



中国科学技术大学

University of Science and Technology of China

第5章 电容元件和电感元件

本章目录

1 电容元件

2 电感元件

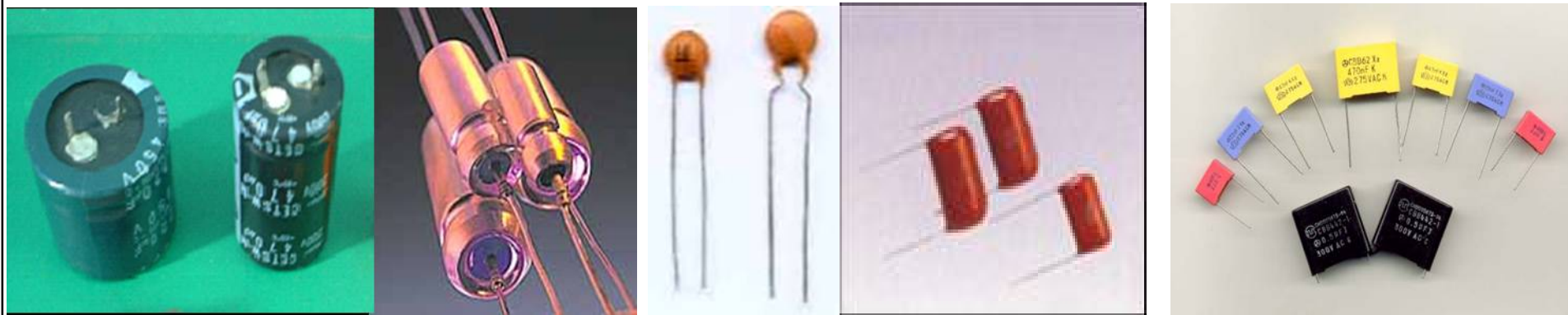
3 耦合电感

4 理想变压器

§ 5.1 电容元件

1 基本概念

(1) 实际电容器示例

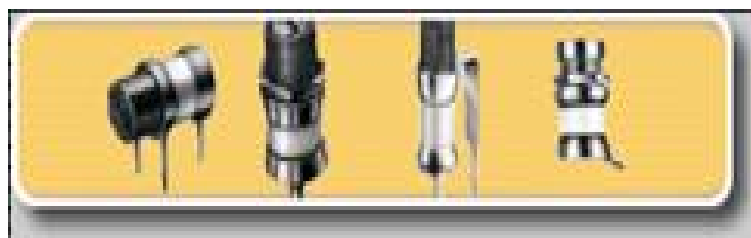


电解电容器

瓷质电容器

聚丙烯膜电容器

图 5.1a 固定电容器



管式空气可调电容器



片式空气可调电容器

5.1b 可变电容器

§ 5.1 电容元件



(2) 电容构成原理

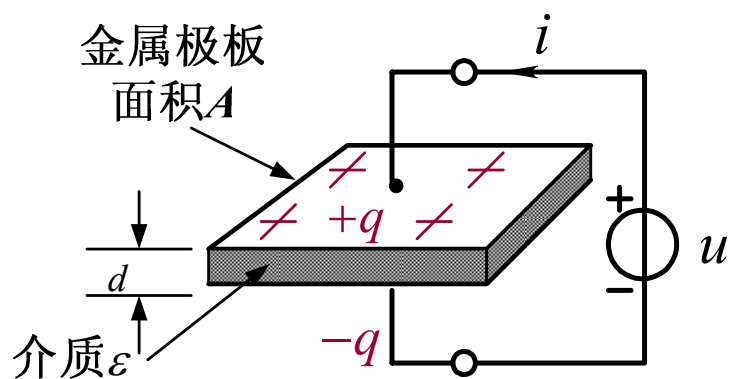


图5.2 电容的基本构成

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

(3) 电容的电路符号

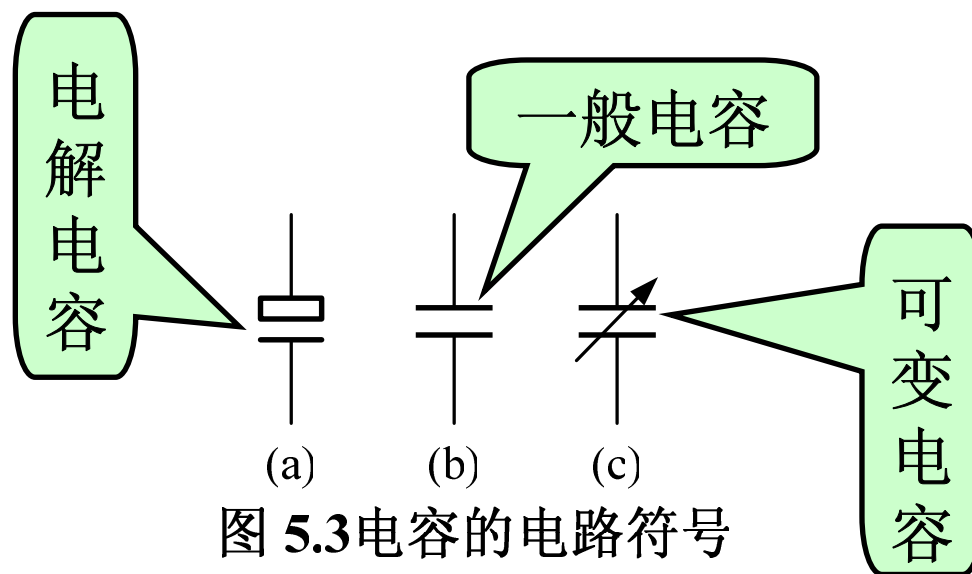


图 5.3 电容的电路符号



§ 5.1 电容元件

2 线性电容定义

一个二端元件，在任一时刻，它的电荷 q 与端电压 u 成正比：

$$q = Cu$$

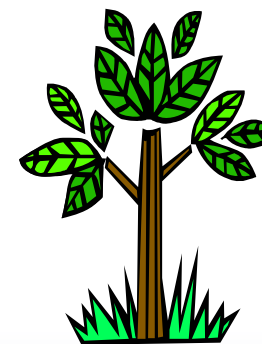
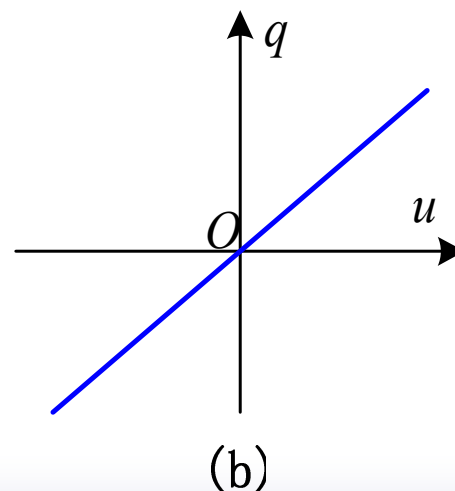
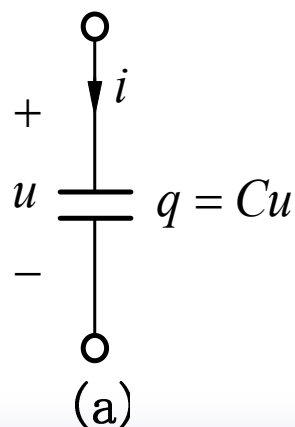
C :电容[系数], 单位: **F**(法拉)。

常用单位: μF (微法), pF (皮法);

$1\mu\text{F} = 10^{-6}\text{F}, 1\text{pF} = 10^{-12}\text{F}$ 。

库伏特性曲线

在 u 、 q 取关联参考方向时，线性电容电荷、电压关系曲线（库伏特性曲线）如图所示。



§ 5.1 电容元件



3 线性电容的电压电流关系:

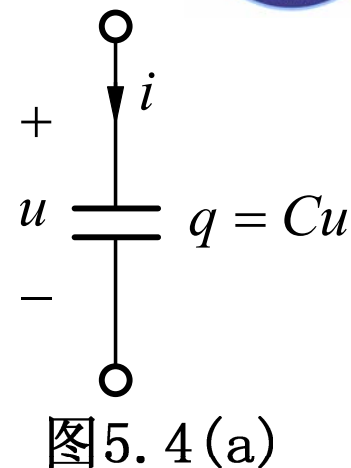
$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} \implies \text{(电容元件的VCR方程)}$$

- 物理意义: 线性电容的端口电流并不取决于当前时刻电压, 而与端口电压的时间变化率成正比, 所以电容是一种**动态元件**。

用电流表示电压:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(\xi) d\xi + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\xi) d\xi = u(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\xi) d\xi \end{aligned}$$

- 物理意义: t 时刻电容上的电压决定于此时刻以前的全部电流, 所以电容属于**记忆元件**。





§ 5.1 电容元件

4 电容的功率和能量

在关联参考方向下，输入线性电容端口的功率：

$$p = ui = Cu \frac{du}{dt}$$

截止到 t 瞬间，从外部输入电容的能量为：

$$\begin{aligned} w_e(t) &= \int_{-\infty}^t p(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^t Cu \frac{du}{d\xi} d\xi = C \int_{u(-\infty)}^{u(t)} u du \\ &= \frac{1}{2} Cu^2 \Big|_{u(-\infty)}^{u(t)} = \frac{1}{2} Cu^2(t) - \frac{1}{2} Cu^2(-\infty) = \frac{1}{2} Cu^2(t) = \frac{q^2}{2C} \end{aligned}$$

电容吸收的总能量全部储存在电场中，没有产生能量损耗，所以电容是无损元件。

§ 5.1 电容元件



电容储能公式: $w_e(t) = \frac{1}{2}Cu^2(t) = \frac{q^2}{2C}$

当 $|u(t)| \uparrow \rightarrow$ 储能 \uparrow 也即吸收能量 \rightarrow 吸收功率

当 $|u(t)| \downarrow \rightarrow$ 储能 \downarrow 也即释放能量 \rightarrow 发出功率

从全过程来看, 电容本身不能提供能量, 电容是**无源元件**。

综上所述, 电容是一种**动态、记忆、储能、无损、无源元件**。



§ 5.1 电容元件

例5.1图示电路，设 $C_1 = 0.5F$ ， $C_2 = 0.25F$ ，电路处于直流工作状态。计算两个电容各自储存的电场能量。

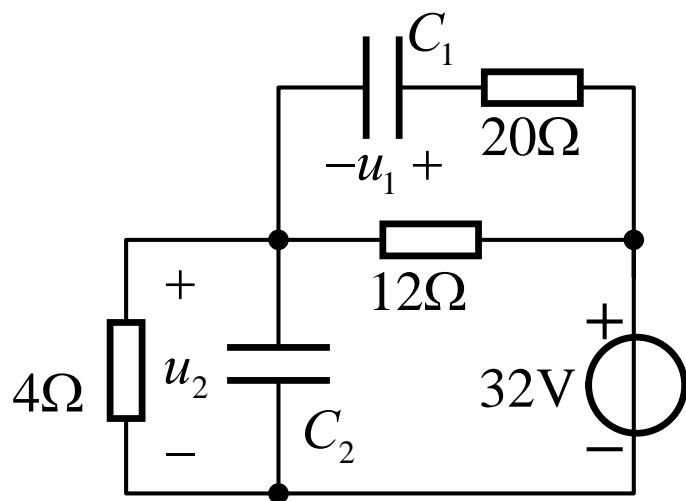


图 5.7

解

在直流电路中电容相当于开路，据此求得电容电压分别为

$$u_1 = \frac{12\Omega}{(12 + 4)\Omega} \times 32V = 24V$$

$$u_2 = 32V - u_1 = 8V$$

所以两个电容储存的电场能量分别为

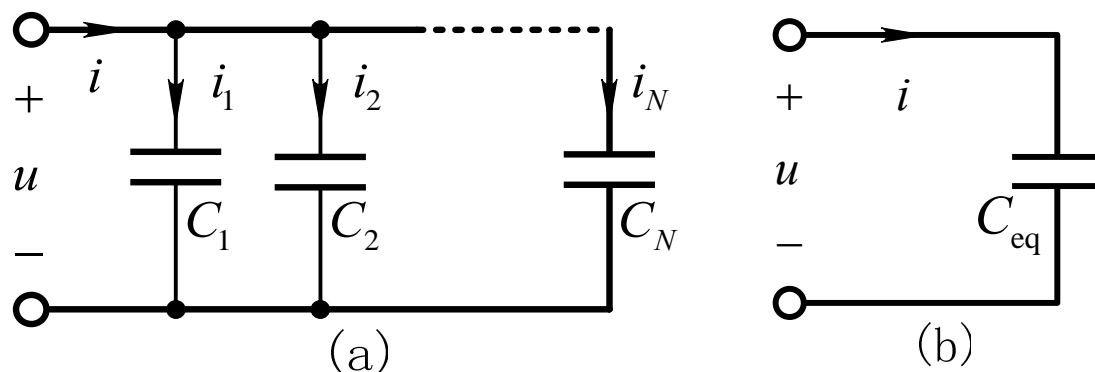
$$w_1 = \frac{1}{2} C_1 u_1^2 = 144J \quad ; \quad w_2 = \frac{1}{2} C_2 u_2^2 = 8J$$

§ 5.1 电容元件



5 电容的串并联等效

(1) 电容的并联等效



根据**KCL**及电容元件的*u*、*i*关系得：

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 + \cdots + i_N = C_1 \frac{du}{dt} + C_2 \frac{du}{dt} + \cdots + C_N \frac{du}{dt} \\ &= (C_1 + C_2 + \cdots + C_N) \frac{du}{dt} = C_{eq} \frac{du}{dt} \end{aligned}$$

并联等效电容等于各电容之和，等效电路如图 5.5(b)所示

图 5.5 电容的并联等效

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_N$$

§ 5.1 电容元件



(2) 电容的串联等效

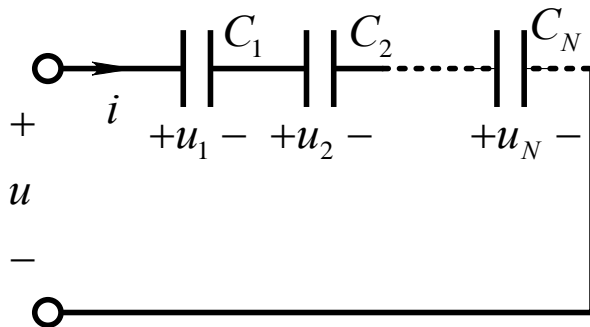


图5.6(a)电容的串联

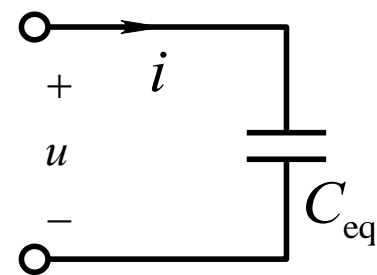


图5.6(b)等效电容

根据KVL及电容元件的 u 、 i 关系得:

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 + \cdots + u_N = \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^t i(\xi) d\xi + \frac{1}{C_2} \int_{-\infty}^t i(\xi) d\xi + \cdots + \frac{1}{C_N} \int_{-\infty}^t i(\xi) d\xi \\ &= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_N} \right) \int_{-\infty}^t i(\xi) d\xi = \frac{1}{C_{\text{eq}}} \int_{-\infty}^t i(\xi) d\xi \end{aligned}$$

串联等效电容的倒数等于各电容的倒数之和。如图5.6(b)所示。

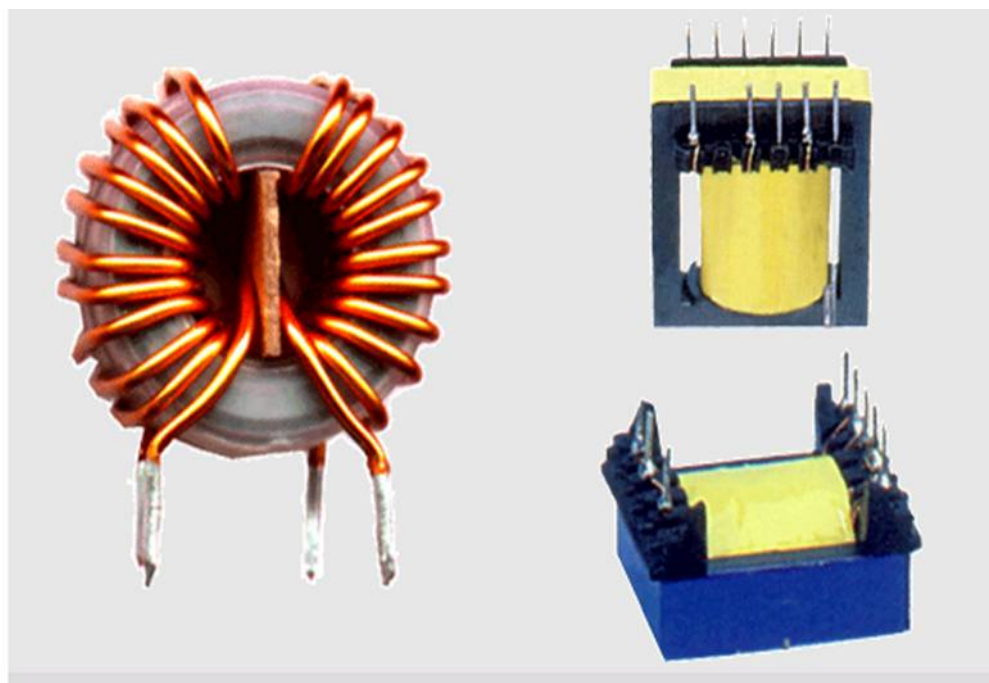
$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_N}$$

§ 5.2 电感元件



1 基本概念

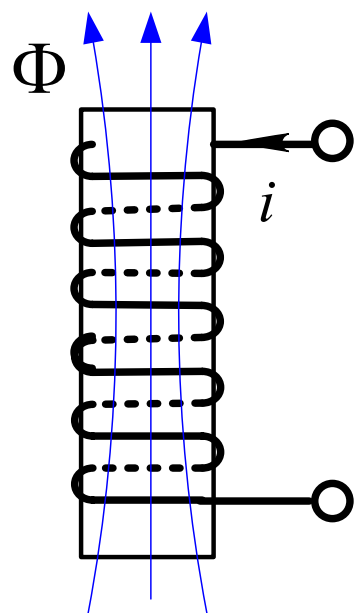
(1) 实际电感线圈示例



§ 5.2 电感元件

(2) 电感线圈原理

线圈中有电流 i 时，其周围即建立磁场，从而在线圈中形成与电流相交链的磁通 Φ ，如图5.10所示。



磁链 Ψ : 磁通和
 $\Psi = N\Phi$ 单位: 韦伯 (Wb)

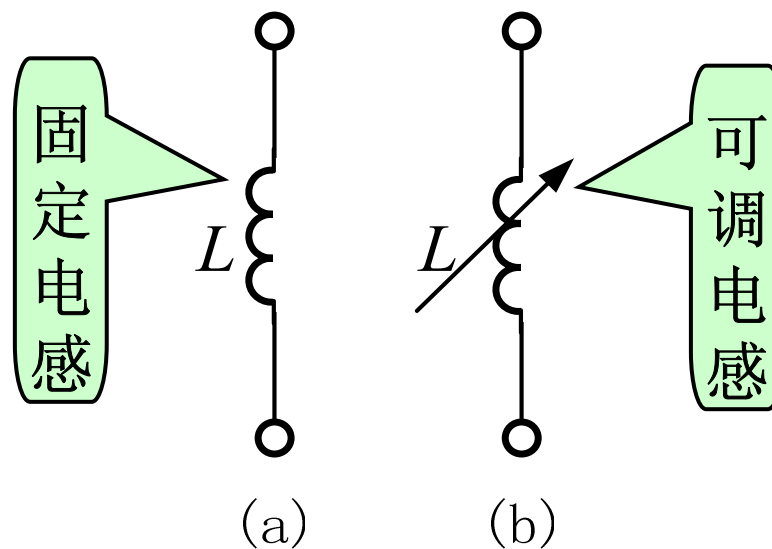


图5.10 电感线圈原理示意图

(3) 电感的符号



§ 5.2 电感元件

2 线性电感定义

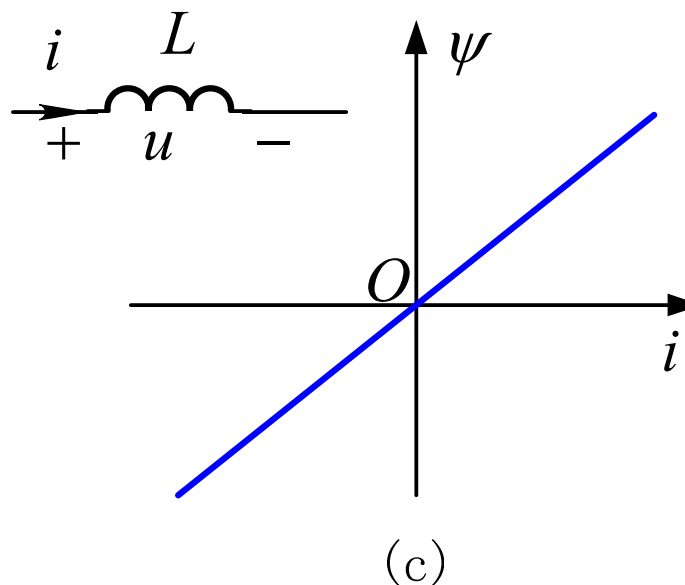
一个二端元件，在任一时刻，它的磁链 Ψ 与电流 i 成正比：

$$\psi = Li$$

L : 电感[系数], 单位: 亨[利] (符号 \mathbf{H})

韦安特性曲线

在电感的磁链与电流的参考方向符合右手螺旋法则时，线性电感磁链、电流关系曲线（韦安特性曲线）如图所示。



§ 5.2 电感元件



3 线性电感的电压电流关系:

$$\begin{array}{c} i \\ \rightarrow \\ + \quad u \quad - \\ L \end{array} \quad u = \frac{d\Psi}{dt} = L \frac{di}{dt} \quad \Longrightarrow \quad (\text{电感元件的VCR方程})$$

即线性电感的端口电压与端口电流的时间变化率成正比，所以电感也属**动态元件**。

用电压表示电流:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\xi) d\xi = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\xi) d\xi$$

上式表明，电感中某一瞬间的电流决定于此瞬间以前的全过程的电压，因此电感也属于**记忆元件**。

§ 5.2 电感元件



4 电感的功率和能量

线性电感的功率为：

$$p = ui = Li \frac{di}{dt}$$



截止到 t 时刻电感吸收的能量为：

$$\begin{aligned} w_m &= \int_{-\infty}^t p(\xi) d\xi = L \int_{i(-\infty)}^{i(t)} i(\xi) di(\xi) = \frac{1}{2} Li^2 \Big|_{i(-\infty)}^{i(t)} \\ &= \frac{1}{2} Li^2(t) - \frac{1}{2} Li^2(-\infty) = \frac{1}{2} Li^2(t) = \frac{\psi^2}{2L} \end{aligned}$$

上式说明电感吸收的总能量全部储存在磁场中，所以电感又是**无损元件**。

从全过程来看，电感本身不能提供能量，电感是**无源元件**。

§ 5.2 电感元件



5 电感的串并联

(1) 电感的串联:

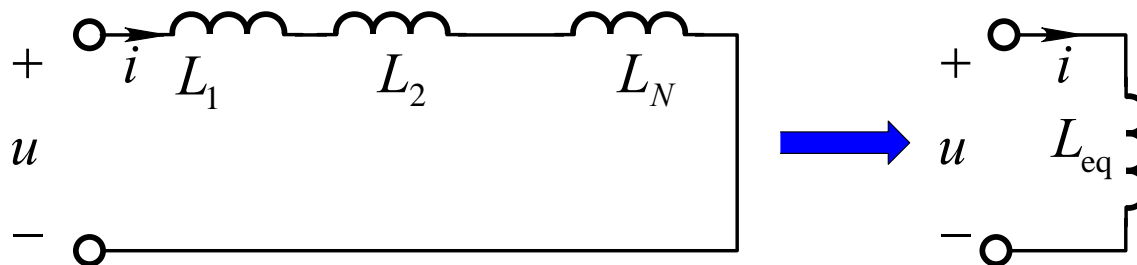


图5.12 电感的串联等效

等效电感等于各电感之和, 即 $L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_N$

(2) 电感的并联:

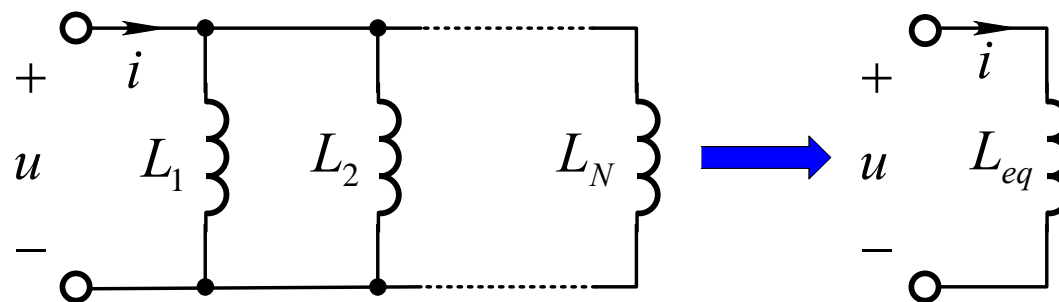


图5.13 电感的并联等效

等效电感的倒数等于各电感倒数之和, 即 $\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_N}$

§ 5.3 耦合电感



1 基本概念

当几个线圈之间存在着磁耦合，便形成了多端口电感。本节只讨论二端口电感，习惯上称为互感[元件]，如图5.15所示。

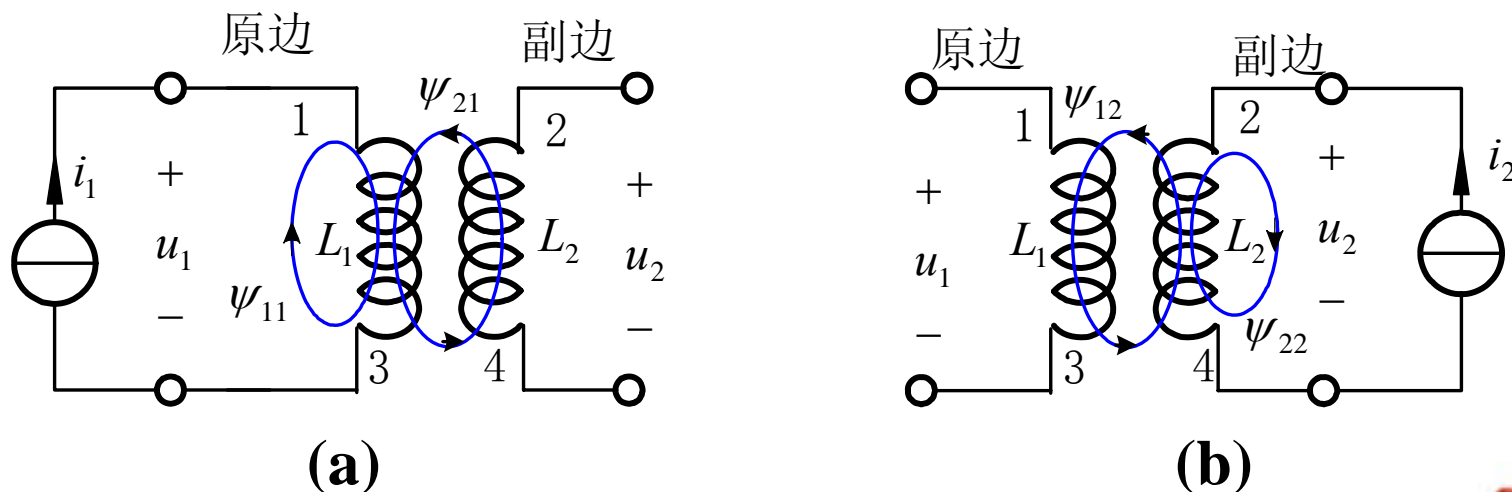


图5.15 两个线圈的磁耦合

	i_1	i_2
自感应磁链	ψ_{11}	ψ_{22}
互感应磁链	ψ_{21}	ψ_{12}





§ 5.3 耦合电感

每一线圈的总磁链是自感磁链和互感磁链代数和。设电流与自感磁链的参考方向符合右手螺旋关系，则

$$\psi_1 = \psi_{11} \pm \psi_{12} = L_{11}i_1 \pm L_{12}i_2$$

$$\psi_2 = \pm\psi_{21} + \psi_{22} = \pm L_{21}i_1 + L_{22}i_2$$

式中互感磁链前正负号，由自感磁链和互感磁链的方向而定，一致取“+”；否则取“-”

L_{11} 、 L_{22} — 自感；简写成 L_1 、 L_2

L_{12} 、 L_{21} — 互感；一般实际线圈 $L_{12} = L_{21} = M$

简写成： $\psi_1 = L_1i_1 \pm Mi_2$

$$\psi_2 = \pm Mi_1 + L_2i_2$$

§ 5.3 耦合电感

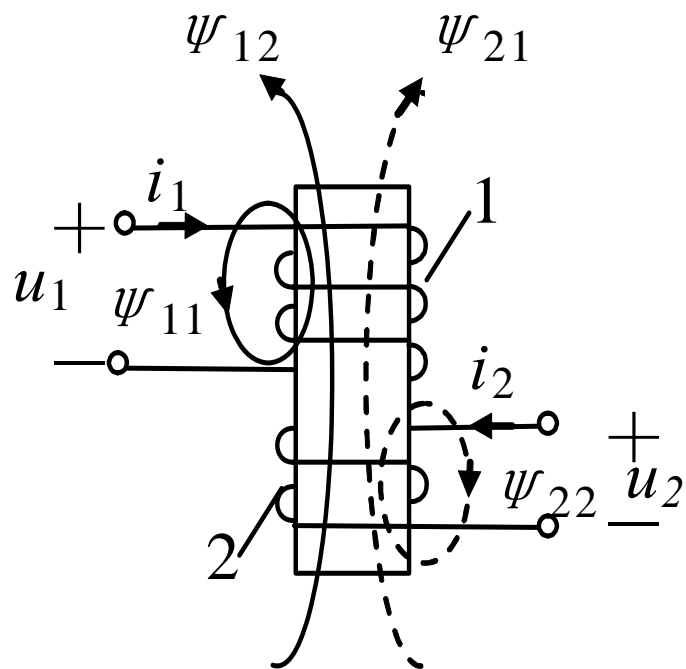


图 5.16a 互感

在图5.16a中，可判断自感磁链和互感磁链的方向。

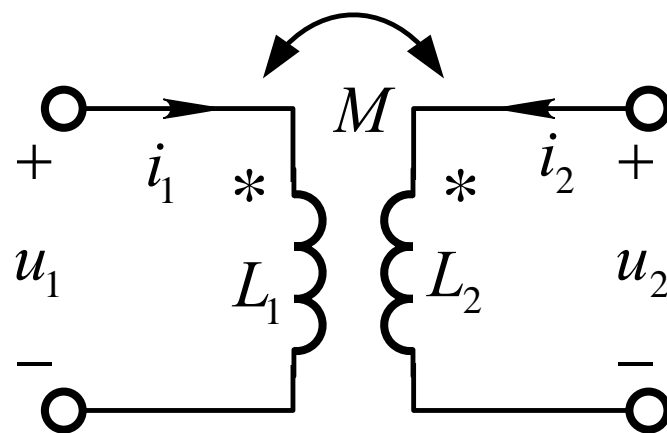


图5.16 b 互感元件的符号

将实际线圈抽象成图5.16(b)所示的电路模型时，无法判断自感磁链和互感磁链的方向。

§ 5.3 耦合电感

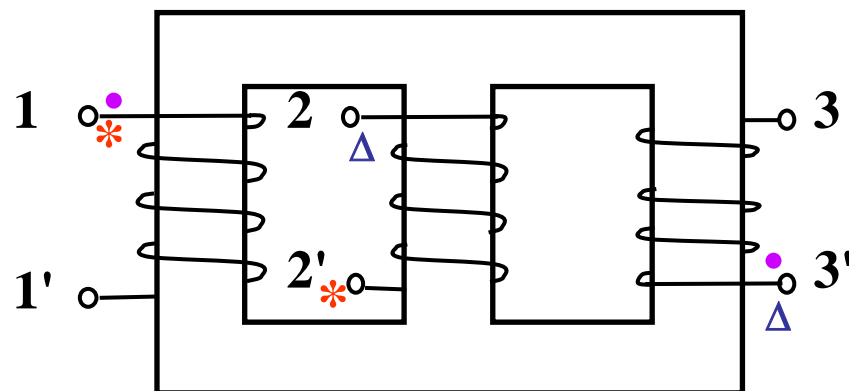


2 同名端:

当两个电流分别从两个线圈的对应端子流入，所产生的磁场相互加强时，这两个对应端子称为同名端。

同名端用“*”表示。

例： 确定图示耦合线圈的同名端。



则1和2'、1和3'、2和3'互为同名端。

§ 5.3 耦合电感

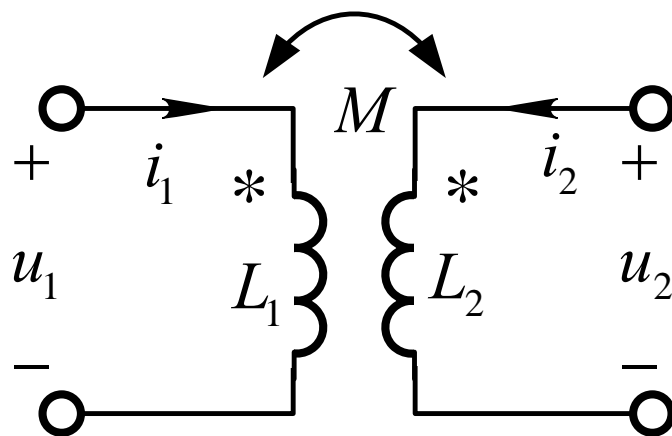


图5.16 b 互感元件的符号

当两个端口电流都流进（或流出）同名端，表示它们所激发的自感磁链和互感磁链方向一致，互感磁链前应取正号。

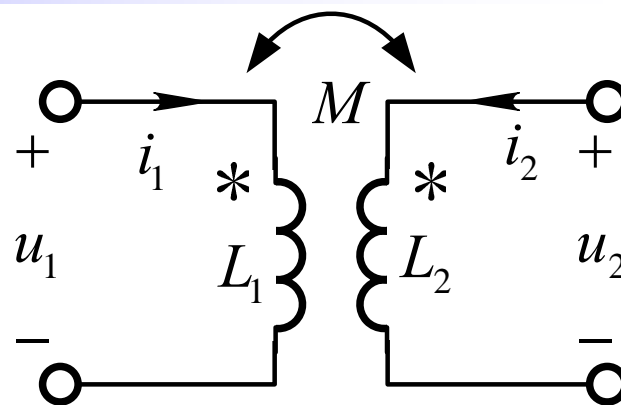
当两个电流的参考方向是从非同名端流入时，它们所激发的自感磁链与互感磁链方向相反，互感磁链前应取负号。

§ 5.3 耦合电感



3 互感的电压电流关系

在端口电压、电流为关联参考方向，并且自感磁通与电流符合右手螺旋关系时，互感元件的电压电流方程为



互感元件的符号

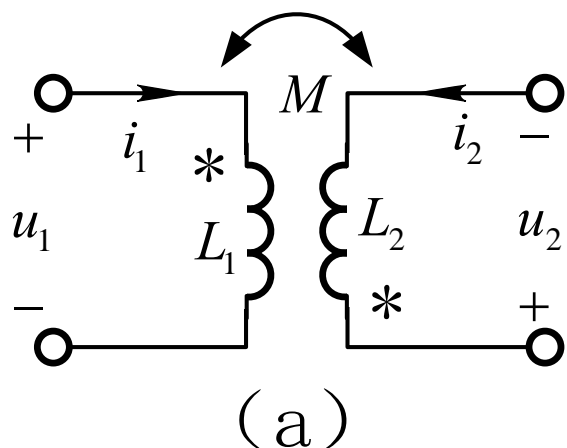
$$\begin{cases} u_1 = \frac{d\Psi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = \frac{d\Psi_2}{dt} = \pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

若式中 u_1 、 i_1 或 u_2 、 i_2 的参考方向相反，则 L_1 或 L_2 前应添入负号；若 u_1 、 i_2 或 u_2 、 i_1 的参考方向相对星标 * 是相同的，则 M 前取正号，否则应取负号。



§ 5.3 耦合电感

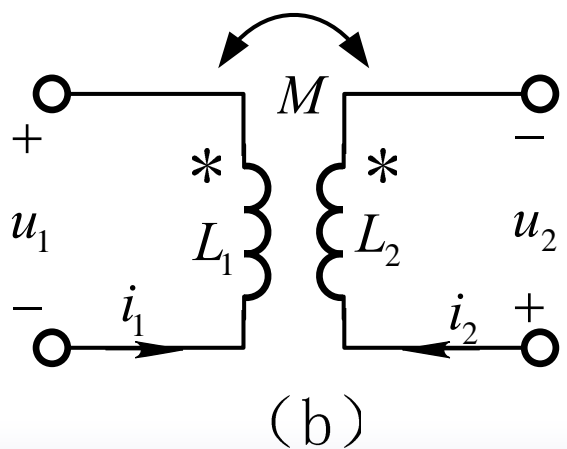
例1: 列出图示两个互感元件的特性方程



解:

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt}$$



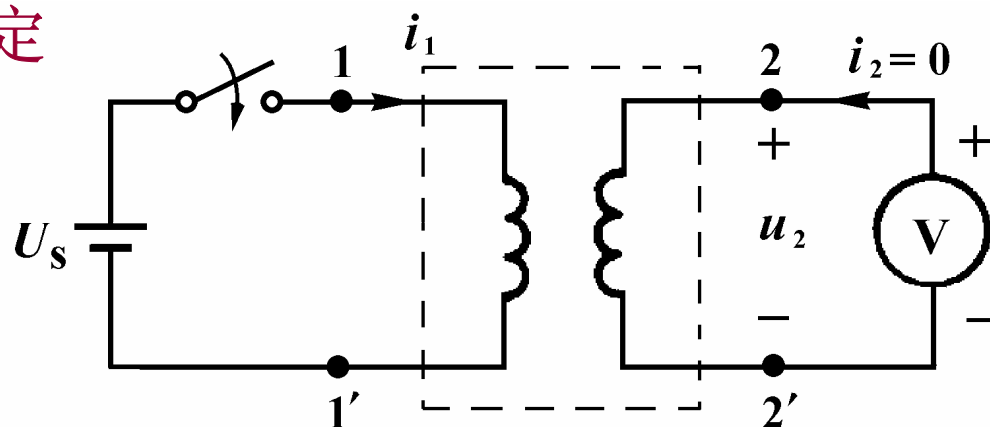
$$u_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

§ 5.3 耦合电感



例2：同名端的实验测定



当开关闭合时： $\frac{di_1}{dt} > 0$

如果发现电压表指针正向偏转： $u_2 = M \frac{di_1}{dt} > 0$

说明 1和2是同名端。



当断开S时，如何判定？

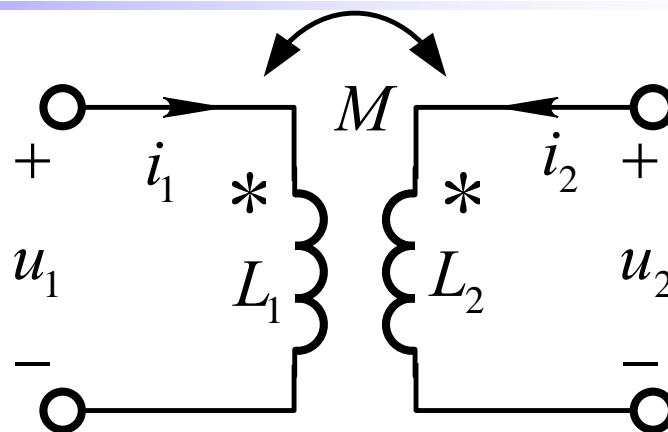
§ 5.3 耦合电感



4 互感的功率与能量

(1) 功率

在关联参考方向下：



$$P = u_1 i_1 + u_2 i_2$$

$$= [L_1 (di_1/dt) \pm M (di_2/dt)] i_1 + [\pm M (di_1/dt) + L_2 (di_2/dt)] i_2$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 \right) \pm \frac{d}{dt} (M i_1 i_2) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right)$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 \pm M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) = \frac{dw_m}{dt}$$



§ 5.3 耦合电感



(2) 能量

输入互感的总能量将全部转化为磁场能量，磁能

$$w_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2 \quad w_m \geq 0$$

如果没有磁耦合， $M=0$ ，磁能就是两个自感元件分别储能之和。存在磁耦合时，要增减一项 $M i_1 i_2$ ，增与减取决于互感的作用是使磁场增强还是使磁场减弱。

§ 5.3 耦合电感

5 含互感元件电路的联接

(1) 互感元件的串联

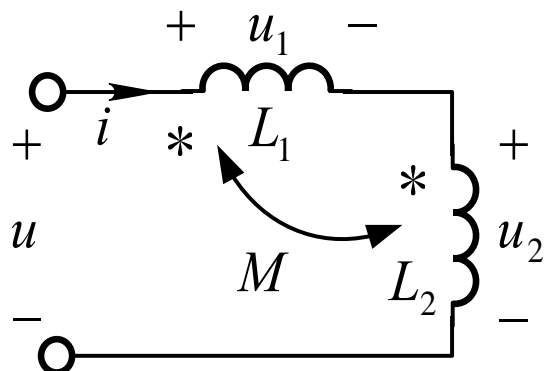


图5.18 a

电流从同名端流入
→ 正串(或顺接)

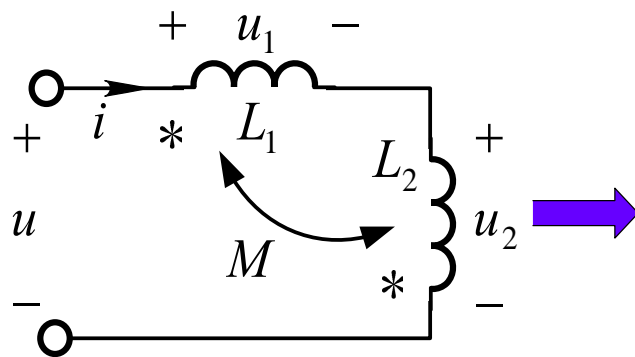


图5.18 b

电流从异名端流入
→ 反串(或反接)

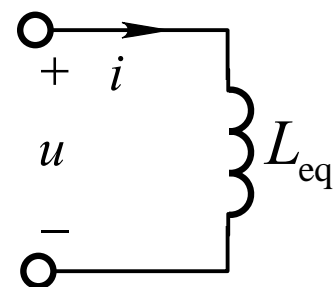


图5.18 c

$$u = u_1 + u_2 = \left(L_1 \frac{di}{dt} \pm M \frac{di}{dt} \right) + \left(\pm M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} \right) = (L_1 + L_2 \pm 2M) \frac{di}{dt} = L_{\text{eq}} \frac{di}{dt}$$

由此可得串联等效电感如图5.18c所示, 为 $L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 \pm 2M$

§ 5.3 耦合电感



(2) 互感元件的并联

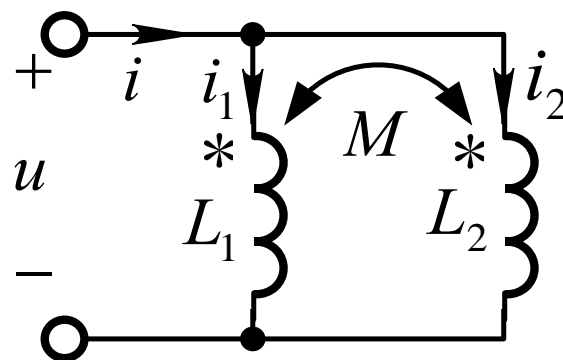


图5.19(a) 互感两同名端并联电路

图5.19(a)表示两个同名端相接。为求其等效电路，分别列**KCL**和**KVL**方程：

$$u = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (1)$$

$$u = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (2)$$

$$i = i_1 + i_2 \quad (3)$$

§ 5.3 耦合电感



$$u = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (1)$$

$$u = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (2)$$

$$i = i_1 + i_2 \quad (3)$$

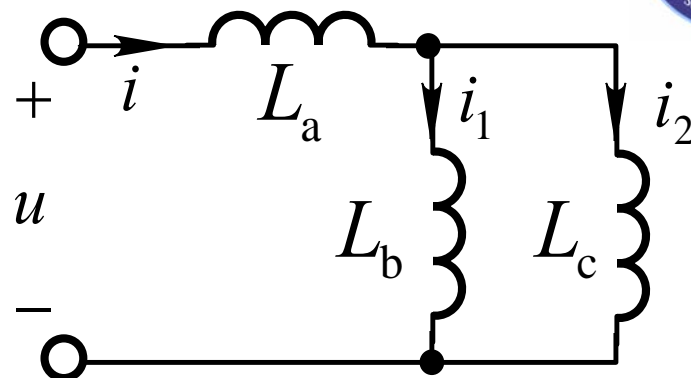


图5.19(b)

(3) 代入 (1) 得: $u = M \frac{di}{dt} + (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} = L_a \frac{di}{dt} + L_b \frac{di_1}{dt}$

(3) 代入 (2) 得: $u = M \frac{di}{dt} + (L_2 - M) \frac{di_2}{dt} = L_a \frac{di}{dt} + L_c \frac{di_2}{dt}$

由此消去互感的等效电路如图5.19(b)

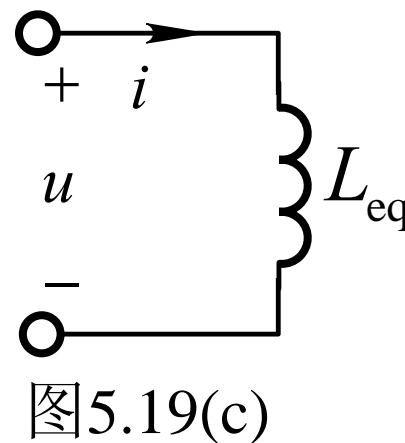
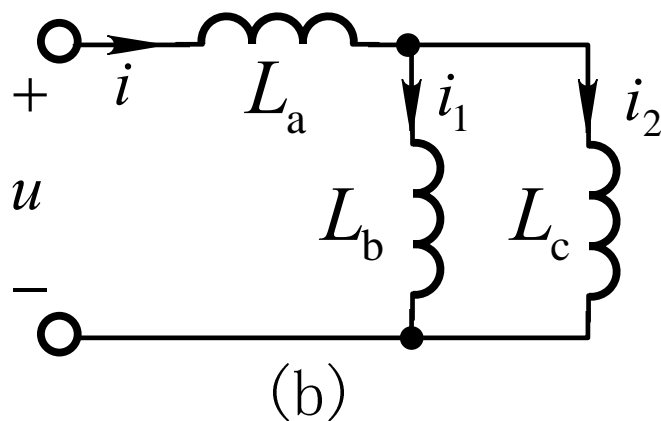
$$\left. \begin{aligned} L_a &= M \\ L_b &= L_1 - M \\ L_c &= L_2 - M \end{aligned} \right\} (5.36)$$

图中各等效电感为



§ 5.3 耦合电感

如无需计算电流 i_1 、 i_2 ，根据电感的串、并联等效，图5.19(b)可进一步等效成一个电感，如图5.19(c)，



等效电感
$$L_{\text{eq}} = L_a + \frac{L_b L_c}{L_b + L_c} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

同理，**异名端联接**时的总等效电感为
$$L' = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

§ 5.3 耦合电感



(3) 互感线圈的T型等效电路

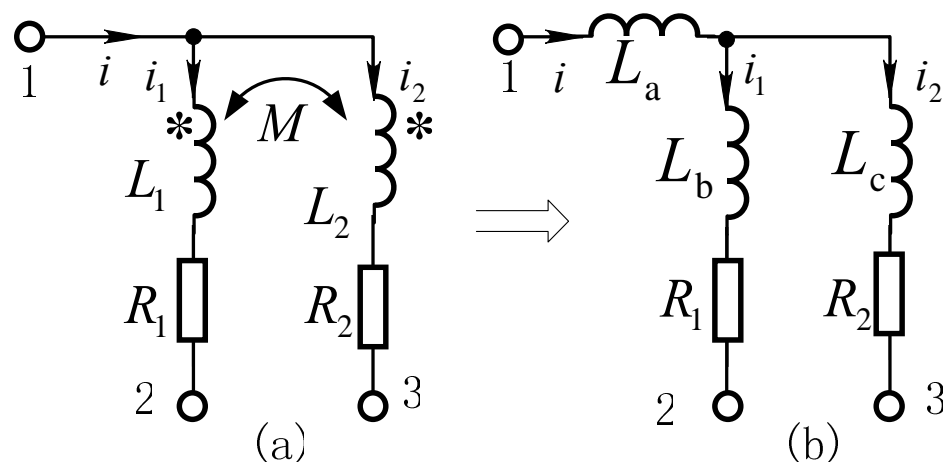


图5.20 互感的T型等效电路

图5.20(b)中各等效电感为

$$\left. \begin{aligned} L_a &= M \\ L_b &= L_1 - M \\ L_c &= L_2 - M \end{aligned} \right\}$$

在较接近实际的电路模型中两自感都含有串联电阻。



§ 5.3 耦合电感

6 耦合系数

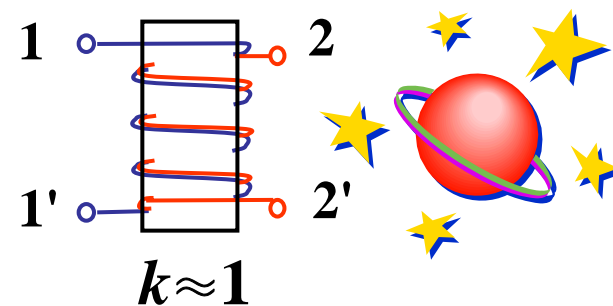
定义耦合系数 $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ 用来衡量互感耦合的程度

对于实际的耦合线圈，无论何种联接关系，其等效电感均为正值。所以自感和互感满足如下关系

$$M \leq \frac{1}{2}(L_1 + L_2) \quad M \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

耦合系数满足 $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1$

$$0 \leq k \leq 1 \quad \begin{cases} k = 0 & \text{两个线圈无耦合} \\ k = 1 & \text{两个线圈全耦合} \end{cases}$$



§ 5.4 理想变压器



1 理想变压器基本概念

理想变压器是实际电磁耦合元件的一种理想化模型，如图 5.22。

理想化认为

- 1) 铁心的磁导率 $\mu \rightarrow \infty$
- 2) 每个线圈的漏磁通为零,即两个线圈为全耦合
- 3) 线圈电阻为零,端口电压等于感应电动势
- 4) 铁心的损耗为零

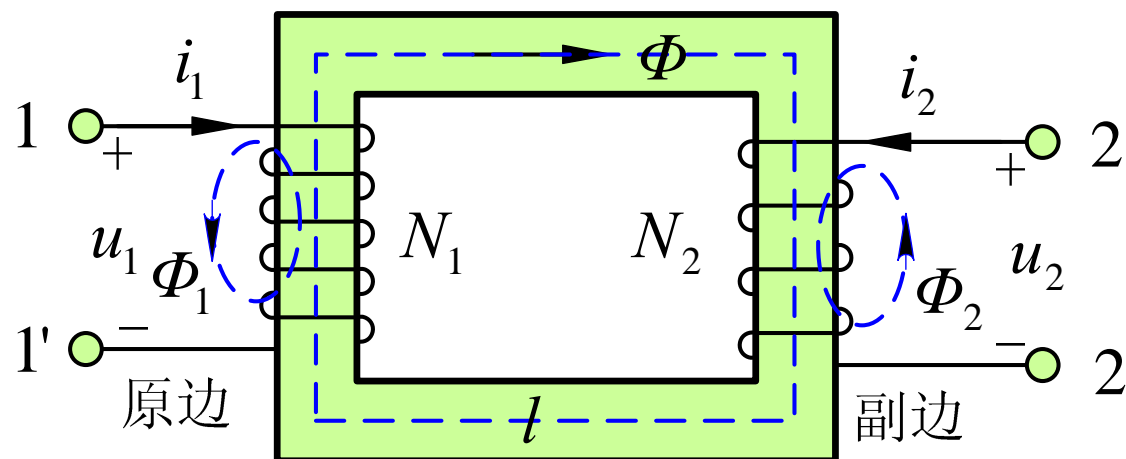


图5.22 变压器示意图



§ 5.4 理想变压器



相应地有

$$\Psi_1 = N_1 \Phi, \quad \Psi_2 = N_2 \Phi$$

$$u_1 = \frac{d\Psi_1}{dt} = N_1 \frac{d\Phi}{dt}, \quad u_2 = \frac{d\Psi_2}{dt} = N_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0$$

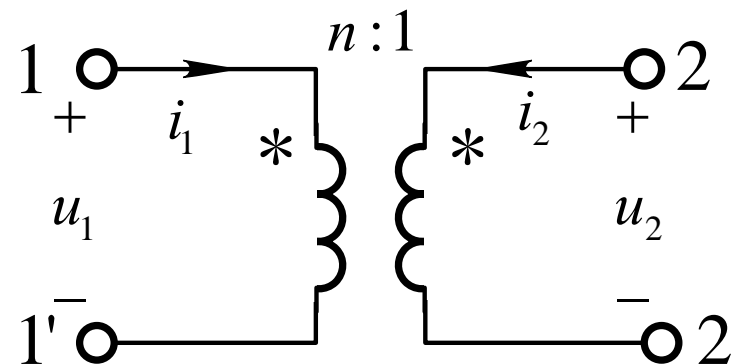


图5.23 理想变压器的符号

变比（匝数比）

由此得图5.23理想变压器的端口方程

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} = n \text{ 或 } u_1 = nu_2 \quad (5.45)$$

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{N_2}{N_1} = -\frac{1}{n} \text{ 或 } i_1 = (-1/n)i_2 \quad (5.47)$$



§ 5.4 理想变压器

理想变压器方程与 u 、 i 的参考方向和两线圈同名端位置有关，图 5.24 给出了一些同名端与理想变压器端口方程的关系示例。

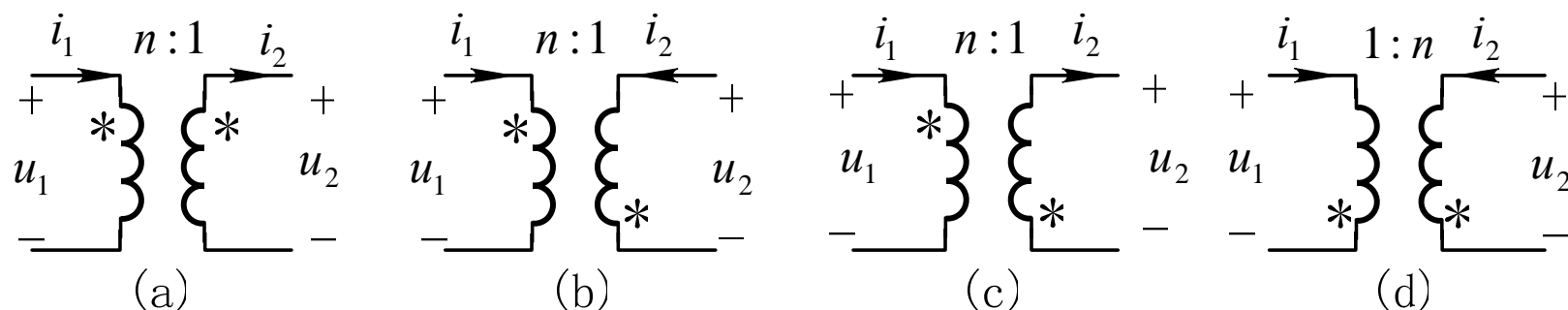


图5.24 同名端与理想变压器端口方程的关系示例

对应的特性方程分别为(注意符号)

$$\begin{cases} u_1 = nu_2 \\ i_1 = \frac{1}{n} i_2 \end{cases}$$

(a)

$$\begin{cases} u_1 = -nu_2 \\ i_1 = \frac{1}{n} i_2 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} u_1 = -nu_2 \\ i_1 = -\frac{1}{n} i_2 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{n} u_2 \\ i_1 = -ni_2 \end{cases}$$

(d)

§ 5.4 理想变压器



2 理想变压器的性质

(1) 功率性质

$$\begin{cases} u_1 = nu_2 \\ i_1 = -\frac{1}{n}i_2 \end{cases}$$

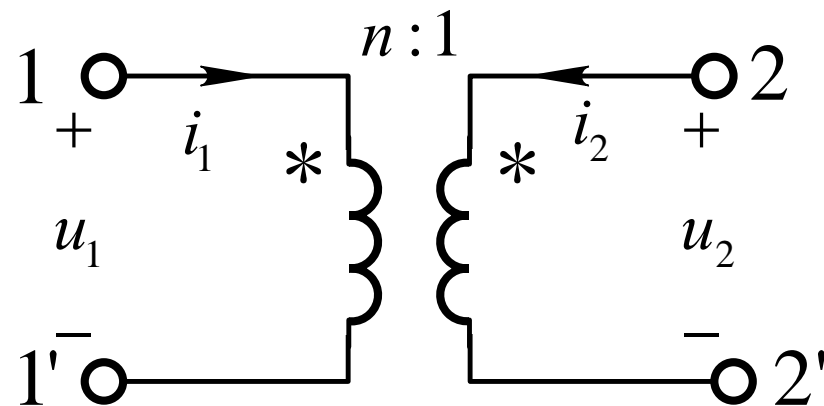


图5.23 理想变压器的符号

$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 = (nu_2) \left(-\frac{i_2}{n}\right) + u_2 i_2 = -u_2 i_2 + u_2 i_2 = 0 \quad (5.48)$$

说明：变压器元件不仅是无源的，而且每一瞬间输入功率等于输出功率，即传输过程中既无能量的损耗，也无能量的存储，属于非能元件。

§ 5.4 理想变压器



(2) 电阻变换性质

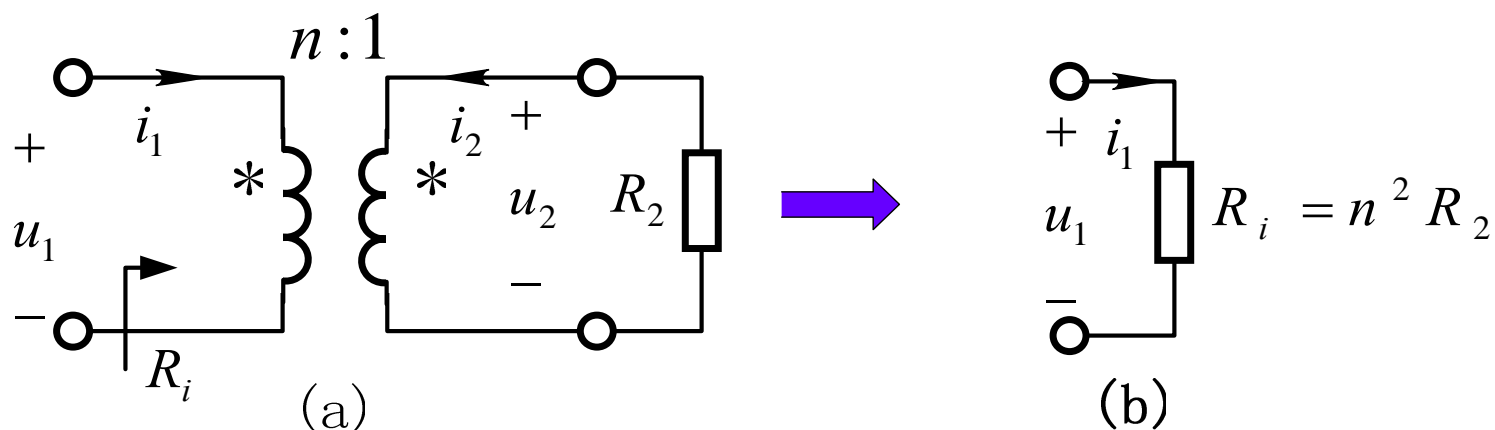


图5.25 理想变压器的电阻变换

变压器输入端口等效电阻为

$$R_i = \frac{u_1}{i_1} = \frac{nu_2}{-i_2/n} = n^2 R_2$$

即当理想变压器输出端口接电阻 R_2 时，折算到输入端口的等效电阻为 $n^2 R_2$



小结

本节介绍电容元件、电感元件。它们是重要的储能元件。其端口电压、电流关系不是代数关系而是微分或积分关系，因此又称为动态元件。通过本章学习，应掌握电容元件、电感元件、互感元件的特性方程、能量计算及各种等效变换。此外还介绍理想变压器。