第二次作业

- 若函数$f(x)$足够光滑，$f(4)=1, f[1,4]=2, f[1,3,4]=1, f[1,2,3,4]=-1$

  写出$f(x)$的$Newton$插值多项式

  计算$f(2)$和$f[2,3,4]$

  解：

  $N_3(x)=f(4)+(x-4)f[1,4]+(x-4)(x-1)f[1,3,4]+(x-4)(x-1)(x-3)f[1,2,3,4]$

  $=1+2(x-4)+(x-4)(x-1)-(x-4)(x-1)(x-3)$

  $f(2)=N_3(1)=1-4-2-2=-7$

  $f[1,2,3,4]=\frac{f[1,3,4]-f[2,3,4]}{1-2}=-1$

  $f[2,3,4]=f[1,3,4]-(-1)\times(-1)=1-1=0$

- 要计算三角函数$sinx$的函数值表，已知表值有五位小数的近似值，要求用线性插值引起的截断误差不超过标志的舍入误差，试决定其最大允许步长.

  解：

  设$h=x_i-x_{i-1}$

  $\|R(x)\|=\|\frac{f''(\theta)(x-x_i)(x-x_{i-1})}{2!}\|,\ \theta\in(x_{i-1},x_i)$

  由于$\|sin(\theta)\|\le 1$

  所以$\|R(x)\|\le\frac{1}{2}\|(x-x_i)(x-x_{i-1})\|\le\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{8}=\frac{h^2}{8}<\frac{1}{2}\times 10^{-5}$

  所以$h<2\times 10^{-2.5}$

- $f(x)=x^7-125x^5+237x^3-999$,计算差商$f[2^0,2^1], f[2^0,2^1,\dots,2^7]$以及$f[2^0,2^1,\dots,2^8]$

  解：

  $f(2^0)=1^7-125\times 1^5+237\times 1^5-999=-886$

  $f(2^1)=2^7-125\times 2^5+237\times 2^3-999=-2975$

  $f[2^0,2^1]=\frac{f(2^1)-f(2^0)}{2^1-2^0}=-2089$

  $f[2^0,2^1,\dots,2^7]=\frac{f^{(7)}(\theta)}{7!}=\frac{7!}{7!}=1$

  $f[2^0,2^1,\dots,2^8]=\frac{f^{(8)}(\theta)}{8!}=\frac{0}{7!}=0$

- 给定数据$f(3)=5.00, f(5)=15.00, f'(5)=7.00$.做出二次插值多项式，写出插值余项，并计算$f(3.7)$的近似值.

  解：

  采用$Newton$插值形式构造该多项式

z_i	$f(z_i)$	$f[z_{i-1},z_i]$	$f[z_{i-2},z_{i-1},z_i]$
3	5		
5	15	5	
5	15	7	1

  $H_2(x)=5+5(x-3)+1(x-3)(x-5)=5+5x-15+x^2-8x+15=x^2-3x+5$

  $R(x)=\frac{f^{(3)}(\theta)}{3!}(x-5)^2(x-3),\theta\in(3,5)$

  $f(3.7)\approx H(3.7)=7.59$

- 给定数据$f(1)=0.5, f(2)=1, f'(1)=0.5, f'(2)=-1, f''(2)=1$.构造四次插值多项式并写出插值余项

构造差商表如下所示

z_i	$f(z_i)$	$f[z_{i-1},z_i]$	$f[z_{i-2},z_{i-1},z_i]$	$f[z_{i-3},z_{i-2},z_{i-1},z_i]$	$f[z_{i-4},z_{i-3},z_{i-2},z_{i-1},z_i]$
1	0.5				
1	0.5	0.5			
2	1	0.5	0		
2	1	-1	-1.5	-1.5	
2	1	-1	0.5	2	3.5

$H(x)=0.5+0.5(x-1)+0(x-1)^2+(-1.5)(x-1)^2(x-2)+3.5(x-1)^2(x-2)^2$

$R(x)=R(x)=\frac{f^{(5)}(\theta)}{5!}(x-1)^2(x-2)^3,\theta\in(1,2)$

- 证明以下性质
  - k阶差商$f[x_0,x_1,\ldots,x_k]$ 是由函数值$f(x_0),f(x_1),\ldots,f(x_k)$的线性组合而成，即

$$f\left[x_0,x_1,\ldots,x_k\right]=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{\left(x_i-x_0\right)\cdots\left(x_i-x_{i-1}\right)\left(x_i-x_{i+1}\right)\cdots\left(x_i-x_k\right)}f\left(x_i\right)$$

证明：采用数学归纳法证明

当$k=1$时，$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}$,显然成立

不妨设当$k=n$时成立，则

$f[x_0,x_1,\ldots,x_{n+1}]$

$=\frac{1}{x_{n+1}-x_0}(f[x_1,\ldots x_{n+1}]-f([x_0,\ldots,x_n])$

$=\frac{1}{x_{n+1}-x_0}(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_{n+1})}f(x_i)-\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}f(x_i))$

$=\frac{1}{x_{n+1}-x_0}(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{x_i-x_0}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_{n+1})}f(x_i)-\sum_{i=0}^{n}\frac{x_i-x_{n+1}}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)(x_i-x_{n+1})}f(x_i))$

$=\frac{1}{x_{n+1}-x_0}(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{n+1}-x_0}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_{n+1})}f(x_i)+\frac{x_{n+1}-x_0}{(x_{n+1}-x_0)(x_{n+1}-x_1)\ldots(x_{n+1}-x_{n-1})(x_{n+1}-x_n)}f(x_{n+1})$
$-\frac{x_0-x_{n+1}}{(x_0-x_1)\ldots(x_0-x_n)(x_0-x_{n+1})}f(x_0))$

$=\sum_{i=0}^{n+1}\frac{1}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_{n+1})}f\left(x_i\right)$

  - 若$i_0,i_1,\ldots,i_k$为$0,1,\ldots k$的任一排列，则

$$f\left[x_0,x_1,\ldots,x_k\right]=f\left[x_{i_0},x_{i_1},\ldots,x_{i_k}\right]$$

证明：由上题的结论，$f\left[x_0,x_1,\ldots,x_k\right]$的下标满足对称性，与下标次序无关，故上式显然成立

  - 若$f(x)$是m次多项式,则$f[x_0,x_1,\ldots.,x_{k-1},x]$为$m-k$次多项式

采用数学归纳法证明

当$k=1$时,令$g(x)=f(x)-f(x_0)$,$g(x_0)=0$

由于$g(x)$是多项式，故$g(x)$含有因式$(x-x_0)$,易知$g(x)$为$m-1$阶多项式

不妨设当$k=n$时成立，$f[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x]$为$m-n$次多项式

当$k=n+1$时，$f[x_0,x_1,\ldots,x_n,x]=\frac{f[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n]-f[x_1,\ldots,x_{n-1},x]}{x_0-x}$

令$g(x)=f[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n]-f[x_1,\ldots,x_{n-1},x]$,显然有$g(x_0)=0$

由于$g(x)$为多项式，故$g(x)$含有$(x-x_0)$作为因子，易知$g(x)$为$m-n-1$次多项式

  - 若多项式$p(x)\in P_n(x)$插值于$f(x_0),f(x_1),\ldots,f(x_n)$,则$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]$等于$p(x)$最高次项$x^n$的系数

证明：由$p(x)\in P_n(x)$插值于$f(x_0),f(x_1),\ldots,f(x_n)$,可知

$p\left[x_0,x_1,\ldots,x_k\right]=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_k)}p\left(x_i\right)$

$=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_k)}f\left(x_i\right)$

$=f[x_0,x_1,\ldots,x_k]$

由$n+1$个点上n次插值多项式的唯一性，可知

$p(x)=p(x_0)+\sum_{i=1}^{n}(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})p[x_0,x_1,\dots,x_i]$

由该表达式易知求和项中只有$(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})p[x_0,x_1,\dots,x_n]$为$n$次多项式，且$n$次项系数为$p[x_0,x_1,\dots,x_n]$也即$f[x_0,x_1,\dots,x_n]$