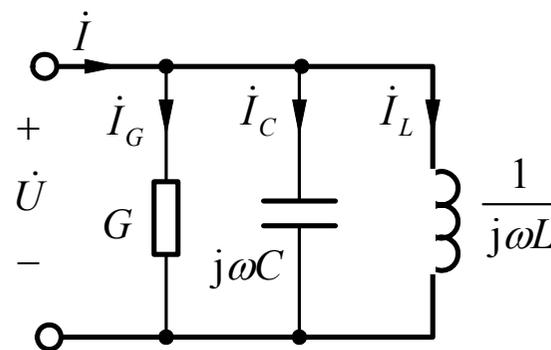
## § 6.6 GCL并联电路的导纳

### 2 GCL并联电路

#### (1) GCL并联电路的导纳



6.17 (a)



6.17 (b)

将GCL并联电路的时域模型变换成相量模型，如图6.17(b)所示  
根据KCL的相量形式，图6.17(b)的KCL方程相量形式为

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{I}_G + \dot{I}_C + \dot{I}_L = G\dot{U} + j\omega C\dot{U} + \frac{1}{j\omega L}\dot{U} = [G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})]\dot{U} \\ Y &= \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L}) = G + j(B_C + B_L) = G + jB = |Y| \angle \varphi_Y \end{aligned}$$

导纳

电导

容纳

感纳

电纳

导纳角

## § 6.6 GCL并联电路的导纳



### (2) GCL并联电路的性质

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = G + j(B_C + B_L) = G + jB = |Y| \angle \varphi_Y$$

$$\varphi_Y = \arctan \frac{B_C + B_L}{G} \quad (6.47)$$

分析:

$|B_L| > B_C$  时  $\varphi_Y < 0$

端口电流滞后于电压, **GCL**并联电路呈现感性;

$|B_L| < B_C$  时  $\varphi_Y > 0$

端口电流超前于电压, **GCL**并联电路呈现容性。

## § 6.6 GCL并联电路的导纳



### (3) GCL并联电路各电流有效值关系

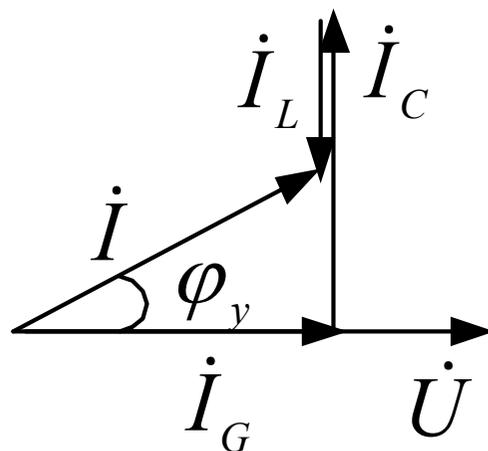
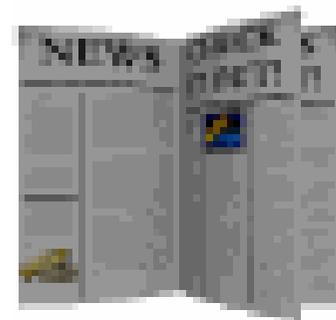


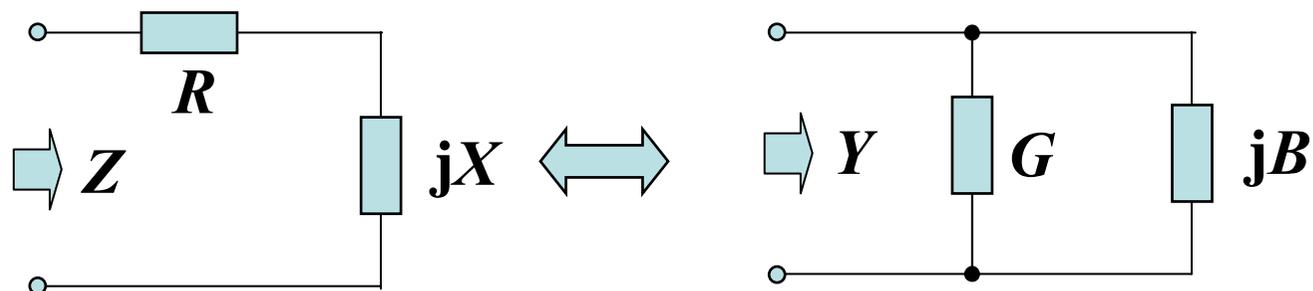
图6.18 GCL并联电路相量图

$$\text{有效值 } I = \sqrt{I_G^2 + (I_C - I_L)^2}$$

## § 6.6 GCL 并联电路的导纳



### 3 阻抗和导纳的等效关系



$$Z = R + jX = |Z| \angle \varphi$$

$$Y = G + jB = |Y| \angle \varphi_Y$$

$$|Y| = \frac{1}{|Z|}, \quad \varphi_Y = -\varphi$$

$$\therefore Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = G + jB$$

$$\therefore G = \frac{R}{R^2 + X^2} \neq \frac{1}{R}, \quad B = \frac{-X}{R^2 + X^2} \neq \frac{1}{X}$$





## § 6.6 GCL并联电路的导纳

例6.8 有一GCL并联电路，其中 $G=2\text{mS}$ ， $L=1\text{H}$ ， $C=1\mu\text{F}$ 。试在频率为 $50\text{Hz}$ 和 $400\text{Hz}$ 两种情况下求其串联等效电路的参数。

解

GCL并联电路的导纳为  $Y = G + j[\omega C - 1/(\omega L)]$

$$\text{其等效阻抗 } Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{G + j[\omega C - 1/(\omega L)]}$$

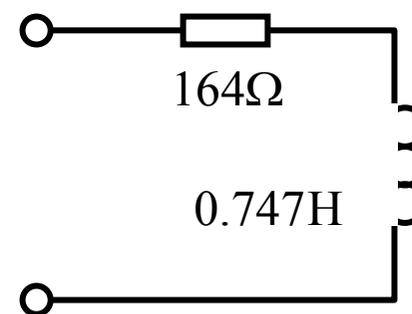
当 $f = 50\text{Hz}$ 时， $\omega = 2\pi f = 100\pi\text{rad/s}$

$$\text{阻抗: } Z = \frac{1}{2 \times 10^{-3}\text{S} + j[100\pi \times 10^{-6} - 1/(100\pi \times 1)]\text{S}} = (164 + j235)\Omega$$

阻抗  $Z$  的虚部为正，其串联等效电路是由电阻和感抗构成，其中等效电感为

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{235\Omega}{(100\pi)\text{s}^{-1}} \approx 0.747\text{H}$$

等效电路如右图所示。



(a)



## § 6.6 GCL并联电路的导纳

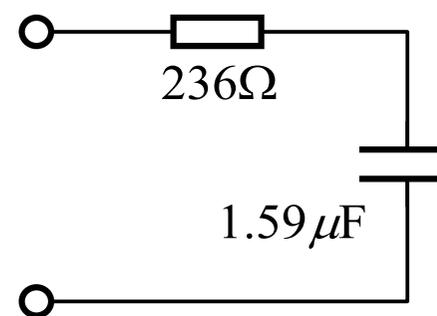
当  $f = 400\text{Hz}$  时,  $\omega = 800\pi\text{rad/s}$

$$\text{阻抗为 } Z = \frac{1}{2 \times 10^{-3}\text{S} + j[800\pi \times 10^{-6} - 1/(800\pi \times 1)]} \approx (236 - j250)\Omega$$

阻抗  $Z$  的虚部为负, 表明它所对应的等效电路是由电阻和容抗串联构成, 等效电容为

$$C = -\frac{1}{\omega X_C} = -\frac{1}{(800\pi)\text{s}^{-1} \times (-250)\Omega} = 1.59\mu\text{F}$$

等效电路如图(b)所示



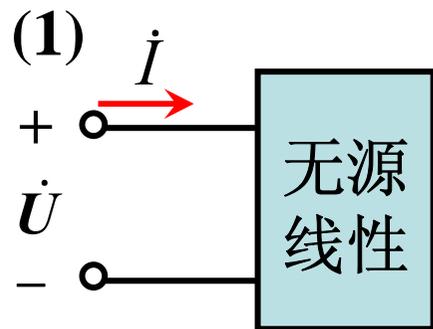
(b)

一个实际电路在不同频率下的等效电路, 不仅其电路参数不同, 甚至连元件类型也可能发生改变。这说明经过等效变换求得的等效电路只是在一定频率下才与变换前的电路等效。

## § 6.6 GCL 并联电路的导纳



小结:



$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} \quad \dot{U} = \dot{I}Z$$

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} \quad \dot{I} = Y\dot{U}$$

相量形式

欧姆定律

(2)  $Z$ 是与  $\dot{U}$ ,  $\dot{I}$  无关的复数。

(3) 一般情况  $Z$ 、 $Y$  均是  $\omega$  的函数。

(4) 根据  $Z$ 、 $Y$  可确定不含独立源单口网络的性质。



## § 6.7 正弦电流电路的相量分析法

用相量表示正弦电压、电流并引入阻抗和导纳来表示元件方程，使得相量形式的基尔霍夫定律方程和元件方程均变成了线性代数方程，和直流电路中相应方程的形式是相似的。分析步骤如下：

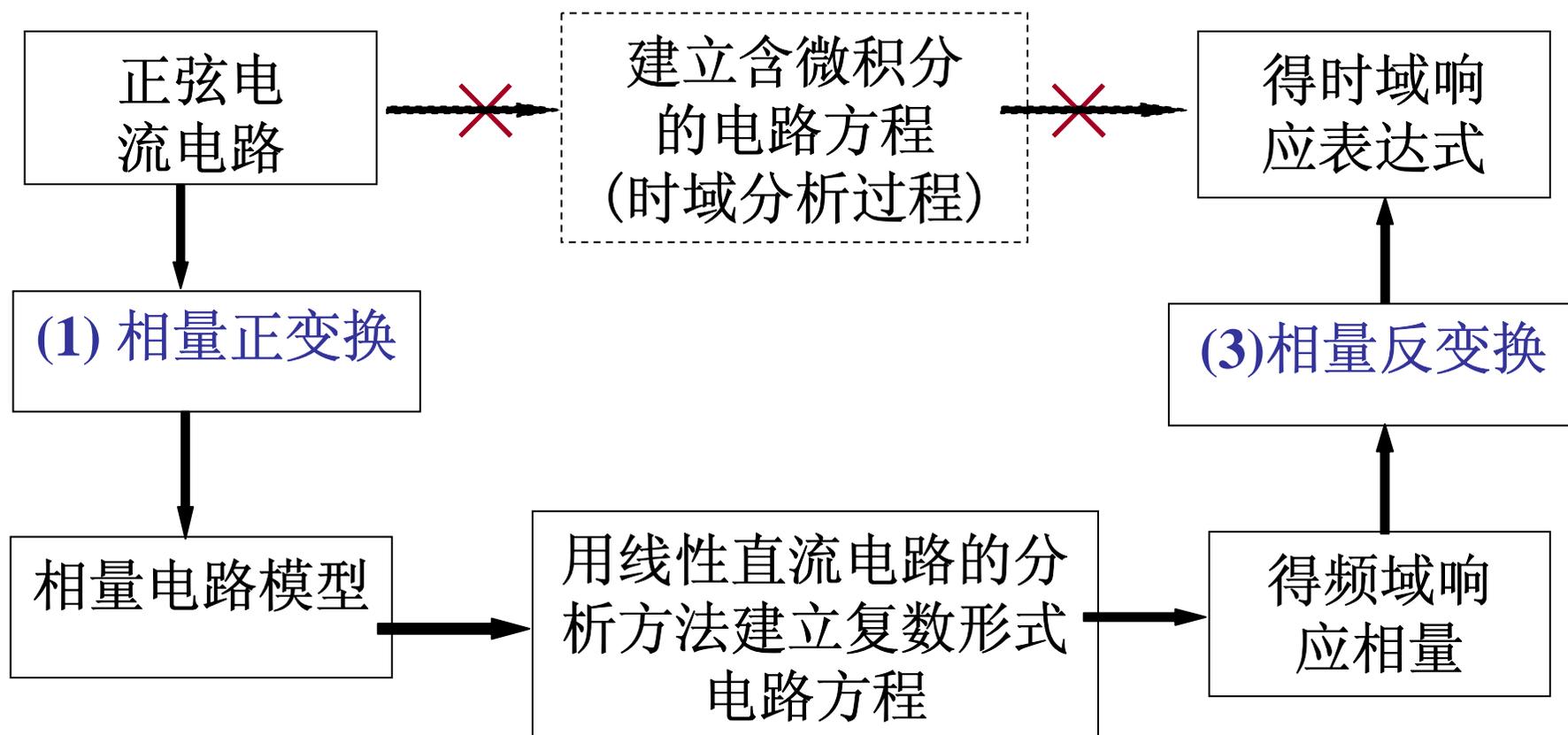
- 1 将电阻推广为阻抗，将电导推广为导纳。
- 2 将激励用相量形式表示，恒定电压、电流推广为电压、电流的相量。
- 3 按线性直流电路分析方法计算相量模型电路。
- 4 将所得的电压、电流相量计算结果变换成正弦表达式。

过程示意图见下页。

## § 6.7 正弦电流电路的相量分析法



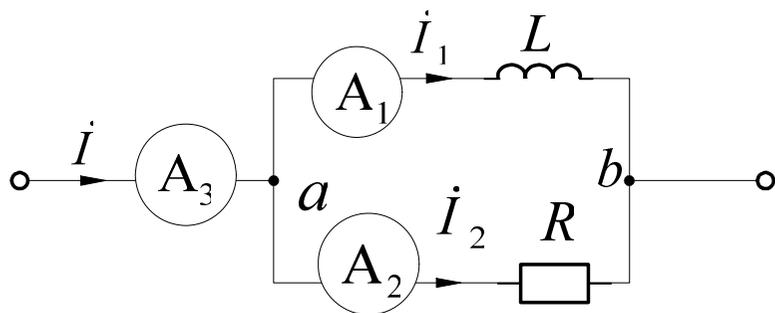
正弦电流电路相量分析法过程示意如图6.20





## § 6.7 正弦电流电路的相量分析法

例：已知  $\textcircled{A_2}$  的读数是  $5\text{A}$ ， $\omega L$  和  $R$  数值相等，求  $\textcircled{A_1}$  和  $\textcircled{A_3}$  的读数。



$L$  上电流滞后电压  $90^\circ$ ，即

$$\dot{I}_1 = 5 \angle -90^\circ \text{ A}$$

$$\therefore \dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = -j5 + 5 = 5\sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ A}$$

即  $\textcircled{A_1}$  读数为  $5\text{A}$ ， $\textcircled{A_3}$  读数为  $5\sqrt{2} \text{ A}$

[解] 取  $\dot{U}_{ab} = U_{ab} \angle 0^\circ$

$$\frac{U_{ab}}{R} = \frac{U_{ab}}{\omega L} = 5\text{A}$$

$$\therefore I_1 = I_2 = 5\text{A}$$

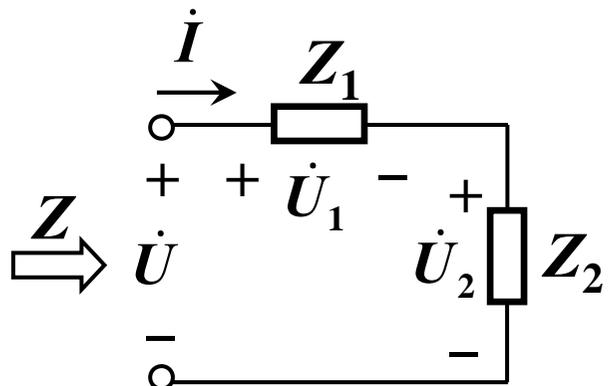
注意：电流表读数均为有效值，有效值不满足KCL方程，而电流相量是满足KCL方程的。



## § 6.7 正弦电流电路的相量分析法

阻抗串联、并联的电路

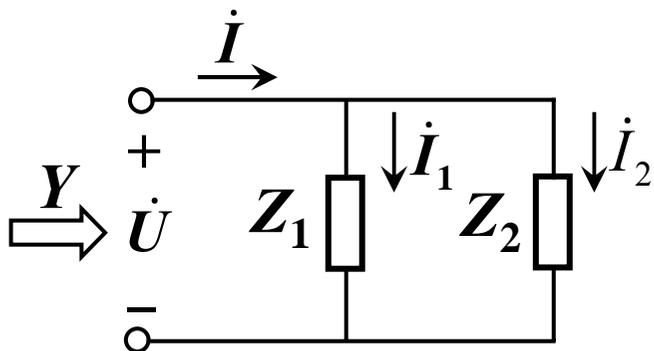
两个阻抗串联



等效阻抗  $Z = Z_1 + Z_2$

分压公式  $\dot{U}_1 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \dot{U}$ ,  $\dot{U}_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \dot{U}$

两个阻抗并联



等效导纳  $Y = Y_1 + Y_2 = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 Z_2}$

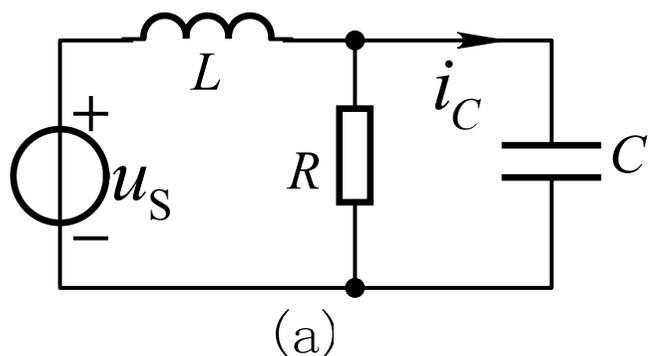
等效阻抗  $Z = \frac{1}{Y} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$

分流公式  $\dot{i}_1 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \dot{i}$ ,  $\dot{i}_2 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \dot{i}$



## § 6.7 正弦电流电路的相量分析法

例6.9 设图 (a) 电路中  $u_S = 60\sqrt{2} \cos(\omega t + 45^\circ) \text{V}$ ,  $\omega = 100 \text{rad/s}$ ,  $R = 10\Omega$ ,  $L = 0.1 \text{H}$ ,  $C = 10^{-3} \text{F}$ , 求电流  $i_C$ 。

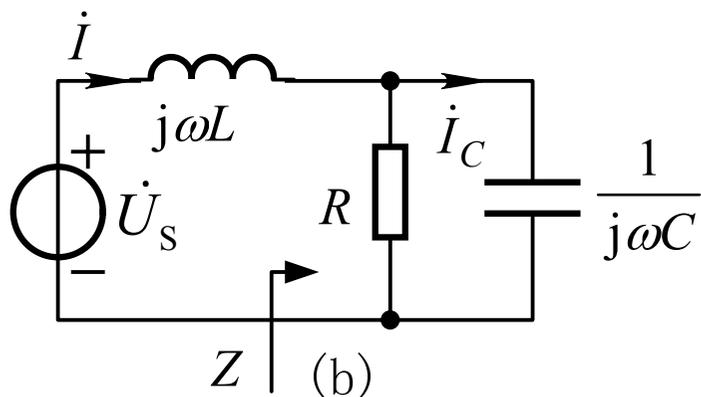


解

其中  $\dot{U}_S = 60\angle 45^\circ \text{V}$

$$Z = R // \frac{1}{j\omega C} = \frac{R \times \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + j\omega RC} = 5(1 - j)\Omega$$

$$\text{总电流 } \dot{I} = \frac{\dot{U}_S}{Z + j\omega L} = \frac{60\angle 45^\circ \text{V}}{[5(1 - j) + j10]\Omega} = 6\sqrt{2} \text{ A}$$



$$\dot{I}_C = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \times \dot{I} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \times \dot{I} = 6\angle 45^\circ \text{ A}$$

对应时域  $i_C = 6\sqrt{2} \cos(100t + 45^\circ) \text{A}$



## § 6.7 正弦电流电路的相量分析法

### 回路电流法与节点电压法

设电路有两个独立回路，相量形式的回路电流方程为：

$$Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 = \dot{U}_{S11}$$

$$Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 = \dot{U}_{S22}$$

$Z_{11}$ 和 $Z_{22}$ 分别称为回路1和回路2的自阻抗；

$Z_{12}$ 和 $Z_{21}$ 称为回路1与回路2之间的互阻抗；

$\dot{U}_{S11}$ 和 $\dot{U}_{S22}$ 分别称为回路1和回路2的源电压相量。

设电路有两个独立节点，相量形式的节点电压方程为：

$$Y_{11}\dot{U}_{n1} + Y_{12}\dot{U}_{n2} = \dot{I}_{S11}$$

$$Y_{21}\dot{U}_{n1} + Y_{22}\dot{U}_{n2} = \dot{I}_{S22}$$

$Y_{11}$ 和 $Y_{22}$ 分别称为节点1和节点2的自导纳；

$Y_{12}$ 和 $Y_{21}$ 称为节点1与节点2之间的互导纳；

$\dot{I}_{S11}$ 和 $\dot{I}_{S22}$ 分别称为节点1和节点2的源电流相量。

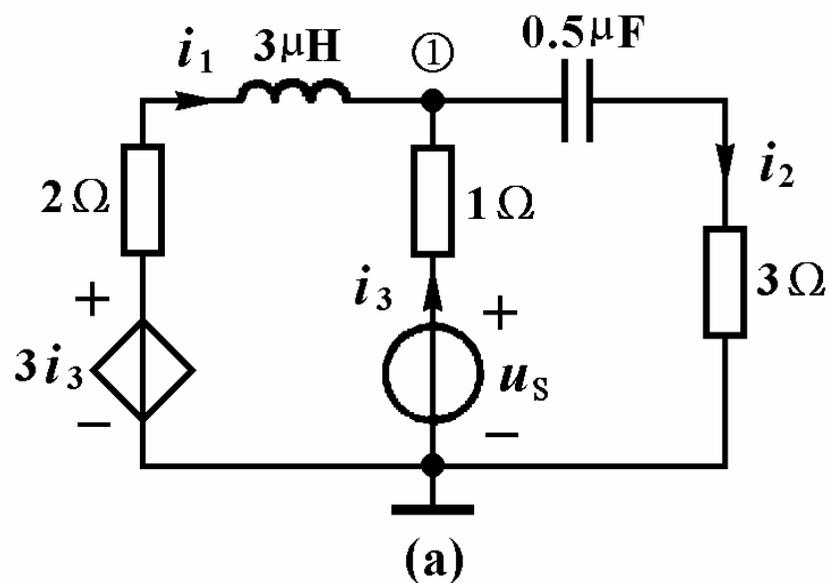


## § 6.7 正弦电流电路的相量分析法

例 电路如图(a)所示, 已知

$$u_S(t) = 5\sqrt{2} \cos(\omega t + 30^\circ) \text{V}, \omega = 10^6 \text{ rad/s}$$

试用网孔分析法和节点分析法计算电流 $i_2(t)$ 。



解: 画出图(a)的相量模型, 如图(b)所示, 其中

$$\dot{U}_S = 5\angle 30^\circ \text{V}$$

## § 6.7 正弦电流电路的相量分析法



### 1. 网孔分析法

设两个网孔电流  $\dot{I}_1, \dot{I}_2$ ，列网孔电流方程

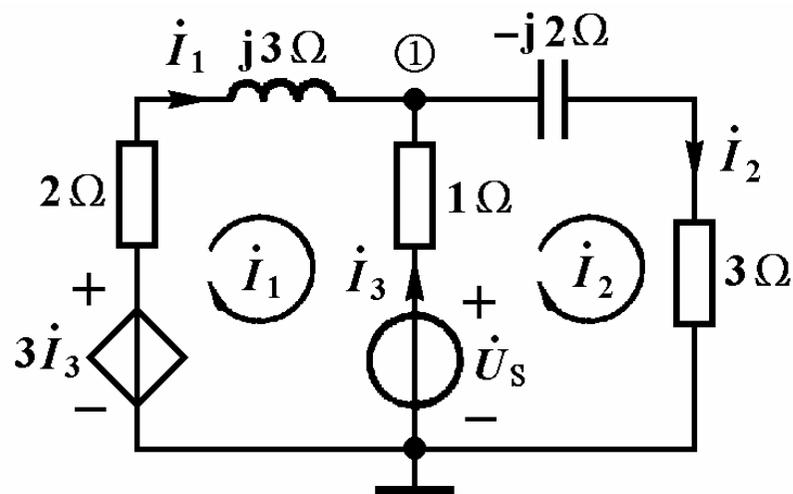
$$\begin{cases} (3 + j3)\dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 3\dot{I}_3 - 5\angle 30^\circ \\ -\dot{I}_1 + (4 - j2)\dot{I}_2 = 5\angle 30^\circ \end{cases}$$

补充方程  $\dot{I}_3 = \dot{I}_2 - \dot{I}_1$

解得

$$\dot{I}_2 = 1.12\angle 60.96^\circ \text{ A}$$

$$i_2(t) = 1.12\sqrt{2} \cos(10^6 t + 60.96^\circ) \text{ A}$$



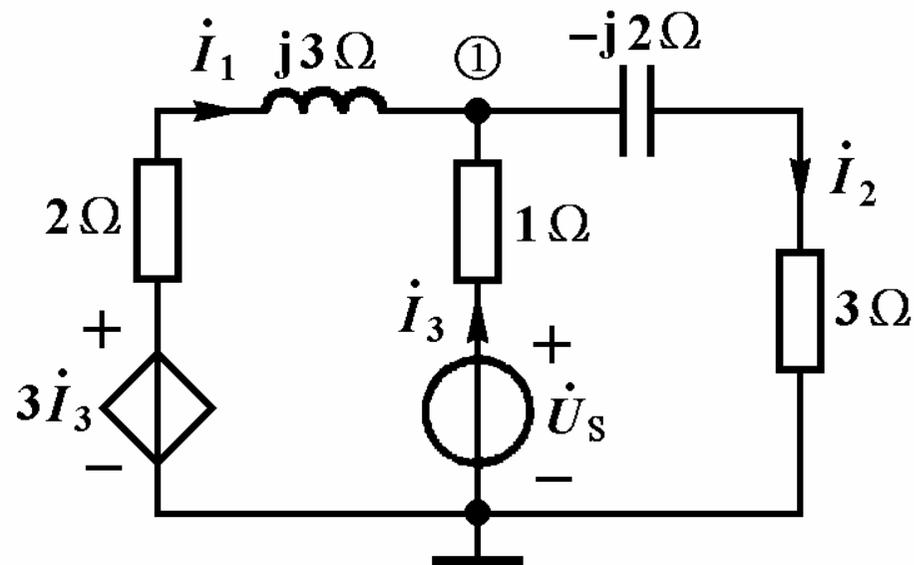
$$\dot{U}_S = 5\angle 30^\circ \text{ V}$$

## § 6.7 正弦电流电路的相量分析法



### 2. 节点分析法

列节点电压方程



$$\left( \frac{1}{2+j3} + 1 + \frac{1}{3-j2} \right) \dot{U}_1 = \frac{3\dot{I}_3}{2+j3} + \frac{5\angle 30^\circ}{1} \quad \dot{U}_S = 5\angle 30^\circ \text{ V}$$

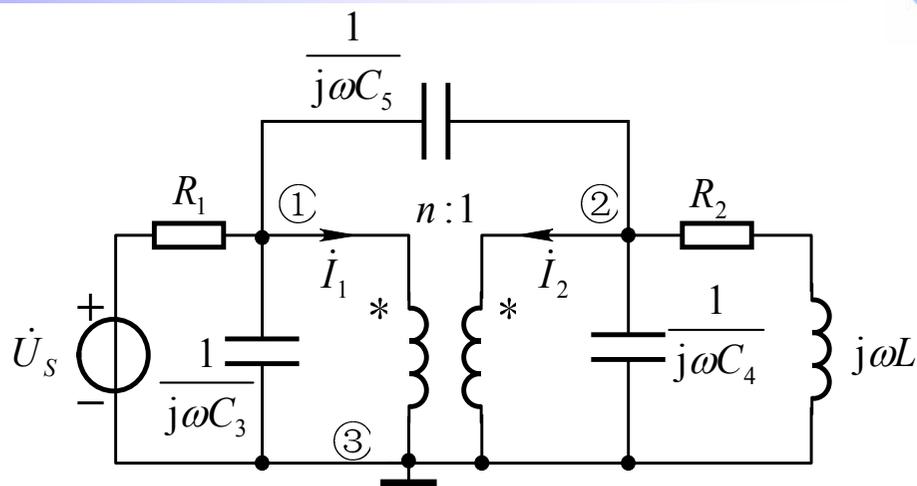
补充方程  $\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_S - \dot{U}_1}{1} = 5\angle 30^\circ - \dot{U}_1$

解得  $\dot{U}_1 = 4.043\angle 27.27^\circ \text{ V} \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1}{3-j2} = 1.12\angle 60.96^\circ \text{ A}$



## § 6.7 正弦电流电路的相量分析法

例6.12 列写图示电路的改进节点电压方程。



解

$$\left(\frac{1}{R_1} + j\omega C_3 + j\omega C_5\right)\dot{U}_1 - j\omega C_5\dot{U}_2 + \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_s}{R_1} \quad (1)$$

$$-j\omega C_5\dot{U}_1 + \left(\frac{1}{R_2 + j\omega L} + j\omega C_4 + j\omega C_5\right)\dot{U}_2 + \dot{I}_2 = 0 \quad (2)$$

补充方程：  $\dot{U}_1 = n\dot{U}_2 \quad (3)$

$$\dot{I}_1 = (-1/n)\dot{I}_2 \quad (4)$$

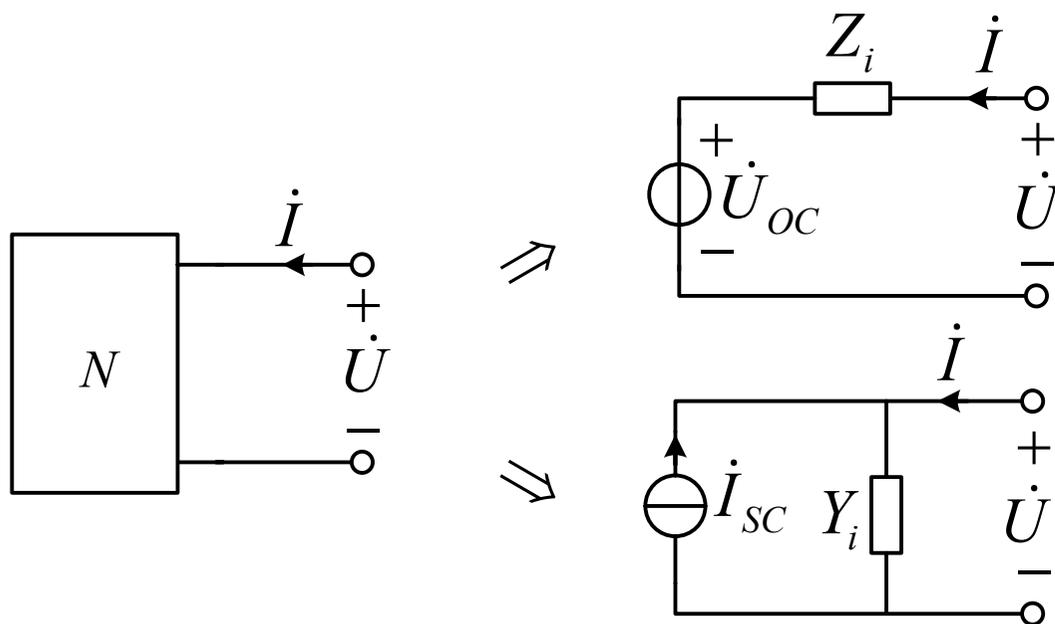


## § 6.7 正弦电流电路的相量分析法

### 等效电源定理

戴维南定理：线性含源一端口网络的相量模型的对外作用可以用一个电压源相量串联阻抗的电路来等效代替。

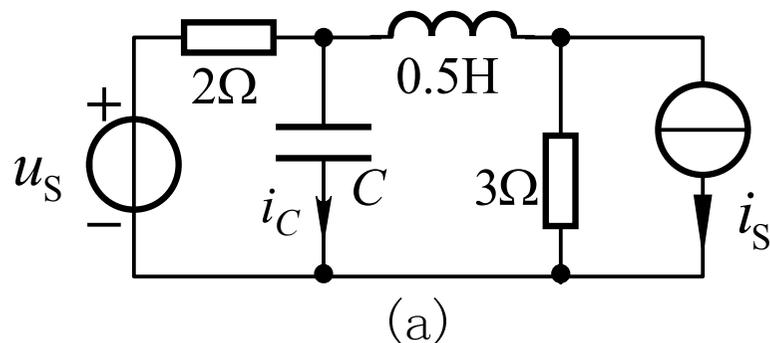
诺顿定理：线性含源一端口网络的相量模型的对外作用可以用一个电流源相量并联导纳的电路来等效代替。



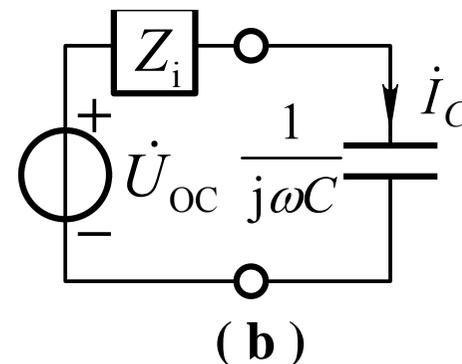


## § 6.7 正弦电流电路的相量分析法

例6.13 图示电路中,  $C=0.05\text{F}$  时,  $i_C = 5\sqrt{2} \cos(10t - 60^\circ)\text{A}$ , 求当  $C=0.25\text{F}$  时  $i_C = ?$



**解** 对原电路做戴维南等效, 如图 (b) 所示。



$$Z_i = \frac{2 \times (3 + j5)}{2 + 3 + j5} \Omega = (1.6 + j0.4) \Omega$$

$$\text{当 } C = 0.05\text{F} \text{ 时, } \dot{U}_{oc} = (Z_i + \frac{1}{j\omega C}) \dot{I}_C = (Z_i - j2) \times 5 \angle -60^\circ = 8\sqrt{2} \angle -105^\circ \text{V}$$

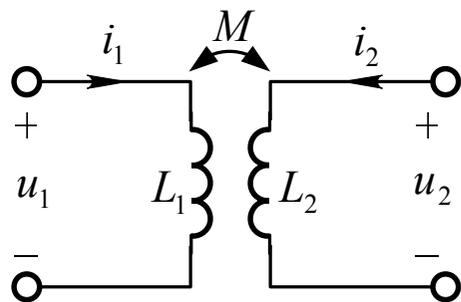
$$\text{当 } C = 0.25\text{F} \text{ 时, } \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{oc}}{Z_i + 1/j\omega C} = \frac{8\sqrt{2} \angle -105^\circ}{1.6 + j0.4 - j0.4} = 5\sqrt{2} \angle -105^\circ \text{A}$$

$$i_C = 10 \cos(10t - 105^\circ) \text{A}$$

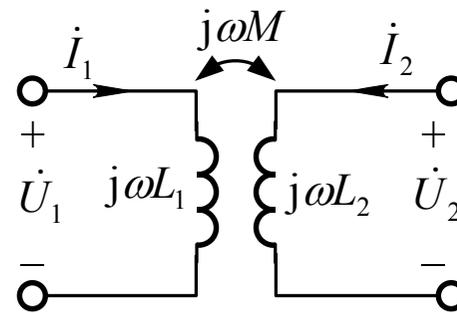
# § 6.8 含互感元件的正弦电流电路



## 1 互感元件的相量模型



(a)



(b)

图6.21 互感元件的电路模型

微分方程

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= \pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\}$$

相量变换微分规则



$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= \pm j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \end{aligned} \right\}$$

相量电路模型

说明：由于互感元件方程一般是用电流来表示电压，故对含互感的电路应选用以电流为变量的分析方法，例如支路电流法或回路电流法。



## § 6.8 含互感元件的正弦电流电路

### 2 含互感元件电路方程的列写

例6.16 列出图6.23所示电路的回路电流方程。

解

$$\text{网孔1: } (R_2 + R_4)\dot{I}_1 - R_4\dot{I}_2 - R_2\dot{I}_3 + \dot{U}_1 = 0$$

$$\text{网孔2: } -R_4\dot{I}_1 + (R_3 + R_4)\dot{I}_2 - \dot{U}_2 = 0$$

$$\text{网孔3: } -R_2\dot{I}_1 + (R_1 + R_2)\dot{I}_3 + \dot{U}_2 = \dot{U}_S$$

$$\text{互感端口方程: } \dot{U}_1 = j\omega L_1\dot{I}_1 + j\omega M(\dot{I}_3 - \dot{I}_2)$$

$$\dot{U}_2 = j\omega M\dot{I}_1 + j\omega L_2(\dot{I}_3 - \dot{I}_2)$$

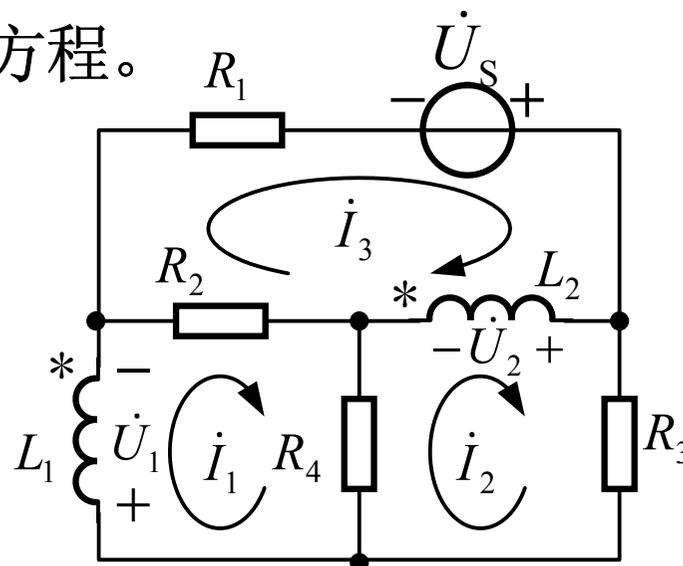


图6.23 例题 6.16

## § 6.8 含互感元件的正弦电流电路

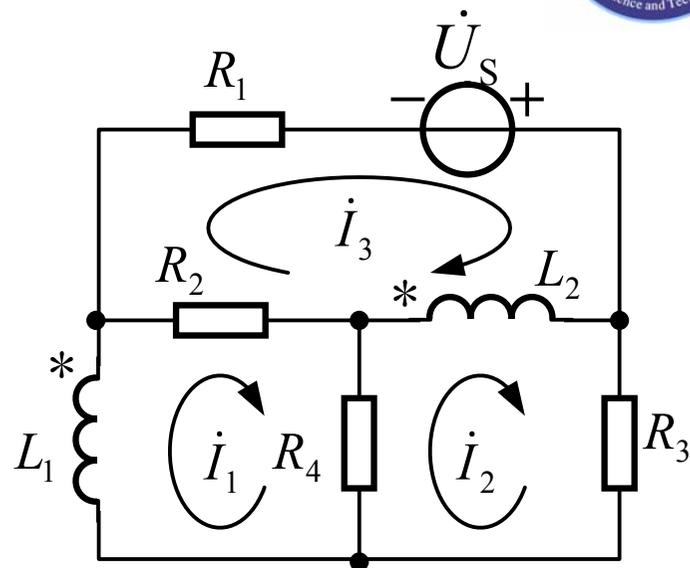
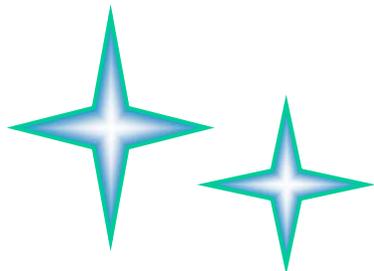


图6.23 例题 6.16

整理得：

$$(R_2 + R_4 + j\omega L_1)\dot{I}_1 - (R_4 + j\omega M)\dot{I}_2 - (R_2 - j\omega M)\dot{I}_3 = 0$$

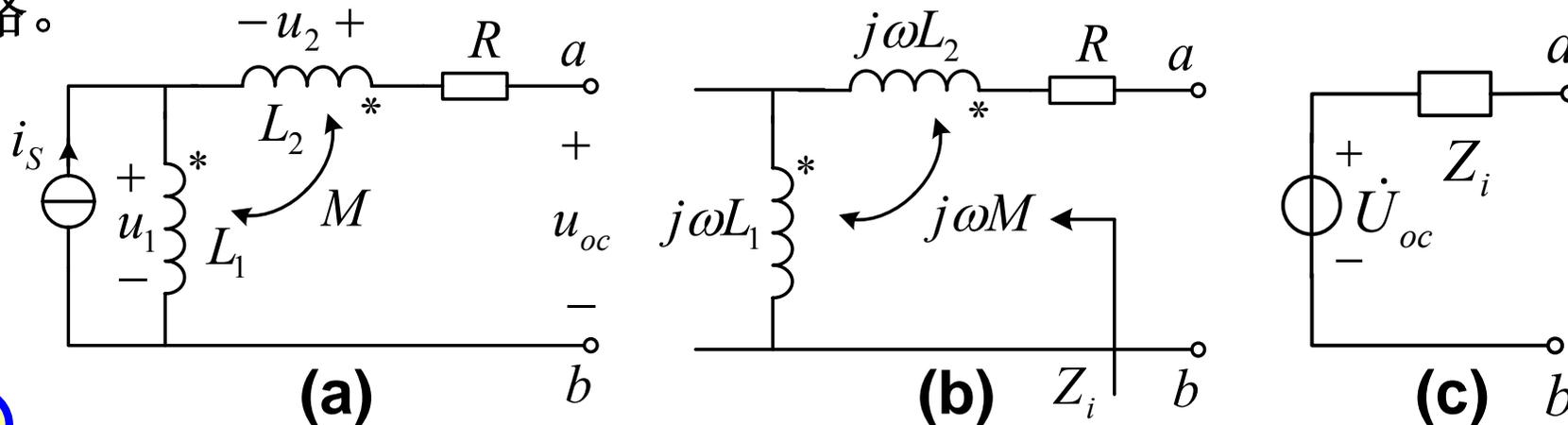
$$-(R_4 + j\omega M)\dot{I}_1 + (R_3 + R_4 + j\omega L_2)\dot{I}_2 - j\omega L_2\dot{I}_3 = 0$$

$$-(R_2 - j\omega M)\dot{I}_1 - j\omega L_2\dot{I}_2 + (R_1 + R_2 + j\omega L_2)\dot{I}_3 = \dot{U}_s$$



## § 6.8 含互感元件的正弦电流电路

例6.17 电路如图6.34(a)所示, 已知 $R=20\ \Omega$ ,  $L_1=0.1\text{H}$ ,  $L_2=0.4\text{H}$ , 耦合系数 $k=0.85$ ,  $i_S = 3\sqrt{2}\cos(100t)\text{A}$ 。求此一端口的戴维南等效电路。



解

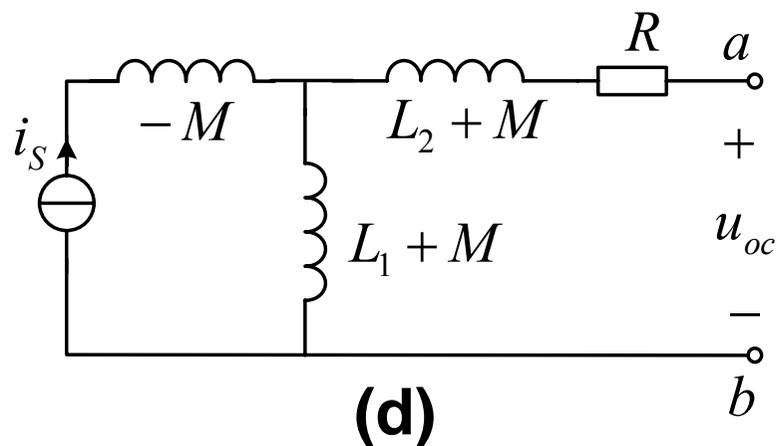
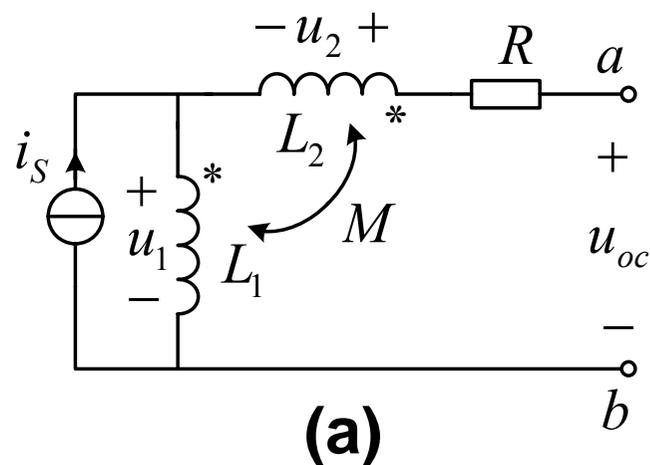
互感:  $M = k\sqrt{L_1L_2} = 0.17\text{H}$

a,b端开路电压相量:  $\dot{U}_{oc} = \dot{U}_2 + \dot{U}_1 = j\omega M \dot{I}_S + j\omega L_1 \dot{I}_S = j81\text{V}$

戴维南等效阻抗:

$$Z_i = R + j\omega L_{eq} = R + j\omega(L_1 + L_2 + 2M) = (20 + j84)\Omega$$

## § 6.8 含互感元件的正弦电流电路



方法二:

将图(a)化为无互感等效电路如图(d)所示:

**a,b**端开路电压相量:  $\dot{U}_{oc} = j\omega(L_1 + M)\dot{I}_S = j81\text{V}$

戴维南等效阻抗:

$$Z_i = R + j\omega(L_2 + M + L_1 + M) = (20 + j84)\Omega$$

## § 6.8 含互感元件的正弦电流电路

### 3 互感的应用——阻抗变换

将副边线圈所在的电路等效到原边

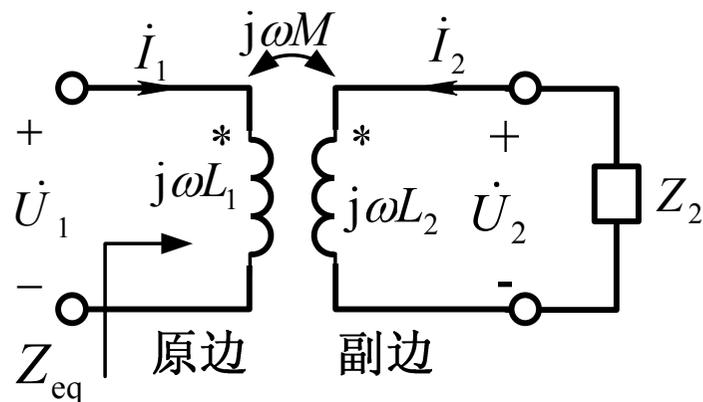


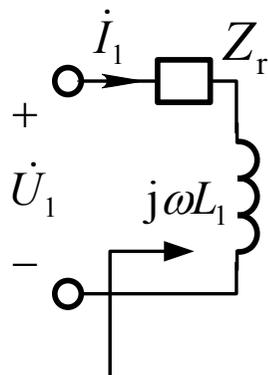
图6.25 (a)

$$\left. \begin{aligned} j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 &= \dot{U}_1 \\ j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + Z_2 \dot{I}_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

即求得从原边看进去的等效阻抗为

$$Z_{\text{eq}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{(\omega M)^2}{Z_2 + j\omega L_2} + j\omega L_1 = Z_r + j\omega L_1$$

等效电路如图6.25 (b) 所示



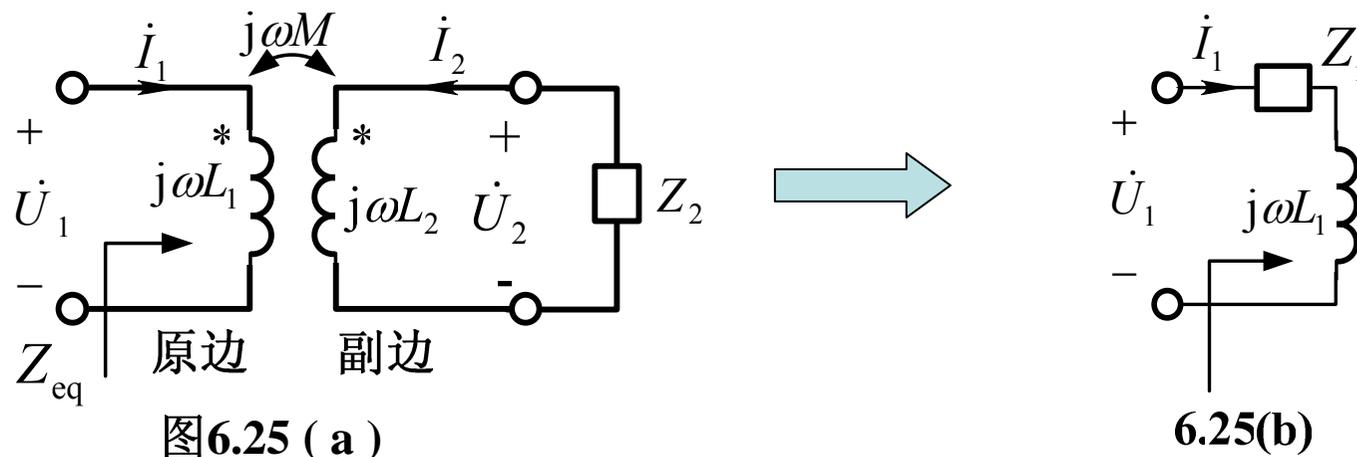
6.25(b)

$$\text{其中 } Z_r = \frac{(\omega M)^2}{Z_2 + j\omega L_2} = \frac{(\omega M)^2}{\text{副边回路总阻抗}} = R_r + jX_r \quad (6.63)$$

表示副边回路阻抗对等效阻抗的影响，称为副边对原边的**引入阻抗**，其实部和虚部分别称为**引入电阻**和**引入电抗**。



## § 6.8 含互感元件的正弦电流电路



引入阻抗及其物理意义:

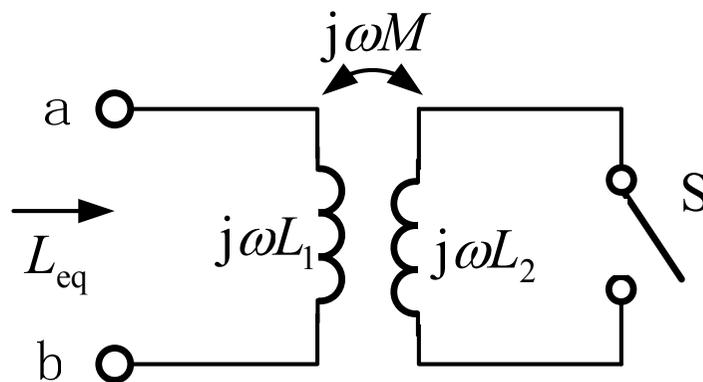
$$Z_r = \frac{(\omega M)^2}{Z_2 + j\omega L_2} = R_r + jX_r \quad \text{令 } Z_2 + j\omega L_2 = R_2 + jX_2$$

$$Z_r = \frac{(\omega M)^2}{R_2 + jX_2} = \frac{(\omega M)^2}{R_2^2 + X_2^2} R_2 + j \frac{(\omega M)^2}{R_2^2 + X_2^2} (-X_2) = R_r + jX_r$$



## § 6.8 含互感元件的正弦电流电路

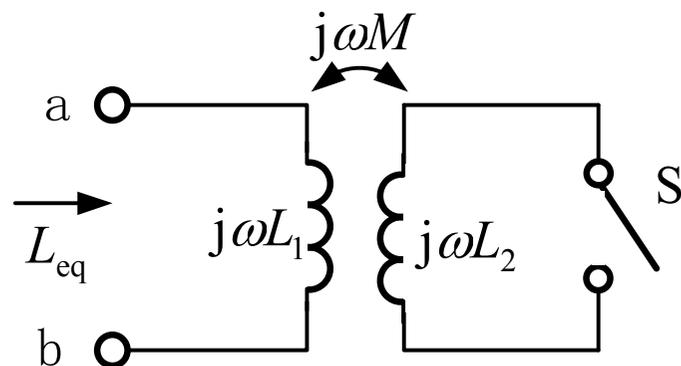
例6.19 下图所示为耦合系数测试电路。设开关S分别处于断开和接通位置时，用LCR表(一种测量二端电感、电容、电阻参数的仪器)测得a,b端等效电感为 $L_{OC}=0.8\text{H}$ ， $L_{SC}=0.1\text{H}$ 。试根据上述结果计算互感的耦合系数。





## § 6.8 含互感元件的正弦电流电路

$$L_{OC}=0.8\text{H}, L_{SC}=0.1\text{H}$$



解

开关断开时，原边电感就是此时的等效电感，即

$$L_{OC} = L_1 \quad (1)$$

当开关接通时，输入端口等效阻抗

$$\begin{aligned} Z_{eq} &= j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{Z + j\omega L_2} = j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_2} \\ &= j\omega \left( \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} \right) = j\omega L_{SC} \end{aligned}$$

$$\text{得等效电感 } L_{SC} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} \quad (2)$$

将  $M = k\sqrt{L_1 L_2}$  及式(1)代入式(2)得

$$L_{SC} = \frac{L_1 L_2 - k^2 L_1 L_2}{L_2} = (1 - k^2) L_1 = (1 - k^2) L_{OC}$$

$$k = \sqrt{1 - L_{SC} / L_{OC}} = \sqrt{1 - 0.1 / 0.8} \approx 0.935$$



## § 6.9 正弦电流电路的功率

### 1. 瞬时功率

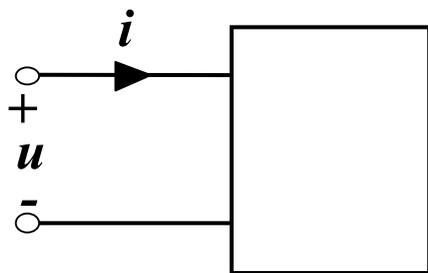


图6.26 一端口网络

一端口网络的端口电压、电流分别为

$$u = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \psi_u) \quad i = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \psi_i)$$

$$\text{令 } \varphi = \psi_u - \psi_i$$

即  $\varphi$  为电压  $u$  和电流  $i$  之间的相位差

则一端口网络输入的瞬时功率为

$$p = ui = 2UI \cos(\omega t + \psi_u) \cos(\omega t + \psi_i)$$

$$= UI \cos(\psi_u - \psi_i) + UI \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)$$

$$= UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i) \quad \text{第一种分解}$$

$$= UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + 2\psi_u - \varphi)$$

$$= UI \cos \varphi + UI \cos \varphi \cos(2\omega t + 2\psi_u) + UI \sin \varphi \sin(2\omega t + 2\psi_u)$$

$$= UI \cos \varphi [1 + \cos(2\omega t + 2\psi_u)] + UI \sin \varphi \sin(2\omega t + 2\psi_u) \quad \text{第二种分解}$$



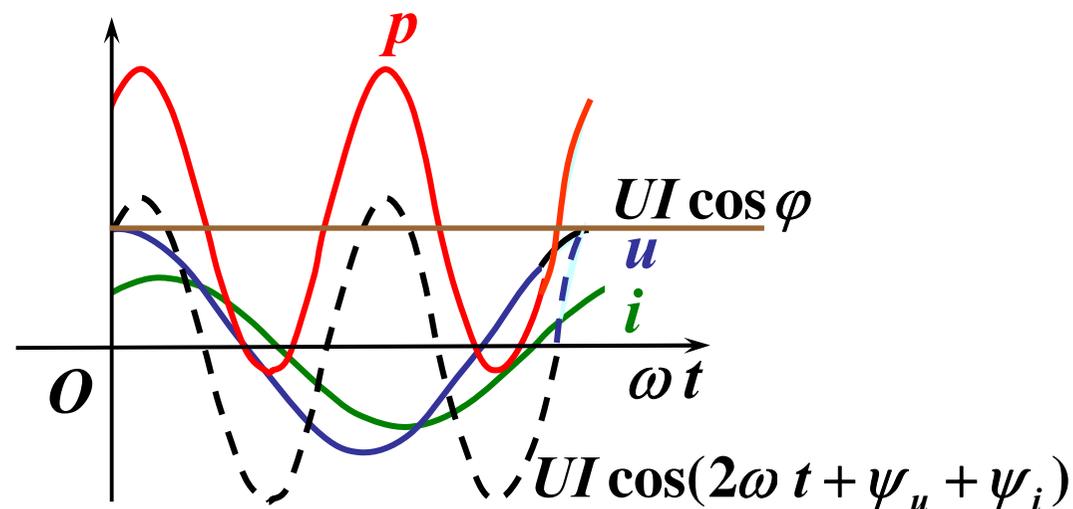
## § 6.9 正弦电流电路的功率

第一种分解方法:

恒定量

正弦量

$$p(t) = UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)$$



- $p$  有时为正, 有时为负;
- $p > 0$ , 电路吸收功率;  $p < 0$ , 电路发出功率。

## § 6.9 正弦电流电路的功率

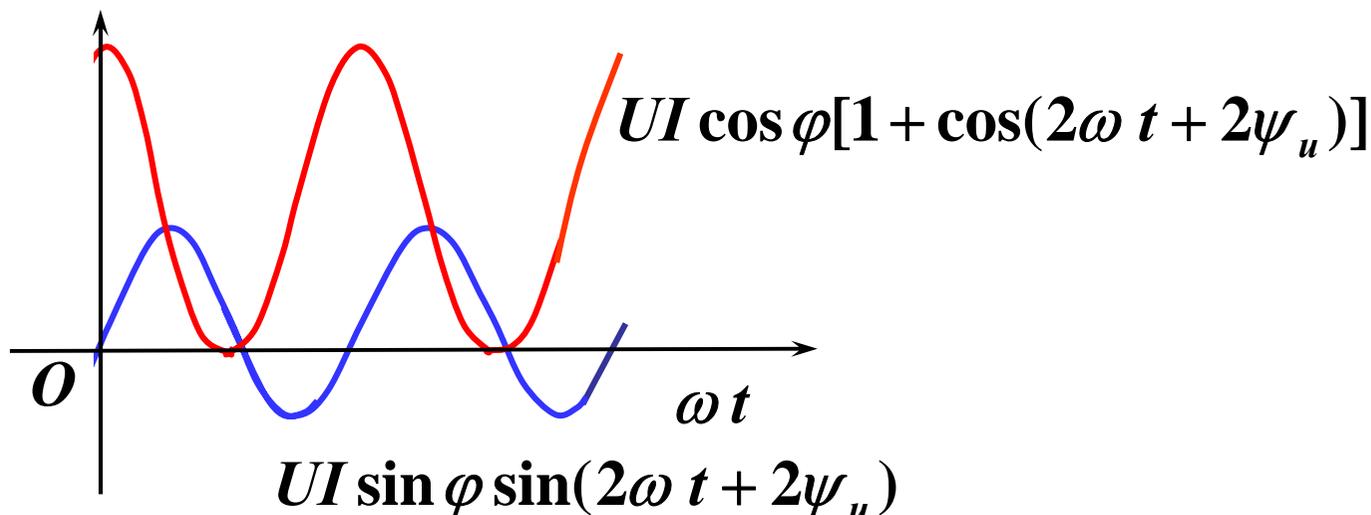


第二种分解方法:

不可逆部分

可逆部分

$$p = UI \cos \varphi [1 + \cos(2\omega t + 2\psi_u)] + UI \sin \varphi \sin(2\omega t + 2\psi_u)$$



$UI \cos \varphi [1 + \cos(2\omega t + 2\psi_u)]$  为不可逆分量，反映一端口网络消耗功率。

$UI \sin \varphi \sin(2\omega t + 2\psi_u)$  为时间的正弦函数，反映一端口网络与外电路交换能量，它在一个周期的平均值为零。



## § 6.9 正弦电流电路的功率

### 2 平均功率（有功功率）

一端口网络吸收功率的平均值称为**平均功率**，通常所说交流电路的功率是指平均功率，定义为：

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = UI \cos(\psi_u - \psi_i) = UI \lambda \quad (6.67)$$

$\psi_u - \psi_i = \varphi$   
功率因数角

功率因数

无独立源的一端口网络，在一般情况下  $|\varphi| < 90^\circ$  有  $0 \leq \lambda \leq 1$

### 3 无功功率

一端口网络和外部电路能量交换的最大速率定义为无功功率。

$$Q = UI \sin \varphi \quad \text{单位: var (乏)}$$



## § 6.9 正弦电流电路的功率

### 4 $R$ 、 $L$ 、 $C$ 各元件的功率（三种特殊情形）

(1) 设一端口网络是一个电阻 $R$ ，此时 $u$ 与 $i$ 同相，即  $\psi_u - \psi_i = 0$  则瞬时功率

$$p_R = UI \cos(\psi_u - \psi_i) + UI \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i) = UI[1 + \cos 2(\omega t + \psi_i)]$$

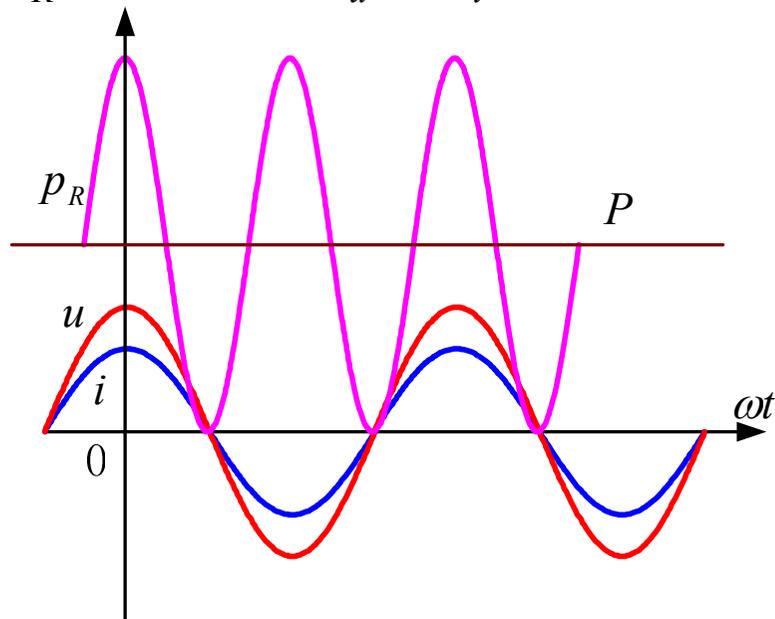


图6.27 电阻上 $u$ 、 $i$ 和 $p$ 的波形

电阻的有功功率为：

$$P_R = UI = RI^2 = GU^2$$

电阻的无功功率为：

$$Q_R = UI \sin \varphi = UI \sin 0^\circ = 0$$

对电阻， $p_R \geq 0$ ，表明电阻一直在吸收功率。且电阻只吸收有功功率，不吸收无功功率。



## § 6.9 正弦电流电路的功率

(2) 设一端口网络是一个电感 $L$ , 此时电压 $u$ 比电流 $i$ 越前 $90^\circ$ , 即  $\psi_u - \psi_i = 90^\circ$

$$\begin{aligned} \text{瞬时功率 } p_L &= UI \cos(\psi_u - \psi_i) + UI \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i) \\ &= UI \cos 90^\circ + UI \cos(2\omega t + 2\psi_i + 90^\circ) \\ &= -UI \sin 2(\omega t + \psi_i) \end{aligned}$$

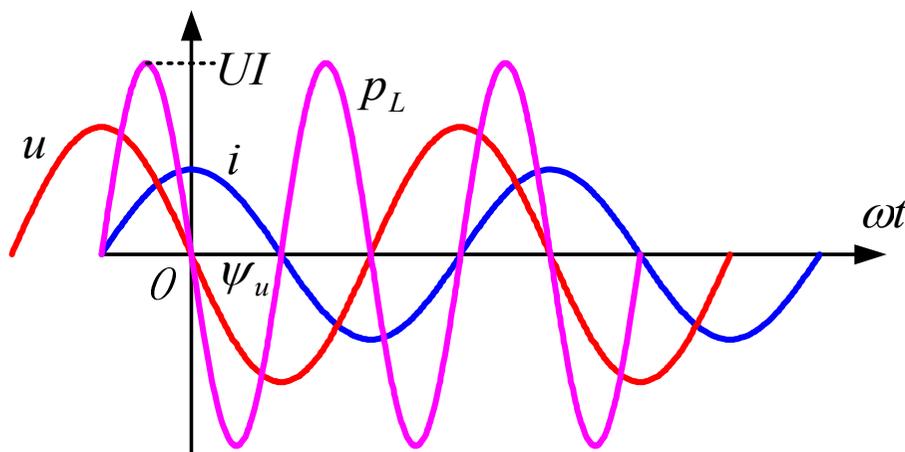
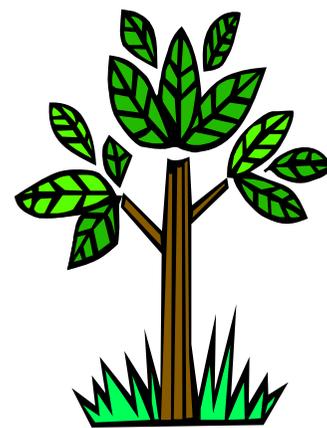


图6.28 电感上 $u$ 、 $i$ 和 $P_L$ 的波形





## § 6.9 正弦电流电路的功率

电感的有功功率为：

$$P_L = 0$$

电感的无功功率为：

$$Q_L = UI \sin \varphi = UI \sin 90^\circ = UI = I^2 \omega L = U^2 / (\omega L)$$

对电感， $p_L$ 的正负交替变化说明有能量在来回交换。由于 $P_L = 0$ 、 $Q_L > 0$ ，表明电感不吸收有功功率，只吸收无功功率。





## § 6.9 正弦电流电路的功率

(3) 设一端口网络是一个电容，此时端口电压 $u$ 比电流 $i$ 滞后 $90^\circ$ ， $\psi_u - \psi_i = -90^\circ$

$$\begin{aligned} \text{瞬时功率 } p_C &= UI \cos(\psi_u - \psi_i) + UI \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i) \\ &= UI \cos(-90^\circ) + UI \cos(2\omega t + 2\psi_i - 90^\circ) \\ &= UI \sin 2(\omega t + \psi_i) \end{aligned}$$

有功功率为： $P_C = 0$

无功功率为：

$$Q_C = UI \sin \varphi = UI \sin(-90^\circ) = -UI = -I^2 / (\omega C) = -U^2 \omega C$$

对电容， $p_C$ 的正负交替变化说明有能量在来回交换。由于 $P_C = 0$ 、 $Q_C < 0$ ，表明电容不吸收有功功率，只发出无功功率。

## § 6.9 正弦电流电路的功率



### 5 视在功率（表观功率）

视在功率的定义  $S = UI$

表示电气设备容量，单位伏安（VA）

有功功率  $P = UI \cos \varphi$

无功功率  $Q = UI \sin \varphi$

$$\therefore S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

有功功率、无功功率和视在功率三者的关系可通过一个功率三角形描述，如图6.30所示

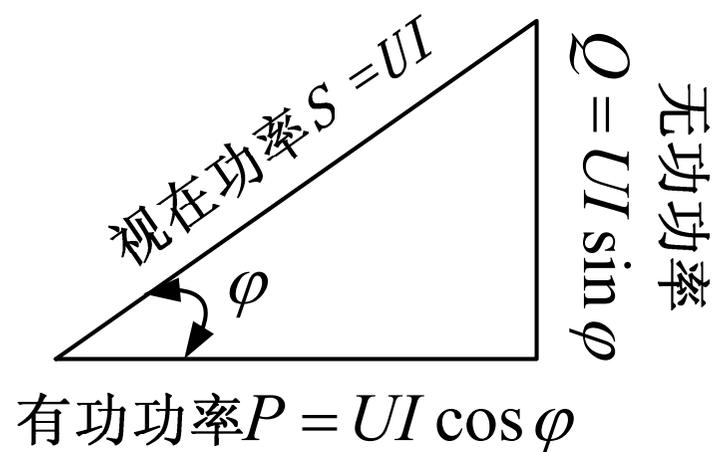


图6.30 功率三角形

## § 6.9 正弦电流电路的功率



**例6.21** 在工频条件下测得某线圈的端口电压、电流和功率分别为**100V**、**5A**和**300W**。求此线圈的电阻、电感和功率因数。

**解**  $\lambda = \cos \varphi = \frac{P}{UI} = \frac{300\text{W}}{100\text{V} \times 5\text{A}} = 0.6$

$$\varphi = \arccos 0.6 = 53.1^\circ$$

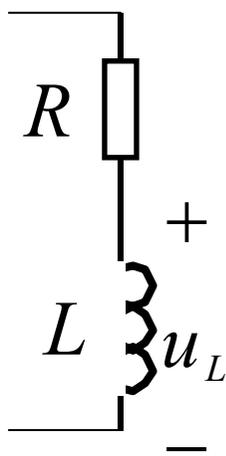
$$|Z| = \frac{U}{I} = \frac{100\text{V}}{5\text{A}} = 20\Omega$$

线圈电阻、感抗和电感分别为：

$$R = |Z| \cos \varphi = 20\Omega \times 0.6 = 12\Omega$$

$$X_L = |Z| \sin \varphi = 20\Omega \times 0.8 = 16\Omega$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{16\Omega}{2\pi \times 50\text{s}^{-1}} = 51\text{mH}$$





## § 6.9 正弦电流电路的功率

### 6 功率因数的提高

提高功率因数的意义：

- (1) 通过减少线路电流来减小线路损耗；
- (2) 提高发电设备利用率。

解决办法：对于感性负载并联电容，提高功率因数。

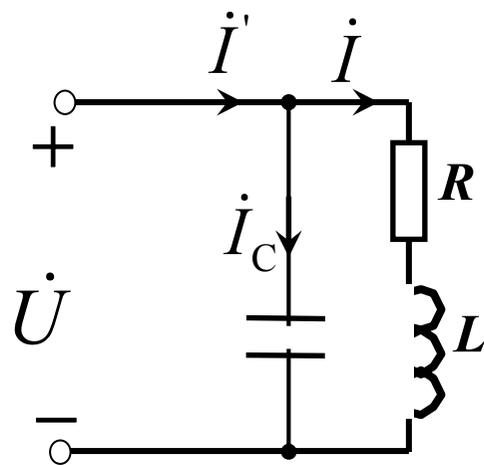


图6.31(a)

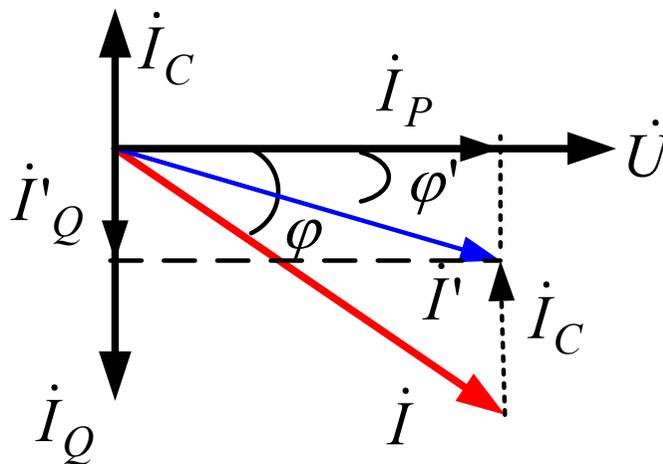
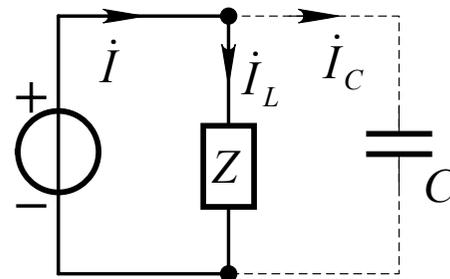


图6.31(b)



## § 6.9 正弦电流电路的功率

例6.22 下图所示电路，感性负载 $Z$ 接于220V、50Hz正弦电源上，负载的平均功率和功率因数分别为2200W和0.8。(1) 求并联电容前电源电流、无功功率和视在功率。(2) 并联电容，将功率因数提高到0.95，求电容大小、并联后电源电流、无功功率和视在功率。



解

并联电容前

并联电容后

电源电流:  $I = \frac{P}{U\lambda} = \frac{2200}{220 \times 0.8} = 12.5 \text{ A}$

$I' = \frac{P}{U\lambda'} = \frac{2200}{220 \times 0.95} \approx 10.53 \text{ A}$

功率因数角:  $\varphi = \arccos 0.8 \approx 36.9^\circ$

$\varphi' = \arccos 0.95 \approx 18.2^\circ$

无功功率:  $Q = P \tan \varphi = 1650 \text{ var}$

$Q' = P \tan \varphi' \approx 723.1 \text{ var}$

视在功率:  $S = UI = 2750 \text{ VA}$

$S' = UI' \approx 2315.8 \text{ VA}$

电容:  $C = -\frac{Q_c}{\omega U^2} = -\frac{Q' - Q}{\omega U^2} = \frac{P(\tan \varphi - \tan \varphi')}{\omega U^2} = \frac{723.1 - 1650}{100\pi \times 220^2} \approx 61 \mu\text{F}$



## § 6.10 复功率

设一端口网络的端口

$$\text{电压 } u = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \psi_u)$$

$$\text{电流 } i = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \psi_i)$$

分别用相量表示

$$\dot{U} = Ue^{j\psi_u}$$

$$\dot{I} = Ie^{j\psi_i}$$

$$\text{复功率: } \tilde{S} = P + jQ = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi$$

$$= UIe^{j\varphi} = UIe^{j(\psi_u - \psi_i)} = Ue^{j\psi_u} \cdot Ie^{-j\psi_i} = \dot{U} \dot{I}^*$$

视在功率

功率因数角

平均功率

无功功率

即：复功率等于电压相量与电流相量共轭的乘积。

$$P = UI \cos \varphi = \operatorname{Re}[\tilde{S}], \quad Q = UI \sin \varphi = \operatorname{Im}[\tilde{S}]$$

$$S = UI = |\tilde{S}|, \quad \varphi = \arg \tilde{S}$$



## § 6.10 复功率

阻抗  $Z=R+jX$  吸收的复功率:

$$\tilde{S} = \dot{U} I^* = Z I I^* = Z I^2 \quad \tilde{S} = \dot{U} I^* = \dot{U} \left( \frac{\dot{U}}{Z} \right)^* = \frac{U^2}{Z^*}$$

导纳  $Y=G+jB$  吸收的复功率:

$$\tilde{S} = \dot{U} I^* = \frac{I^2}{Y} = Y^* U^2$$

复功率守恒定理:

任一电路的所有支路吸收的复功率代数和为零。

$$\sum_{k=1}^b \dot{U}_k I_k^* = \sum_{k=1}^b P_k + j \sum_{k=1}^b Q_k = 0$$

复功率具有守恒性



## § 6.11 最大功率传输定理

1. 如图6.32所示

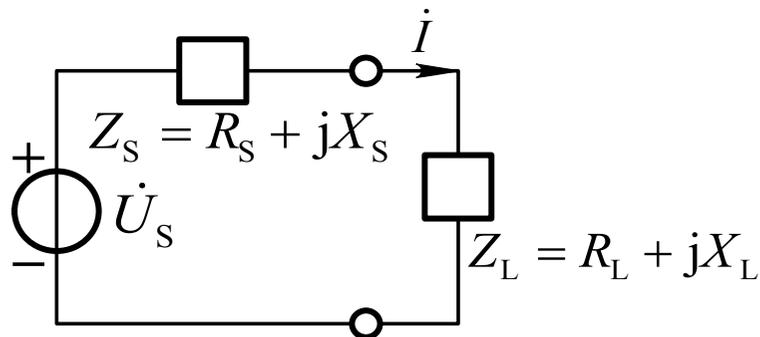


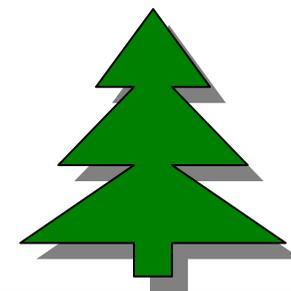
图6.32 讨论传输最大功率的电路

电压源  $\dot{U}_S$ ，内阻抗  $Z_S = R_S + jX_S$ ，负载阻抗  $Z_L = R_L + jX_L$  的实部  $R_L$  大于零，且  $R_L$  与  $X_L$  可随意改变，负载阻抗  $Z_L$  从给定电源获得最大功率的条件是：

$$Z_L = R_L + jX_L = R_S - jX_S = Z_S^*$$

**最大功率传输定理：**负载阻抗等于电源内阻抗的共轭复数时(称为共轭匹配)，负载获得最大功率，此时最大功率为：

$$P_{L\max} = \frac{U_S^2}{4R_L}$$

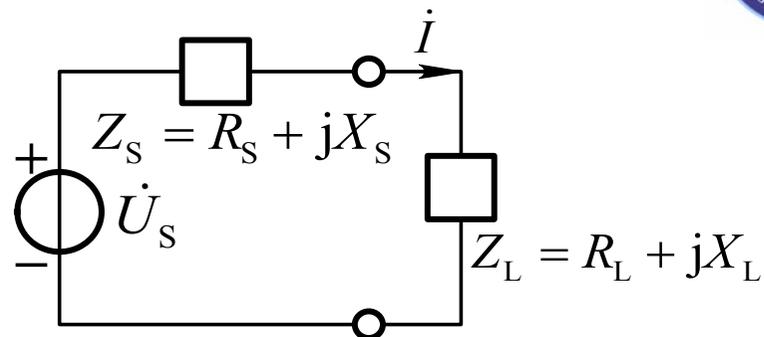




## § 6.11 最大功率传输定理

2. 定理证明:

$$\text{由 } \dot{I} = \frac{\dot{U}_S}{Z_S + Z_L}$$



$$\Rightarrow I = \frac{U_S}{\sqrt{(R_S + R_L)^2 + (X_S + X_L)^2}}$$

$$\text{负载获得的功率 } P = R_L I^2 = \frac{R_L U_S^2}{(R_S + R_L)^2 + (X_S + X_L)^2}$$

(a) 先讨论只有  $X_L$  可以改变时,  $P$  的极值

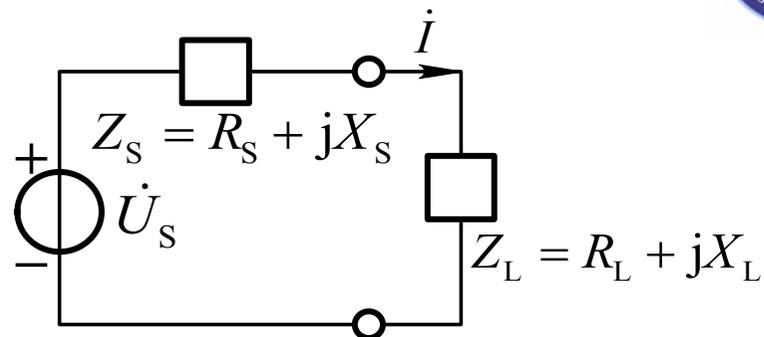
显然, 当  $X_S + X_L = 0$ , 即  $X_L = -X_S$  时,  $P$  获得极值  $P_{max1}$

$$P_{max1} = \frac{R_L U_S^2}{(R_S + R_L)^2}$$

## § 6.11 最大功率传输定理



$$P_{max1} = \frac{R_L U_S^2}{(R_S + R_L)^2}$$



(b)再讨论 $R_L$ 可以改变时,  $P_{max1}$ 的最大值 $P_{max}$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dP_{max1}}{dR_L} &= \frac{U_S^2 (R_S + R_L)^2 - 2R_L U_S^2 (R_S + R_L)}{(R_S + R_L)^4} \\ &= \frac{U_S^2 [(R_S + R_L) - 2R_L]}{(R_S + R_L)^3} = \frac{U_S^2 (R_S - R_L)}{(R_S + R_L)^3} = 0 \end{aligned}$$

$\therefore$  当 $R_S - R_L = 0$ , 即 $R_L = R_S$ 时,

$$\text{此时有最大功率为 } P_{max} = \frac{U_S^2}{4R_L}$$



## § 6.11 最大功率传输定理

3. 当负载阻抗  $Z_L = |Z_L| e^{j\varphi_L}$  的模  $|Z_L|$  可以改变, 而阻抗角  $\varphi_L$  不能改变时, 负载从给定电源获得最大功率的条件是  
负载阻抗模与电源内阻抗模相等。

$$\text{即 } |Z_L| = |Z_S|$$

获得的最大功率为

$$P_{L\max} = \frac{U_S^2 \cos \varphi_L}{2 |Z_S| [1 + \cos(\varphi_S - \varphi_L)]}$$

例如, 当电源内阻抗为  $Z_S = R_S + jX_S$  时,

纯电阻负载获得最大功率的条件是  $R_L = |Z_S|$  ;

如果电源内阻抗也是纯电阻, 即  $Z_S = R_S$

电阻负载获得最大功率的条件则是  $R_L = R_S$



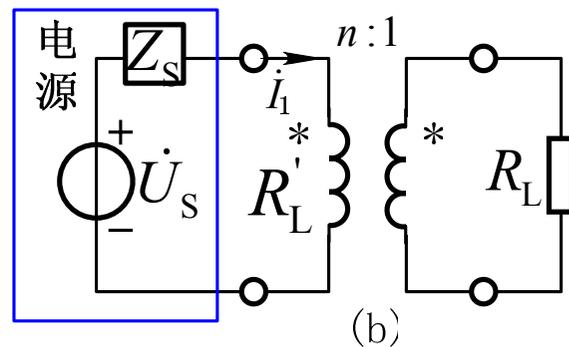
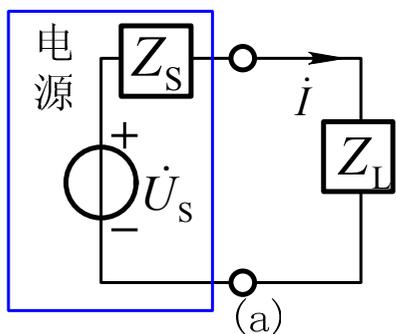


## § 6.11 最大功率传输定理

例6.24 设图 (a) 所示电路中电源电压  $\dot{U}_S = 12\angle 0^\circ \text{ V}$ 、内阻抗  $Z_S = (3 + j4)\Omega$

(1) 图 (a) 中负载阻抗  $Z_L$  可任意改变, 求此负载可获得的最大功率。

(2) 通过理想变压器接一电阻负载如图 (b) 所示,  $R_L = 20\Omega$ , 问变比  $n$  为多少, 此负载可获得最大功率, 求此最大功率。

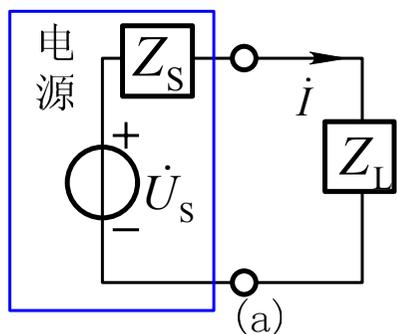




# § 6.11 最大功率传输定理

**解** (1) 当  $Z_L = Z_S^* = (3 - j4)\Omega$  负载获得最大功率

$$P_{\max} = \frac{U_S^2}{4R_L} = \frac{12^2}{4 \times 3} \text{ W} = 12 \text{ W}$$

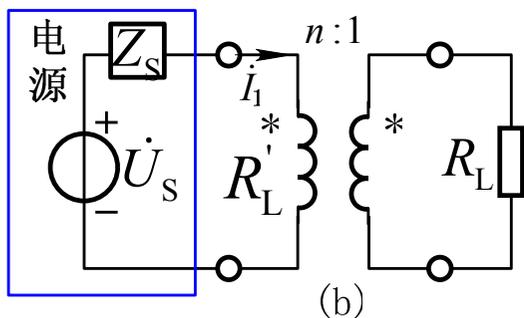


(2) 图(b)中  $R_L$  折算到理想变压器的原端为

$$R'_L = n^2 R_L \quad \text{当 } R'_L = n^2 R_L = |Z_S| \text{ 时,}$$

负载获得最大功率, 即

$$n^2 R_L = \sqrt{(3\Omega)^2 + (4\Omega)^2} = 5\Omega \quad n = \sqrt{5\Omega / 20\Omega} = 1/2$$



$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_S}{Z_S + n^2 R_L} = \frac{12/0^\circ \text{ V}}{(3 + j4)\Omega + 20\Omega/4} = \frac{12 \text{ V}}{(8 + j4)\Omega} = 1.34 \angle -26.6^\circ \text{ A}$$

负载获得的最大功率  $P_{\max} = I_1^2 n^2 R_L = (1.34 \text{ A})^2 \times 20\Omega / 4 = 9 \text{ W}$



## 小结

本章介绍电压、电流随时间按正弦规律变化的电路即正弦电流电路，这是一类在理论上和工程上具有重要意义的电路。主要内容包括：正弦量的相量表示、元件方程和基尔霍夫定律的相量形式、阻抗和导纳的概念、电路方程和电路定理的相量形式、含互感的正弦电流电路的计算、正弦电流电路功率的特点及计算方法。