第七章

二阶电路

2010年11月18日

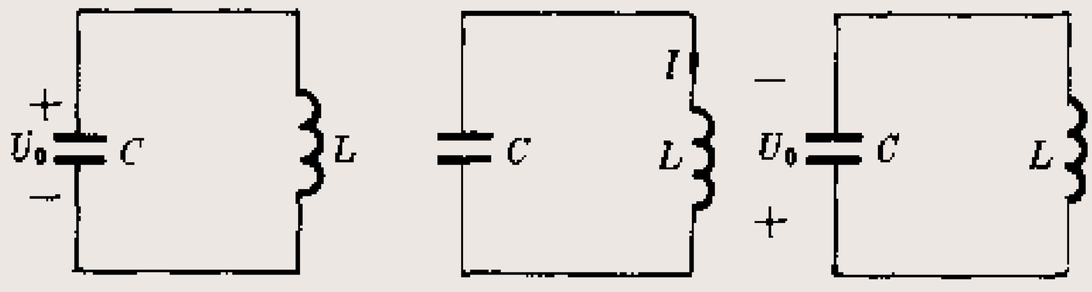
§7-1 LC电路中的正弦振荡

- 包含一个电容和一个电感，或两个电容，或两个电感的动态电路称为二阶电路。这类电路可以用一个二阶微分方程或两个联立的一阶微分方程来描述。
- 二阶电路中可包含任意数目的电阻、独立源和受控源，这类电路仍然可以运用分解方法进行分析。

LC电路

- 由电容和电感组成的电路成为LC电路，设电容的初始电压为U_0，电感的初始电流为零，它的零输入响应是什么呢?
- 在初始时刻，能量全部贮于电容中，电感中没有贮能。这时电路的电流为零，但电流的变化率却不为零，这是因为电感电压必须等于电容电压，电容电压不为零，电感电压也就不为零，而电感电压的存在，意味着$di/dt≠0$。因此电流将开始增长，存贮于电容中的能量将发生转移。

$$u = L\frac{di}{dt}$$



(a) (b) (c)

LC电路能量转移

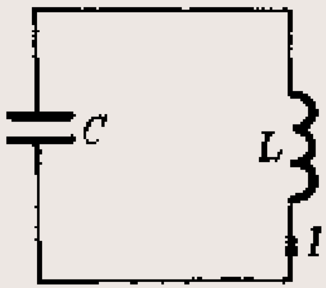
- 随着电容放电，电流增长，能量逐渐转移到电感的磁场中。当电容电压下降到零的瞬间，电感电压为零，因而$di/dt=0$，电流达到了最大值I，如图(b)所示，此时贮能全部转入到电感。

$$i = C\frac{du}{dt}$$

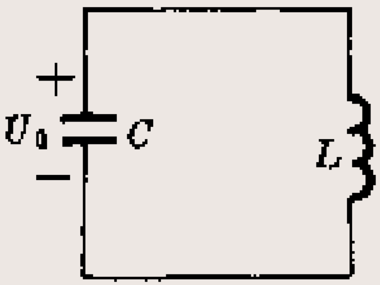
- 虽然电容电压为零，但它的电压变化率却不为零。这是因为电容中电流必须等于电感中的电流。由于电感电流不能跃变，电路中的电流将从I逐渐减小，电容在这个电流的作用下又被充电，只是电压的极性与以前不同。
- 当电感中电流下降到零的瞬间，能量又再度全部贮于电容之中，电容电压又达到了U_0，但极性相反，如图(c)所示。

LC电路能量转移

- 以后，电容又开始放电，但电流方向和上一次电容放电的方向相反，当电容电压再次下降到零的瞬间，能量又全部贮于电感之中，电流又达到了最大值I，如图(d)所示。
- 接着，电容又在电流的作用下充电，当电流为零的瞬间，能量全部返回到电容，电容电压的大小和极性又和初始时刻一样，如图(e)所示。



(d)



(e)

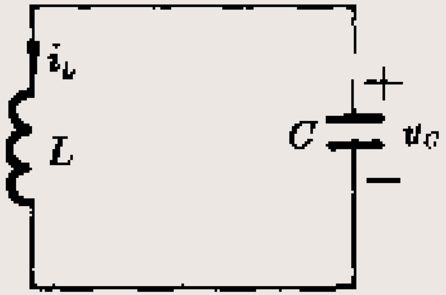
等幅振荡和阻尼振荡

- 在由电容和电感两种不同的贮能元件构成的电路中，随着贮能在电场和磁场之间的往返转移，电路中的电流和电压将不断地改变大小和极性，形成的振荡。

1. 如果电路中不存在电阻，这种由初始贮能维持的振荡是一种等幅振荡。
2. 如果电路中存在电阻，那末，贮能终将被电阻消耗，振荡就不可能是等幅的，幅度将逐渐衰减而趋于零。这种振荡称为阻尼振荡或衰减振荡。
3. 如果电阻较大，贮能在初次转移时它的大部分就可能被电阻所消耗，因而不可能发生贮能在电场与磁场间的往返转移现象。

LC回路中振荡的简单的分析

已知 L=1H、C=1F，$u_C(0)$=1V、$i_L(0)$=0。



根据元件的VAR可得

$$C\frac{du_C}{dt}=-i_L\,,\qquad L\frac{di_L}{dt}=u_C$$

这是一个二阶电路，由两个联立的一阶微分方程描述，它表明电压的存在要求有电流的变化；电流的存在要求有电压的变化。因此电压、电流都必须处于不断的变化状态之中。

$$\frac{d^2u_C}{dt^2}+u_C=0$$

结合到初始条件：$u_C(0)$=1V、$i_L(0)$=0

LC回路中的贮能

可以得到

$$u_C(t) = \cos t$$

$$i_L(t) = \sin t$$

LC回路中的等幅振荡是按正弦方式随时间变化的。LC回路中的贮能为

$$w(t) = \frac{1}{2}Li^2(t) + \frac{1}{2}Cu^2(t)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) = \frac{1}{2}J$$

常量

$$w(0) = \frac{1}{2}Li^2(0) + \frac{1}{2}Cu^2(0) = \frac{1}{2}J$$

表明：贮能不断地在电场利磁场之间往返，永不消失。

§ 7-2 RLC串联电路的零输入响应
——过阻尼情况

❖ 对电感和电容的二阶电路，运用戴维南定理可得图(b)所示的*RLC*串联电路。

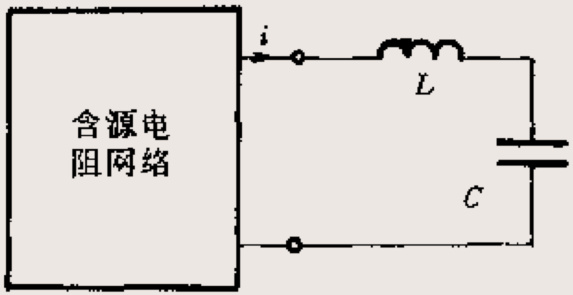
❖ 对每一元件，可以写出*VAR*为

$$i = C\frac{du_C}{dt}$$

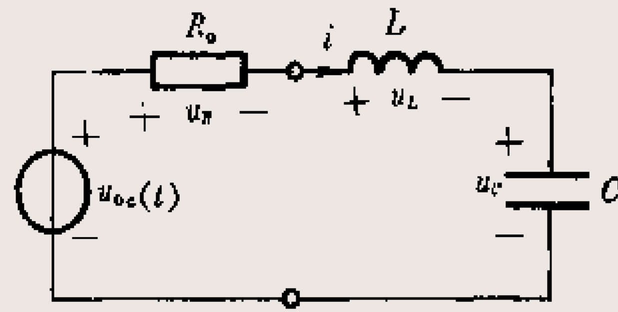
$$u_R = Ri = RC\frac{du_C}{dt}$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = LC\frac{d^2u_C}{dt}$$

❖根据*KVL*可得 $$LC\frac{d^2u_C}{dt} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = u_{oc}(t)$$



(a)



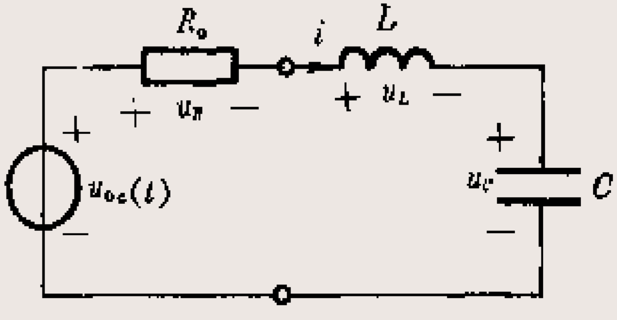
(b)

初始条件

$$LC\frac{d^2u_C}{dt}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=u_{oc}(t)$$

- 这是一个线性二阶常系数常微分方程，未知量为$u_C(t)$。为求解答此微分方程，必须知道两个初始条件，即$u_C(0)$以及$u_C'(0)$。
- $u_C(0)$为电容的初始状态，$u_C'(0)$为：

$$u'_C(0)=\frac{du_C(t)}{dt}\bigg|_0=\frac{i(t)}{C}\bigg|_0=\frac{i(0)}{C}$$



(b)

RLC电路的零输入响应

❖ *RLC*电路的零输入响应，即$u_{oc}(0)=0$时电路的响应。

$$LC\frac{d^2u_C}{dt}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=0$$

$$\frac{d^2u_C}{dt}+\frac{R}{L}\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{LC}u_C=0$$

❖ 由微分方程理论可知，齐次方程解答的形式由特征方程根的性质决定。特征方程为

$$s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}=0$$

$$s_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

特征根性质

❖ 特征根称为电路的固有频率，它将确定零输入响应的形式。由于R、L、C数值不同，固有频率s_1和s_2可出现三种不同的情况：

(1) $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$ s_1和s_2为不相等的负实数；

(2) $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}$ s_1和s_2为相等的负实数；

(3) $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$ s_1和s_2为共轭复数，实部为负；

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

固有频率为不相等的负实数

❖ 当 $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$ 即 $R^2 > 4\frac{L}{C}$ 时，固有频率为不相等的负实数，齐次方程的解答可表为

$$u_C(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

其中常数K_1和K_2由初始条件确定:

$$u_C(0) = K_1 + K_2$$

$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_0 = K_1 s_1 + K_2 s_2 = \frac{i_L(0)}{C}$$

$$K_1 = \frac{1}{s_2 - s_1}\left[s_2 u_C(0) - \frac{i_L(0)}{C}\right]$$

$$K_2 = \frac{1}{s_1 - s_2}\left[s_1 u_C(0) - \frac{i_L(0)}{C}\right]$$

方程的解

❖ 由于s_1和s_2是不相等的负实数，故它们可表示为

$$s_1 = -\alpha_1 \qquad s_2 = -\alpha_2$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{R}{2L} \mp \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

可得：

$$u_C(t) = \frac{u_C(0)}{\alpha_2 - \alpha_1}\left(\alpha_2 e^{-\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{-\alpha_2 t}\right) + \frac{i_L(0)}{(\alpha_2 - \alpha_1)C}\left(e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}\right)$$

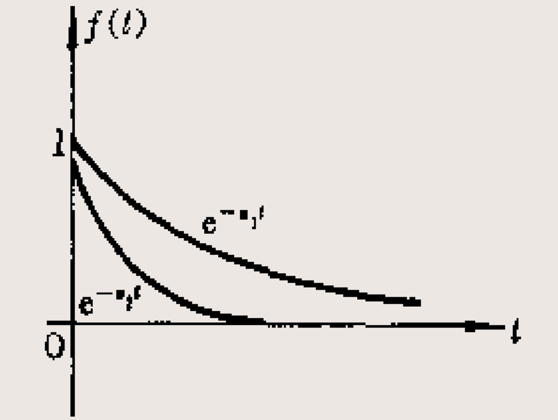
$$i_L(t) = C\frac{du_C}{dt}$$

$$= \frac{u_C(0)\alpha_1\alpha_2 C}{\alpha_2 - \alpha_1}\left(e^{-\alpha_2 t} - e^{-\alpha_1 t}\right) + \frac{i_L(0)}{\alpha_2 - \alpha_1}\left(\alpha_2 e^{-\alpha_2 t} - \alpha_1 e^{-\alpha_1 t}\right)$$

为随时间衰减的指数函数，表明电路响应是非振荡的。

说明

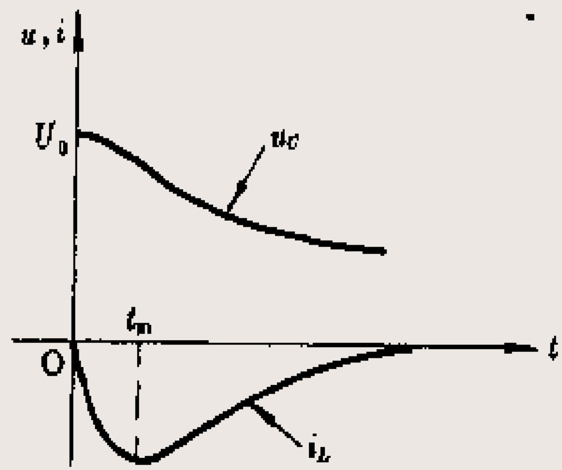
- 当$u_C(0)=U_s$，$i_L(0)=0$时，由于$\alpha_1<\alpha_2$，$e^{-\alpha 2t}$比$e^{-\alpha 1t}$衰减的快，电流始终为负值，说明电容电压的变化率始终为负值，电容电压始终单调地下降，电容自始至终在放电，最后，电压、电流均趋于零。



- 由于电流的初始值和稳态值均为零，因此在某一时刻t_m电流达到一个最大值，即

$$\frac{di_L}{dt}=0\Rightarrow\alpha_1 e^{-\alpha_1 t}-\alpha_2 e^{-\alpha_2 t}=0$$

$$t_m=\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\ln\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$



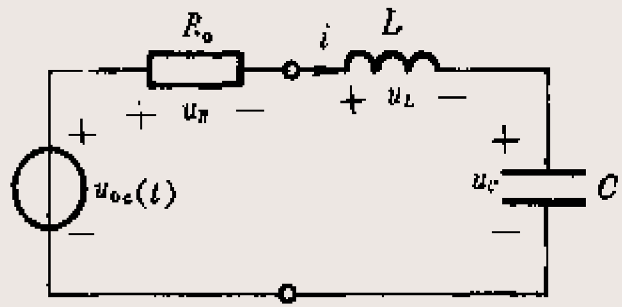
(b)

说明

- 从物理意义上来说，初始时刻后电容通过电感、电阻放电，它的电场能量一部分转变为磁场能量贮于电感之中，另一部分被电阻所消耗。
- 由于电阻比较大($R^2 > 4L/C$)，电阻消耗能量迅速。到t=t_m时，电流到达最大值，以后磁场贮能不再增加，并随着电流的下降而逐渐放出，连同继续放出的电场能量一起供给电阻的能量损失。
- 电容上的电压单调地下降，形成非振荡的放电过程。$R^2 > 4L/C$称为过阻尼条件。

例7-1

电路中C=1F，L=1H，R=3Ω，$u_C(0)=0$，$i_L(0)=1\text{A}$；$t\geq 0$时$u_{oc}(t)=0$，试求$u_C(t)$及$i_L(t)$，$t\geq 0$。



解　电路的微分方程为

$$\frac{d^2u_C}{dt}+\frac{R}{L}\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{LC}u_C=0$$

特征方程　$$s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}=0$$

特征根　$$s_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-1.5\pm\sqrt{1.5^2-1}$$

$$s_1=-0.382\qquad s_2=-2.618$$

解 答

电路微分方程的解为

$$u_C(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

代入初始条件求K_1和K_2

$$u_C(0) = K_1 + K_2 = 0$$

$$u_C'(0) = \frac{i_L(0)}{C} = s_1 K_1 + s_2 K_2 = 1$$

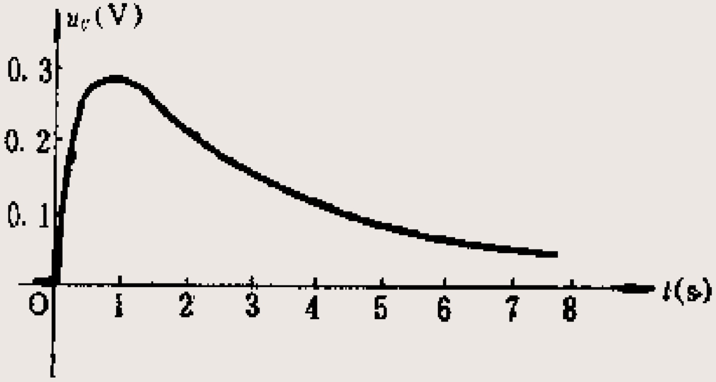
$$K_1 = 0.447 \qquad K_2 = -0.447$$

$$u_C(t) = 0.447 e^{-0.382t} - 0.447 e^{-2.618t} V \qquad t \geq 0$$

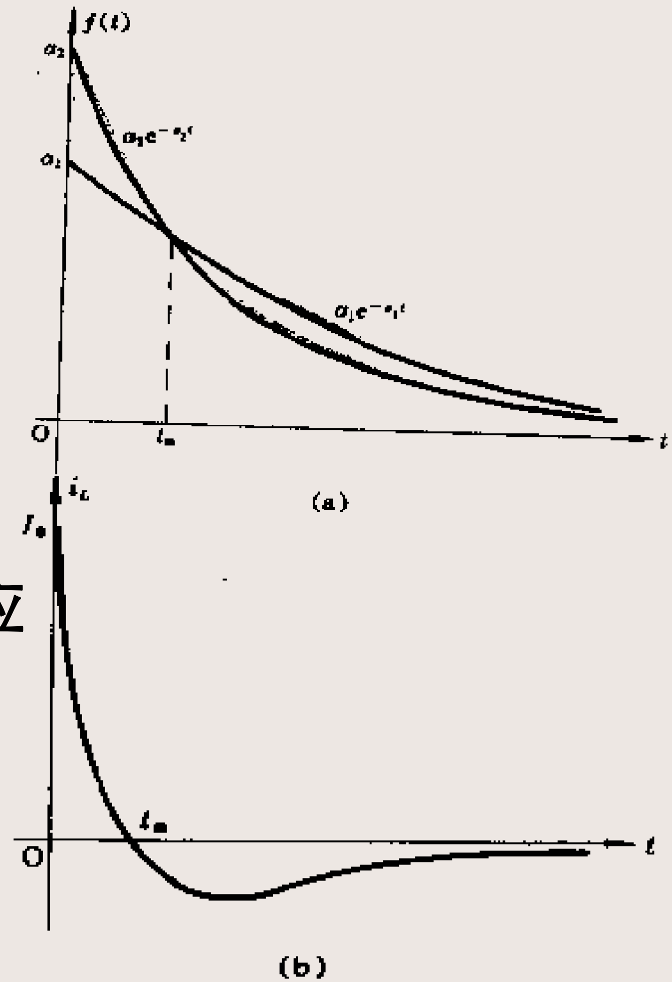
$$i_L(t) = C\frac{du_C}{dt} = -0.171 e^{-0.382t} + 1.17 e^{-2.618t} A \qquad t \geq 0$$

电压、电流响应曲线

$u_C(t)$零输入响应



$i_L(t)$零输入响应

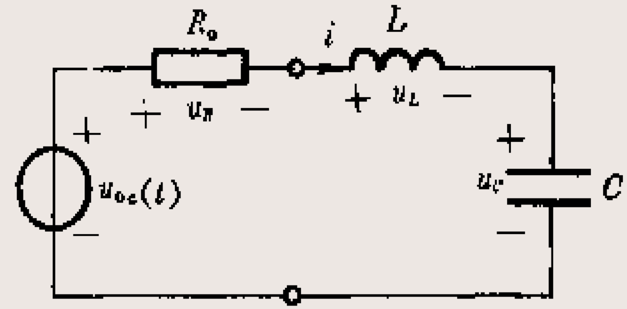


§7-3 RLC串联电路的零输入响应
——临界阻尼情况

- 当 $\left(\frac{R}{2L}\right)^2=\frac{1}{LC}$ 即 $R^2=4\frac{L}{C}$ 时，固有频率为相等的负实数，齐次方程的解答可表为

$$u_C(t)=K_1e^{s_1t}+K_2te^{s_2t}$$

$$s_1=s_2=-\frac{R}{2L}=-\alpha$$



(b)

- 常数K_1和K_2可由初始条件确定

$$u_C(0)=K_1$$

$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_0=K_1s_1+K_2=\frac{i_L(0)}{C}$$

$$K_2=\frac{i_L(0)}{C}+\alpha u_C(0)$$

方程的解

- s_1和s_2是相等的负实数，故方程的解可表示为

$$u_C(t) = u_C(0)(1+\alpha t)e^{-\alpha t} + \frac{i_L(0)}{C}te^{-\alpha t}$$

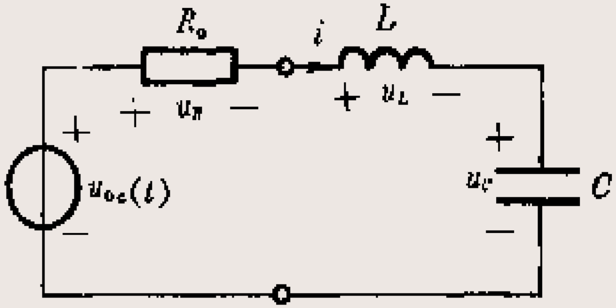
$$i_L(t) = C\frac{du_C}{dt}$$

$$= -u_C(0)\alpha^2 Cte^{-\alpha t} + i_L(0)(1-\alpha t)e^{-\alpha t}$$

- 电路的响应仍然是非振荡性的，但是如果电阻稍微减小以致$R^2 < 4L/C$，则响应将为振荡性的。因此，当符合$R^2=4L/C$时，响应处于临近振荡的状态，称为临界阻尼情况。

例7-2

电路中C=1F，L=1/4H，R=1Ω，$u_C(0)$=-1V，$i_L(0)=0$，当t≥0时，$u_{oc}(t)$=0，试求$i_L(t)$，t≥0。



(b)

解 特征方程的根

$$s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}=0$$

$$s_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-2$$

$$i_L(t)=K_1e^{s_1t}+K_2te^{s_2t}$$

解答

代入初始条件求K_1和K_2

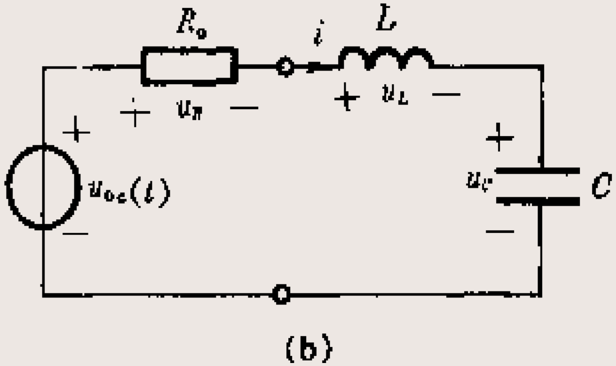
$$i_L(0) = K_1 = 0$$

$$i_L'(0) = s_1 K_1 + K_2$$

$$L\frac{di}{dt}\bigg|_0 + u_C(0) + Ri(0) = 0 \Rightarrow i_L'(0) = 4$$

$$K_2 = 4$$

$$i_L(t) = 4te^{-2t} A \qquad t \geq 0$$

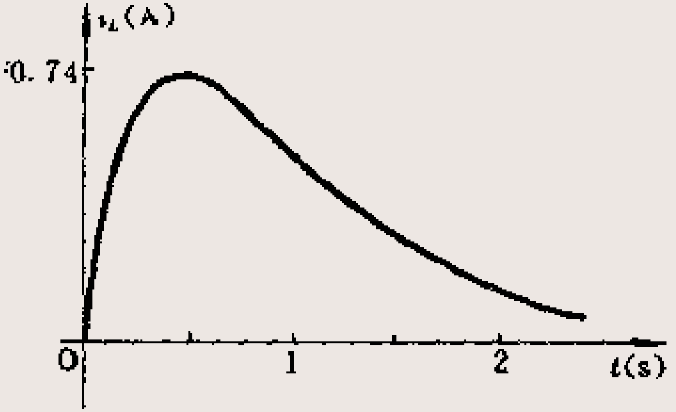


i_L最大值

$$i_L'(t) = 4e^{-2t} - 8te^{-2t} = 0$$

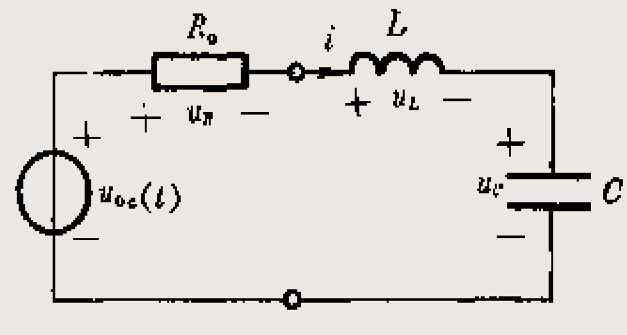
$$t_m = 0.5s$$

$$i_{Lm}(t_m) = 4 \times te^{-2t} = 4 \times 0.5e^{-2\times0.5} = 2e^{-1} A$$



§7-4 RLC串联电路的零输入响应——欠阻尼情况

- 当 $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$ 即 $R^2 < 4\frac{L}{C}$ 时，固有频率为共轭复数。



(b)

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm j\omega_d$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} \qquad \omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- 齐次方程的解答可表为

$$u_C(t) = e^{-\alpha t}\left(K_1 \cos \omega_d t + K_2 \sin \omega_d t\right)$$

常数K_1和K_2的确定

- 常数K_1和K_2可由初始条件确定如下

$$u_C(0)=K_1$$

$$\frac{du_C}{dt}\bigg|_0=-\alpha K_1+\omega_d K_2=\frac{i_L(0)}{C}$$

$$K_2=\frac{1}{\omega_d}\left[\alpha u_C(0)+\frac{i_L(0)}{C}\right]$$

- 解$u_C(t)$可写成

$$u_C(t)=e^{-\alpha t}\sqrt{K_1^2+K_2^2}\left(\frac{K_1}{\sqrt{K_1^2+K_2^2}}\cos\omega_d t+\frac{K_2}{\sqrt{K_1^2+K_2^2}}\sin\omega_d t\right)$$

$$=Ke^{-\alpha t}\cos(\omega_d t+\theta)$$

$$K=\sqrt{K_1^2+K_2^2}\qquad \theta=-Arctg\frac{K_2}{K_1}$$

解表达式

- 将K_1和K_2代入得

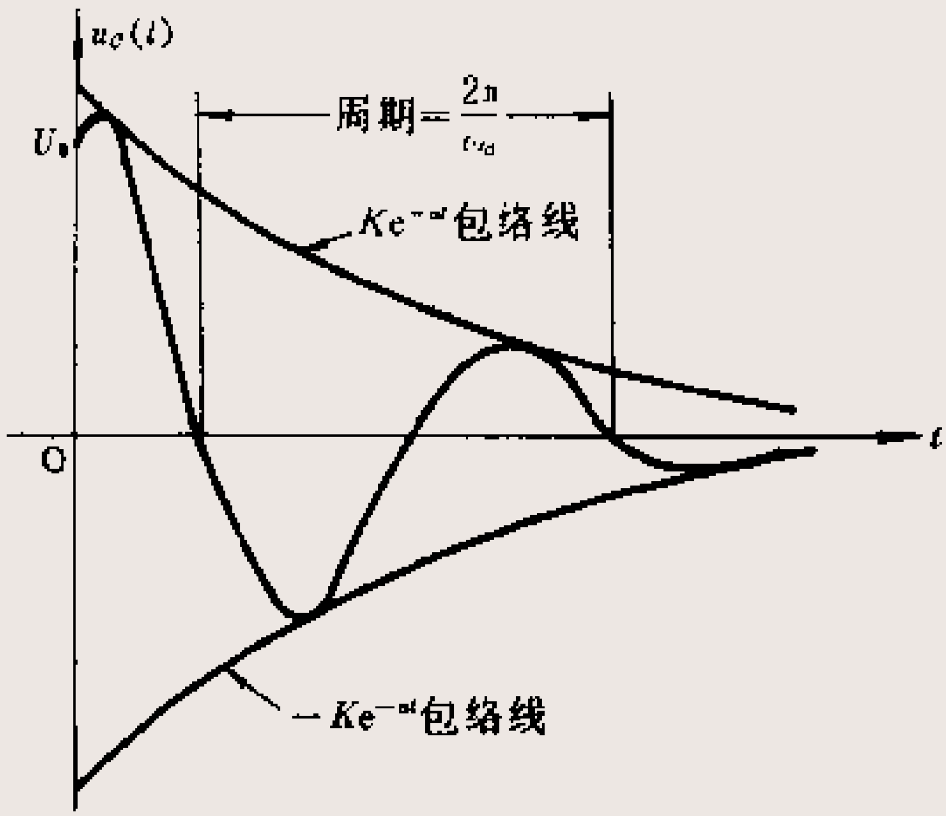
$$u_C(t) = u_C(0)\frac{\omega_0}{\omega_d}e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t - \theta) + \frac{i_L(0)}{\omega_d C}e^{-\alpha t}\sin\omega_d t$$

$$i_L(t) = -u_C(0)\frac{\omega_0^2 C}{\omega_d}e^{-\alpha t}\sin\omega_d t + i_L(0)\frac{\omega_0}{\omega_d}e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \theta)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\alpha^2 + \omega_d^2} \qquad \theta = Arctg\frac{\alpha}{\omega_d} = Arc\sin\frac{\alpha}{\omega_0}$$

振荡波形

❖ 振荡性响应$u_C(0)=U_0$



等幅振荡

- 当电路中电阻为零时

$$\alpha = 0 \qquad \omega_0 = \omega_d = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

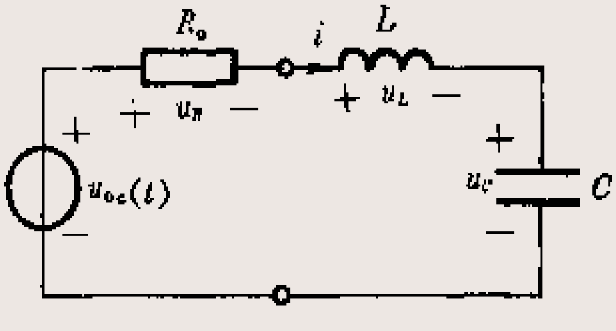
$$K_1 = u_C(0) \qquad K_2 = \frac{i_L(0)}{\omega_0 C}$$

$$u_C(t) = u_C(0)\cos\omega_d t + \frac{i_L(0)}{\omega_0 C}\sin\omega_d t$$

- 响应为等幅振荡时，电路的固有频率s为虚数，其值为ω_0，称为电路的谐振角频率。
- 电路零输入响应的性质取决于电路的固有频率s，固有频率可以是复数、实数或虚数，从而决定了响应为衰减振荡过程、非振荡过程或等幅振荡过程。

例7-3

电路中C=1F，L=1H，R=1Ω，$u_C(0)$=1V，$i_L(0)=1A$，试求$t≥0$时，$u_C(t)$，$i_L(t)$。



(b)

解 特征方程的根

$$s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}=0$$

$$s_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}=-\alpha\pm j\omega_d$$

$$u_C(t)=e^{-\alpha t}\left(K_1\cos\omega_d t+K_2\sin\omega_d t\right)$$

解答

- 常数K_1和K_2可由初始条件确定如下

$$u_C(0) = K_1 = 1$$

$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_0 = -\alpha K_1 + \omega_d K_2 = \frac{i_L(0)}{C} = 1$$

$$K_2 = \sqrt{3}$$

$$u_C(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

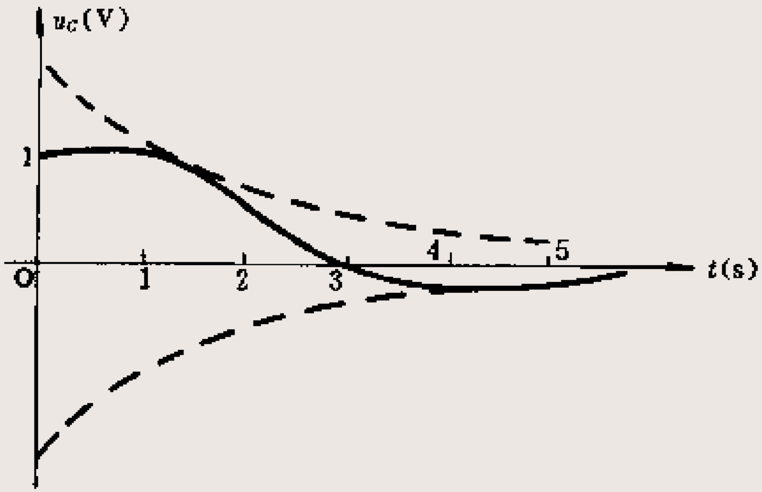
$$= 2e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)V \qquad t \ge 0$$

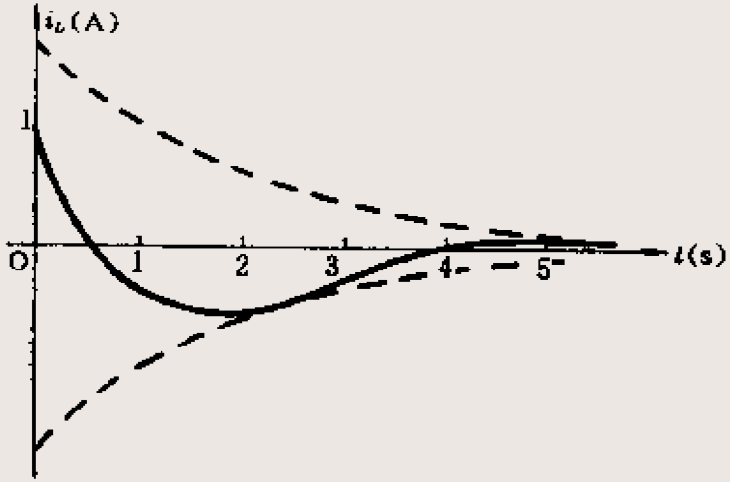
$$i_L(t) = C\frac{du_C}{dt} = 2e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)V \qquad t \ge 0$$

电压、电流波形

❖ 当 $\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\pi}{3}\right)=\pm 1$时，

$u_C(t)=\pm 2e^{-\frac{1}{2}t}$ 为包络线

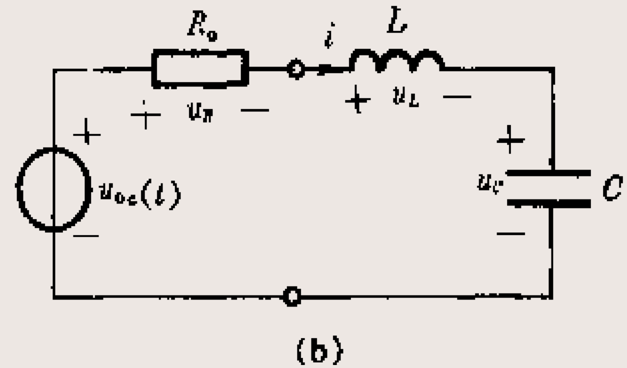




§7-5 直流RLC串联电路的完全响应

❖ 当$u_{oc}(t)=U_s$，$(t≥0)$

$$LC\frac{d^2u_C}{dt}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=U_s$$



❖ 其特征方程同前，根据固有频率的三种不同情况，齐次方程解答形式同前，但常数K_1和K_2需在求得特解后，由非齐次方程式的通解确定。

❖ 特解与激励相同

$$u_{Cp}=U_s \qquad (t\geq 0)$$

$$u_C(t)=K_1e^{s_1t}+K_2e^{s_2t}+U_s \qquad t\geq 0$$

确定K_1和K_2

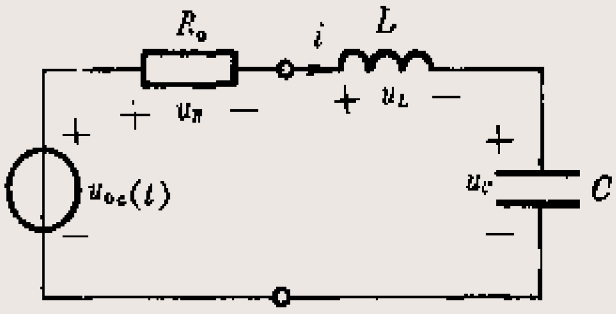
❖ 根据初始条件可求得

$$K_1 = \frac{1}{s_2 - s_1}\left\{s_2\left[u_C(0) - U_s\right] - \frac{i_L(0)}{C}\right\}$$

$$K_2 = \frac{1}{s_1 - s_2}\left\{s_1\left[u_C(0) - U_s\right] - \frac{i_L(0)}{C}\right\}$$

例7-6

电路中已知$R^2<4L/C$，直流电压$u_{OC}(t)=U_s$于t=0时作用于电路，试求$u_C(t)$。设电路为零初始状态。


(b)

解　$R^2<4L/C$，电路属欠阻尼情况。

$$s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}=0$$

$$s_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-\alpha\pm j\omega_d$$

$$u_C(t)=e^{-\alpha t}\left(K_1\cos\omega_d t+K_2\sin\omega_d t\right)+U_S$$

$$u_C(0)=K_1+U_s \qquad \Rightarrow K_1=-U_s$$

$$u_C^{'}=-\alpha K_1+\omega_d K_2=0 \qquad \Rightarrow K_2=-U_s\frac{\alpha}{\omega_d}$$

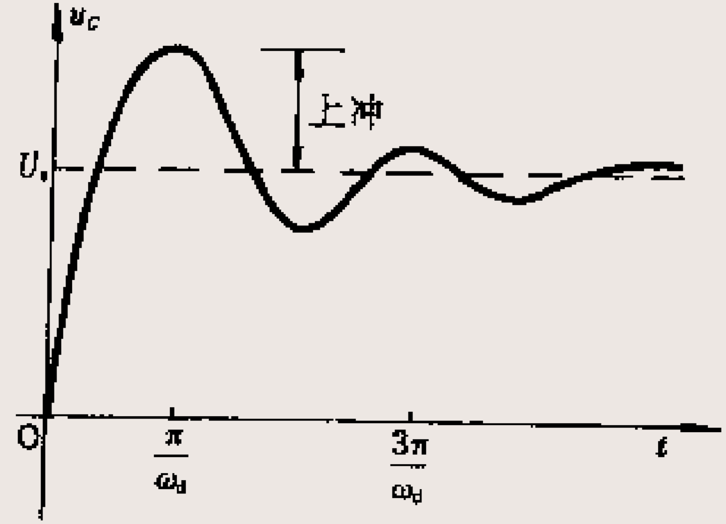
解答

❖ 因此

$$u_C(t) = -U_S e^{-\alpha t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\alpha}{\omega_d}\sin\omega_d t\right) + U_S$$

$$= U_S\left[1 - \frac{\omega_0}{\omega_d}e^{-\alpha t}\cos\left(\omega_d t - \theta\right)\right] \qquad t \geq 0$$

$$\theta = Arctg\,\frac{\alpha}{\omega_d}$$



§7-6 GLC并联电路的分析

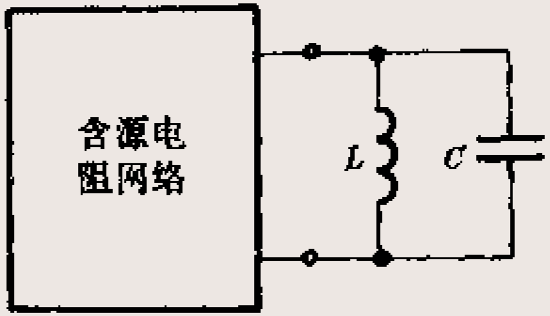
- 运用诺顿定理后，可得如图(b)所示的*GCL*并联电路。

$$i_C(t)+i_G(t)+i_L(t)=i_{sc}(t)$$

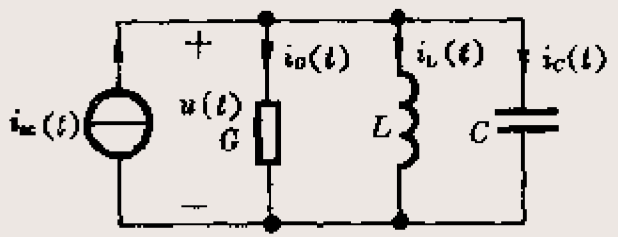
$$i_C=C\frac{du}{dt}=LC\frac{d^2i_L}{dt^2}\qquad i_G=Gu=GL\frac{di_L}{dt}$$

$$LC\frac{d^2i_L(t)}{dt^2}+GL\frac{di_L(t)}{dt}+i_L(t)=i_{sc}(t)\qquad t\geq 0$$

- *RCL*串联电路和*GCL*并联电路具有对偶性质，因此，可利用*RCL*串联电路的结果得到并联电路的解答。



(a)



电感电流

过阻尼

$$\alpha_{1,2} = \frac{G}{2C} \mp \sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$i_L(t) = \frac{i_L(0)}{\alpha_2 - \alpha_1}\left(\alpha_2 e^{-\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{-\alpha_2 t}\right) + \frac{u_C(0)}{(\alpha_2 - \alpha_1)L}\left(e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}\right)$$

临界阻尼

$$\alpha = \frac{G}{2C}$$

$$i_L(t) = i_L(0)(1 - \alpha t)e^{-\alpha t} + \frac{u_C(0)}{L} t e^{-\alpha_1 t}$$

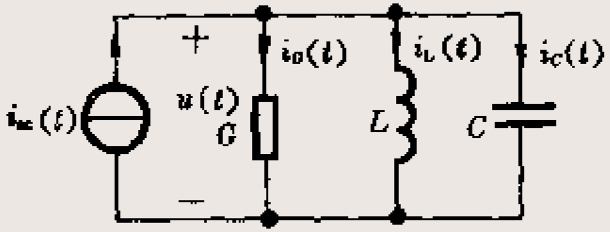
欠阻尼

$$i_L(t) = i_L(0)\frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t - \theta) + \frac{u_C(0)}{\omega_d L} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t$$

$$\omega_0 = \sqrt{\alpha^2 + \omega_d^2} \qquad \theta = Arctg \frac{\alpha}{\omega_d} = Arc \sin \frac{\alpha}{\omega_0} \qquad \alpha = \frac{G}{2C}$$

例7-9

L=1H，C=1F，求$i_L(t)$的阶跃响应，若(1)G=10s；(2)G=2s；(3)G=0.1s。



解 电路方程如下

$$LC\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2}+GL\frac{di_L(t)}{dt}+i_L(t)=i_{sc}(t)\qquad t\geq 0$$

$$s_{1,2}=-\frac{G}{2C}\pm\sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

$$s_{1,2}=-\frac{G}{2C}\pm j\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{G}{2C}\right)^2}$$

解答

- 当G=10s时，$\left(\frac{G}{2C}\right)^2 > \frac{1}{LC}$ 为过阻尼

$$s_1 = -5 + 2\sqrt{6} \qquad s_2 = -5 - 2\sqrt{6}$$

$$i_L(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + 1$$

利用特解i_{Lp}=1，$u_C(0)$=0, $i_L(0)$=0，得

$$i_L(0) = K_1 + K_2 + 1 = 0$$

$$i_L'(0) = s_1 K_1 + s_2 K_2 = \frac{u_C(0)}{L} = 0$$

$$K_1 = -\frac{5 + 2\sqrt{6}}{4\sqrt{6}} \qquad K_2 = \frac{5 - 2\sqrt{6}}{4\sqrt{6}}$$

$$i_L(t) = 1 + \frac{1}{4\sqrt{6}}\left[\left(5 - 2\sqrt{6}\right)e^{-\left(5+2\sqrt{6}\right)t} - \left(5 + 2\sqrt{6}\right)e^{-\left(5-2\sqrt{6}\right)t}\right]\varepsilon(t)$$

解答

- 当G=2s时，$\left(\frac{G}{2C}\right)^2=\frac{1}{LC}$ 为临界阻尼

$$s_1=s_2=\frac{G}{2C}=-1$$

$$i_L(t)=K_1e^{s_1t}+K_2te^{s_2t}+1$$

利用特解 i_{Lp}=1，$u_C(0)$=0，$i_L(0)$=0，得

$$i_L(0)=K_1+1=0$$

$$i_L^{'}(0)=s_1K_1+K_2=\frac{u_C(0)}{L}=0$$

$$K_1=-1 \qquad K_2=-1$$

$$i_L(t)=\left[1-(1+t)e^{-t}\right]\varepsilon(t)$$

解答

❖ 当G=0.1s时，$\left(\frac{G}{2C}\right)^2 < \frac{1}{LC}$ 为欠阻尼

$$i_L(t) = e^{-\alpha t}\left(K_1 \cos \omega_d t + K_2 \sin \omega_d t\right) + 1$$

$$s_{1,2} = -\frac{G}{2C} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{G}{2C}\right)^2} = -0.05 \pm j = -\alpha \pm j\omega_d$$

利用特解i_{Lp}=1，$u_C(0)$=0，$i_L(0)$=0，得

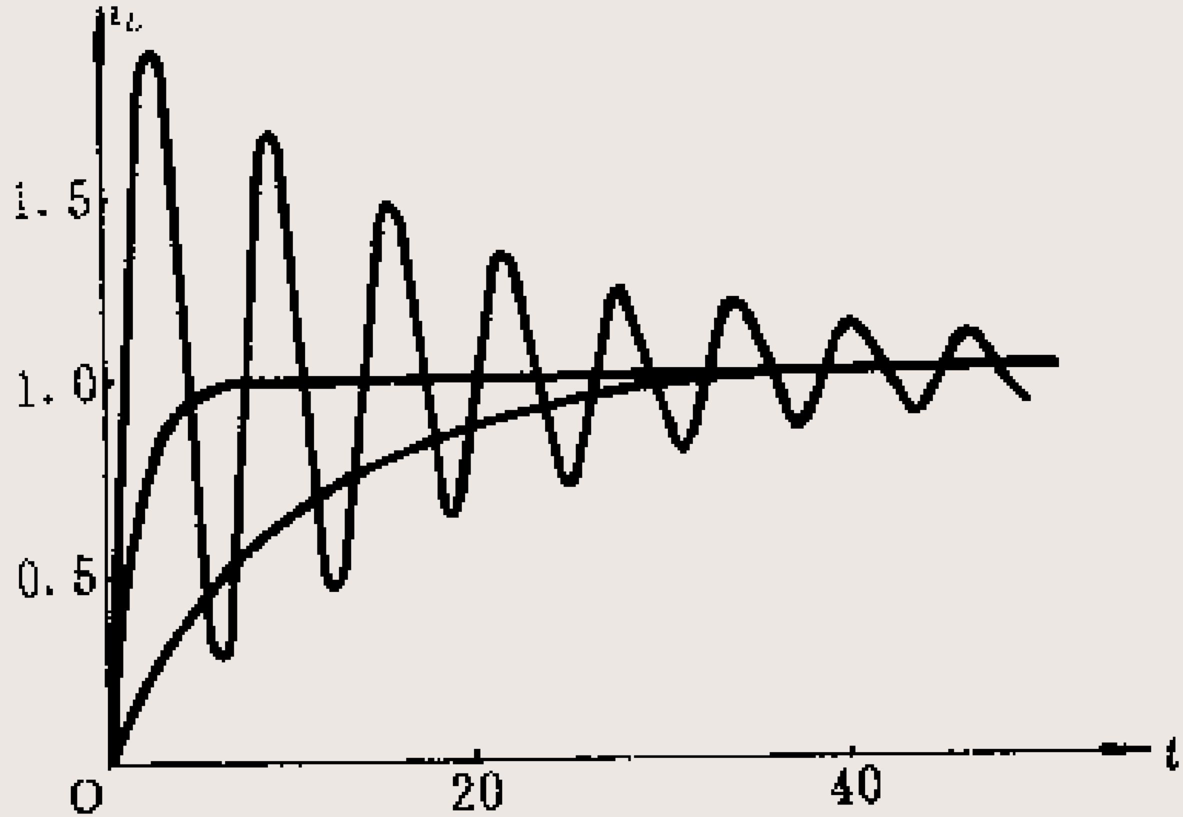
$$i_L(0) = K_1 + 1 = 0$$

$$i_L'(0) = -\alpha K_1 + \omega_d K_2 = \frac{u_C(0)}{L} = 0$$

$$K_1 = -1 \qquad K_2 = -\frac{\alpha}{\omega_d} - 0.05$$

$$i_L(t) = \left[1 - e^{-0.05t}\left(\cos t + 0.05 \sin t\right)\right]\varepsilon(t) \approx \left[1 - e^{-0.05t} \cos t\right]\varepsilon(t)$$

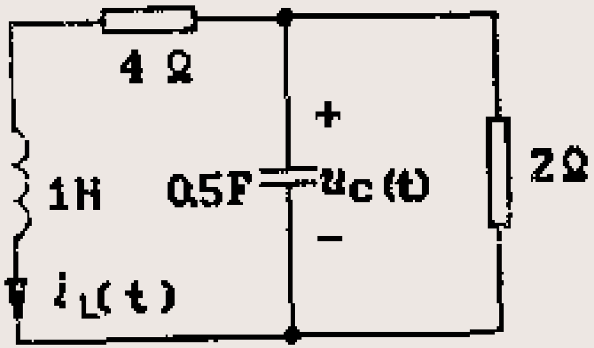
三种情况的波形



习题7-23

已知$i_L(0)$=-2A、$u_C(0)$=2V，求$u_C(t)$。

解 求出$u_C(t)$和$i_L(t)$。



$$i_C = -\frac{u_C}{2} - i_L$$

$$u_L = u_C - 4i_L$$

$$\frac{du_C}{dt} = 2i_C = -u_C - 2i_L$$

$$\frac{di_L}{dt} = u_L = u_C - 4i_L$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2u_C}{dt^2} + 5\frac{du_C}{dt} + 6u_C = 0$$

解答

- 特征方程为 $s^2+5s+6=0$

$$s_1=-2 \qquad s_2=-3 \qquad u_C(t)=K_1e^{s_1t}+K_2e^{s_2t}$$

- 求K_1和K_2

$$K_1+K_2=u_C(0)=2$$

$$s_1K_1+s_2K_2=u_C'(0)=\frac{i_C(0)}{C}=2\left[-\frac{u_C(0)}{2}-i_L(0)\right]=2$$

$$K_1=8 \qquad K_2=-6$$

$$u_C(t)=8e^{-2t}-6e^{-3t}V \qquad t\geq 0$$

$$i_C(t)=C\frac{du_C}{dt}=-8e^{-2t}+9e^{-3t}A \qquad t\geq 0$$

$$i_L(t)=-\frac{u_C}{2}-i_C=4e^{-2t}-6e^{-3t}A \qquad t\geq 0$$

作 业

练习七

2、4、5、8

预习冲激响应