第六章

一阶电路

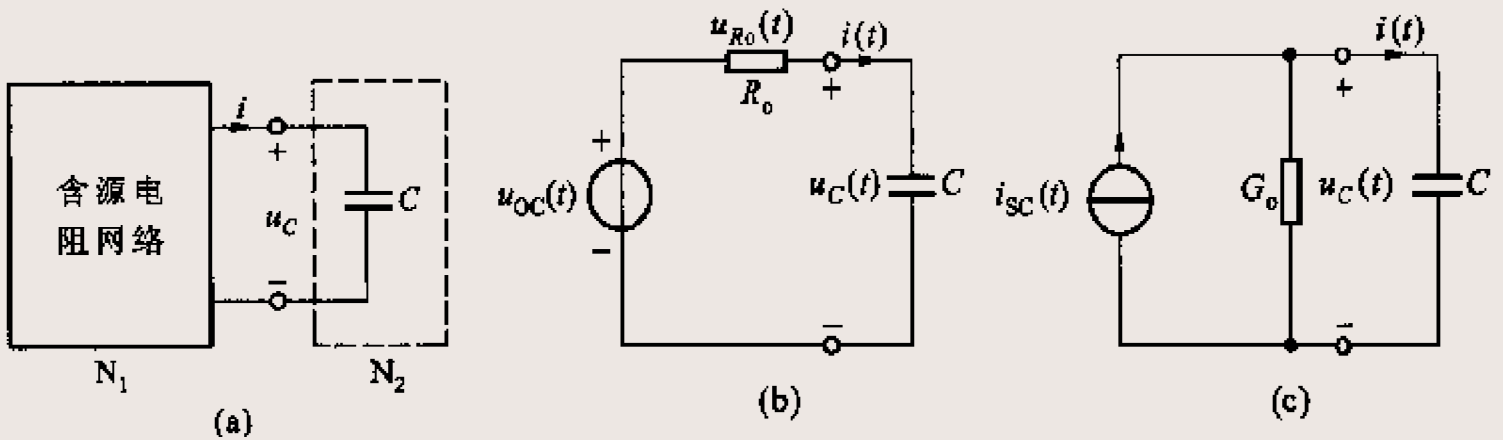
2010年11月4日

动态电路

- 在动态电路中，各支路电流和各支路电压都分别受KCL和KVL的约束，只是在动态电路中，来自元件性质的约束，除了电阻元件和电源元件的VCR外，还有电容和电感等动态元件的VCR。
- 只含一个动态元件的线性、时不变电路，用线性常系数一阶常微分方程来描述，用一阶微分方程来描述的电路称为一阶电路。

§6-1分解方法在动态电路分析中运用

- 一阶电路可看成由两个单口网络组成，其一含所有的电源及电阻元件，另一个含一个动态元件。
- 以图(a)为例，含源电阻网络部分N_1用戴维南定理或诺顿定理化简后，电路将如图(b)或(c)所示。
- 由图(b)或(c)，可以求得单口网络的端口电压，亦即电容电压u_c。



一阶电路方程

由KVL可得

$$u_{R_o}(t)+u_C(t)=u_{OC}(t)$$

$$u_{R_o}(t)=R_o i(t), \qquad i(t)=C\frac{du_C}{dt}$$

$$R_o C\frac{du_C}{dt}+u_C=u_{OC}(t)$$

$$C\frac{du_C}{dt}+G_o u_C=i_{SC}(t)$$

同理，对电感

$$u_{R_o}(t)+u_L(t)=u_{OC}(t)$$

$$u_{R_o}(t)=R_o i_L(t), \qquad u_L(t)=L\frac{di_L}{dt}$$

$$L\frac{di_L}{dt}+R_o i_L=u_{OC}(t)$$

$$G_O L\frac{di_L}{dt}+i_L=i_{SC}(t)$$

电路的状态方程

- 电容电压和电感电流称为电路的状态变量，因而方程式称为电路的状态方程。
- 若以x泛指状态变量，w泛指电路的输入，则状态方程可归结为下列的标准形式：

$$\frac{dx}{dt}=Ax+Bw$$

对电容 $$\frac{du_C}{dt}=-\frac{1}{R_oC}u_C+\frac{1}{R_oC}u_{oc}(t)$$

对电感 $$\frac{di_L}{dt}=-\frac{R_o}{L}i_L+\frac{R_o}{L}i_{oc}(t)$$

- 状态方程本身体现了电路状态演变的情况，即状态的变化率是当前状态和当前输入的函数。

§6-2 零输入响应

- 电路在没有外加输入时的响应称为零输入响应。零输入响应仅仅是由非零初始状态所引起的，是由初始时刻电容中电场的贮能或电感中磁场的贮能所引起的。
- 如果在初始时刻贮能为零，那么在没有电源作用的情况下，电路的响应也为零。

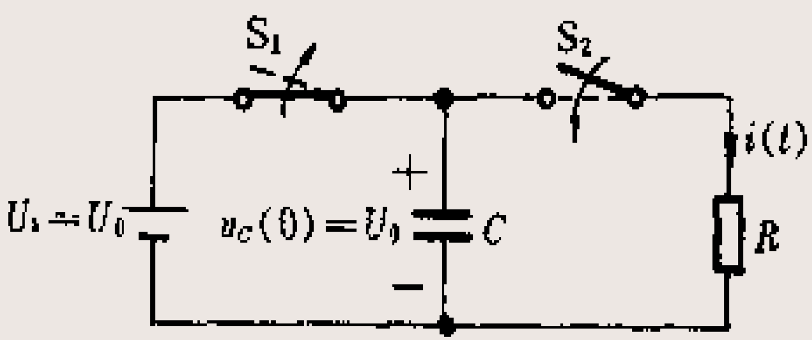
$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{R_oC}u_C + \frac{1}{R_oC}u_{oc}(t)$$

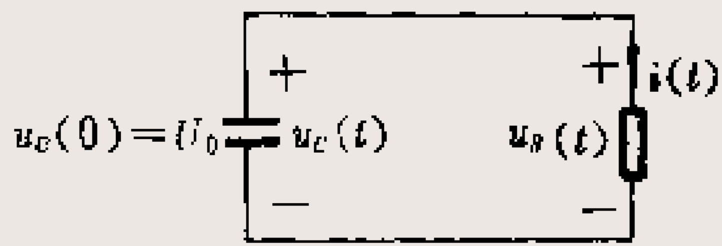
$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R_o}{L}i_L + \frac{R_o}{L}i_{oc}(t)$$

零输入响应的初始状态

- 在$t < 0$时，开关S_1一直闭合，因而电容C被电压源充电到电压U_0。
- 在t=0时，开关S_1打开，开关S_2同时闭合，电路中只含一个电阻和一个已被充电的电容。在电容初始贮能的作用下，在$t \geq 0$时电路中虽无电源，仍可以有电流、电压存在，构成零输入响应。

电容两端的电压不能突变





零输入响应的状态方程

- 如果关心的是$t > 0$时电路的情况，则电路方程为：

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \qquad t \geq 0$$

- 根据电容电压的参考方向，结合初始电压U_0的实际方向，初始电压可记为

$$u_C(t) = Ke^{-\frac{1}{RC}t}$$

解得 $u_C(0) = K = U_0$ $\qquad u_C(t) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \qquad t \geq 0$

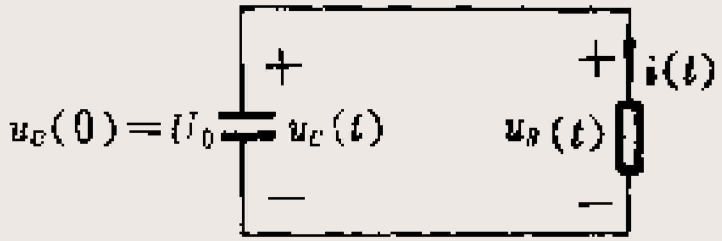
式中 $-\frac{1}{RC}$ 为特征方程

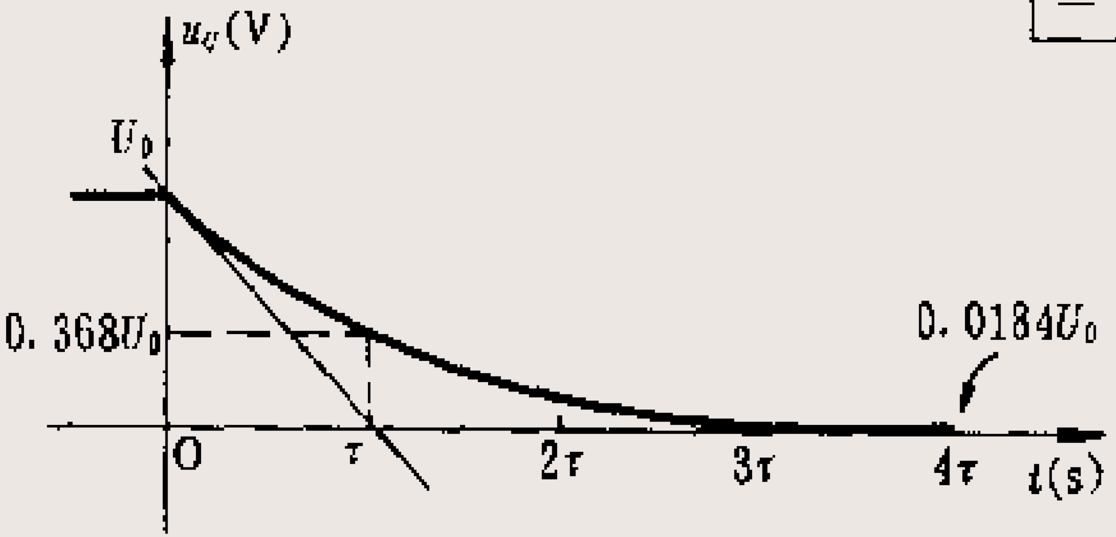
$RCS + 1 = 0$ 的根。

u_C随时间变化的曲线

❖ 解u_C为一个随时间衰减的指数函数。在t=0时，即开关进行换路时， u_C是连续的，没有跃变。

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$





电流随时间变化的曲线

负号为参考
方向不一致

- u_C求得后，电流可立即求得为

$$i(t) = -C\frac{du}{dt} = \frac{U_0}{R}e^{-\frac{1}{RC}t} \qquad t \ge 0$$

- 它是一个随时间衰减的指数函数。

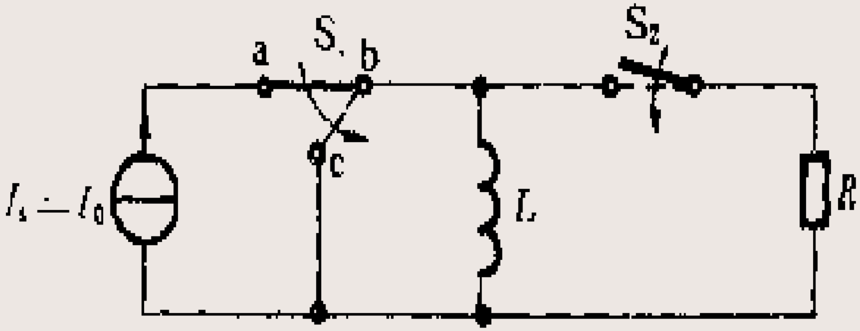
在t=0换路时，$i(0_-)$=0，$i(0_+)$=U_0/R，亦即电流由零一跃而为U_0/R，发生了跃变。

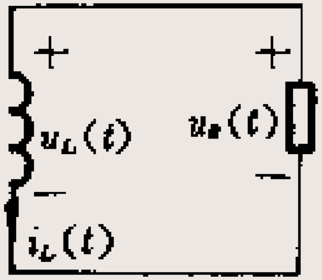
时间常数

- 函数表示式中e的指数项$(-t/RC)$ 是无量纲的，因此R和C的乘积具有时间的量纲，通常以τ来表示，称为时间常数。
- 当C用法拉、R用欧姆为单位时，RC的单位为秒，这是因为：欧·法=欧·库/伏；欧·安·秒/伏=欧·秒/欧=秒。
- 电压、电流衰减的快慢取决于时间常数τ的大小。
- RC电路的零输入响应是由电容的初始电压U_0和时间常数$\tau=RC$所确定。

RL电路零输入响应

- 设在$t<0$时开关S_1与b端相接，S_2打开，电感L由电流源I_0供电。设在t=0时， S_1迅速投向c端，同时，S_2闭合，电感L与电阻相联接。
- 由于电感电流不能跃变，电感虽已与电流源脱离，但仍具有初始电流I_0，这个电流将在RL回路中逐渐下降，最后为零。
- 在这一过程中，初始时刻电感存贮的磁场能量逐渐被电阻消耗，转化为热能。





RL电路零输入响应的状态方程

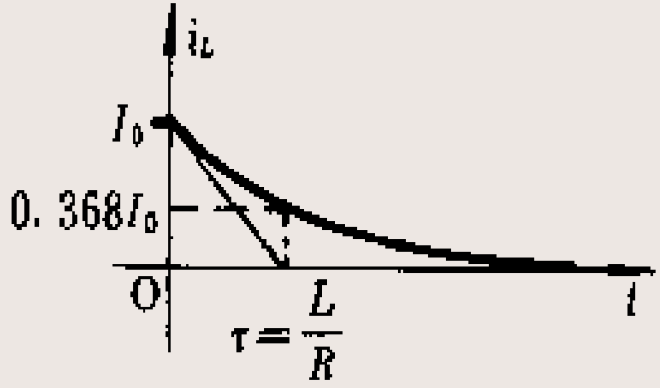
- 状态方程 $L\dfrac{di_L}{dt}+Ri_L=0 \qquad t\geq 0$

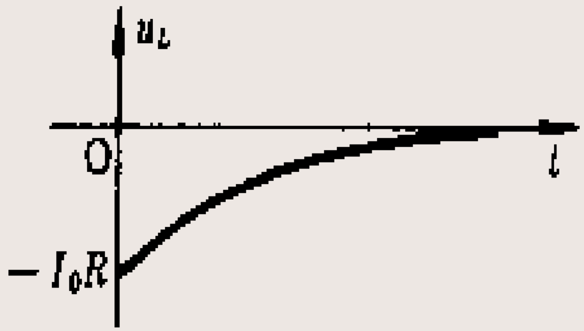
  $i_L(0)=I_0$

  解得 $i_L(t)=I_0e^{-t/\tau} \qquad t\geq 0$

  其中$\tau=L/R$为该电路的时间常数。

  电感电压为 $u_L=L\dfrac{di_L}{dt}=-RI_0e^{-t/\tau} \qquad t\geq 0$



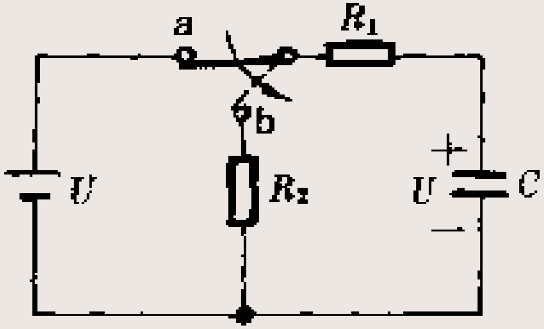


结论

- 零输入响应是在输入为零时，由非零初始状态产生的，它取决于电路的初始状态和电路特性。
- 求解时，首先必须求电容电压或电感电流的初始值。
- 不论是*RC*电路还是*RL*电路，零输入响应都是随时间按指数规律衰减的，在没有外施电源的条件下，原有的贮能逐渐衰减到零。
- 在*RC*电路中，电容电压u_C总是由初始值$u_C(0)$单调地衰减到零，时间常数$\tau=RC$；在*RL*电路中，i_L总是由初始值$i_L(0)$单调地衰减到零，其时间常数$\tau=L/R$。
- 特征根具有时间倒数或频率的量纲，故称为固有频率。固有频率代表了网络的固有性质。

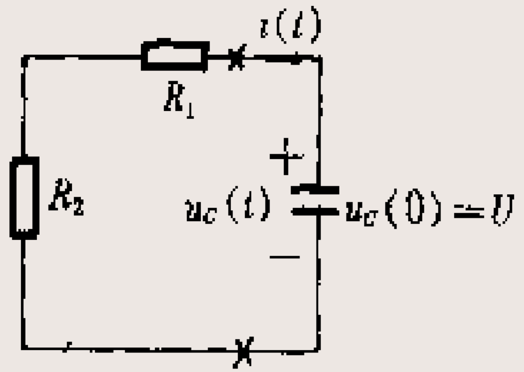
例6-1

电路如图，在t=0时开关由a投向b，在此以前电容电压为U，试求$t>0$时，电容电压及电流。



解　由于电容电压不能跃变，在开关刚由a投向b的瞬间，其电压仍为U，即$u_C(0)=U$。

时间常数为$\tau=(R_1+R_2)C$

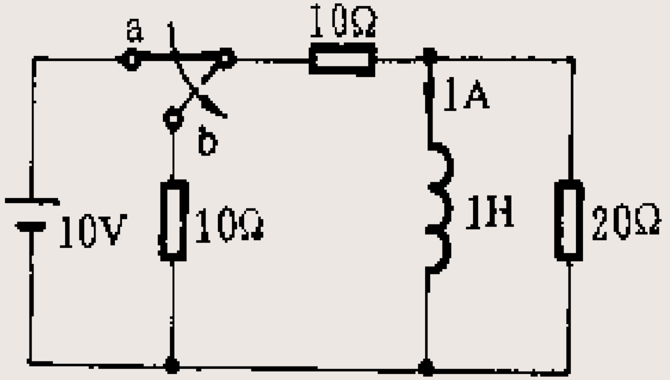


$$u_C(t)=Ue^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t\geq 0$$

$$i(t)=-C\frac{du_C}{dt}=\frac{U}{R_1+R_2}e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t\geq 0$$

例6-2

在t=0时，开关由a投向b，已知在换路前瞬间，电感电流为1A。试求$t>0$时各电流。



解：在t=0时， $I_0 = 1A$

电路的等效电阻为 $R_0 = \dfrac{(10+10)\times 20}{10+10+20} = 10\Omega$

时间常数 $\tau = \dfrac{L}{R} = \dfrac{1}{10}s$

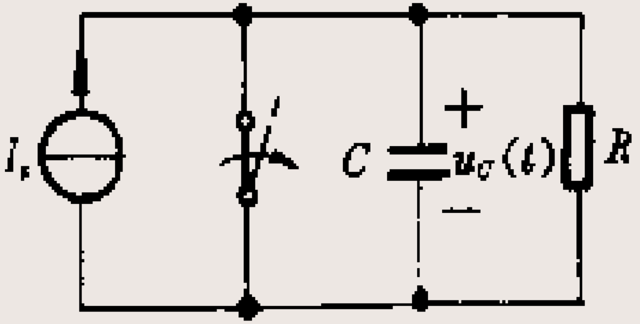
电感上电流和电压 $i_L(t) = I_0 e^{-t/\tau} = e^{-10t}$

$$u(t) = L\frac{di_L}{dt} = -10e^{-10t}$$

§6-3 零状态响应

❖ 在零初始状态下，由在初始时刻施加于电路的输入所产生的响应称为零状态响应。

在开关打开之前，电流源的电流全部流经短路线。在t=0时，开关打开，电流源即与RC电路接通。显然，t≥0时，二个元件的电压是一样的，表为u_C。



$$C\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{R}u_C=I_S \qquad t\geq 0$$

$$u_C(0)=0$$

电容电压的变化率

- 由于流过电容的电流为有界的，因此电容电压不能跃变，在t=0_-时电容电压既然为零，那末在t=0_+时电容电压仍然为零，这就决定了在t=0时，电阻电流必然为零。
- 因此，在t=0_+时，电流源的全部电流将流向电容，使电容充电。电容电压的变化率应为

$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{0_+} = \frac{I_S}{C}$$

- 随着电容电压的逐渐增长，流过电阻的电流u_C/R也在逐渐增长，因为总电流是一定的，流过电容的电流将逐渐减少。到后来几乎所有的电流都流过电阻，电容如同开路，充电停止。

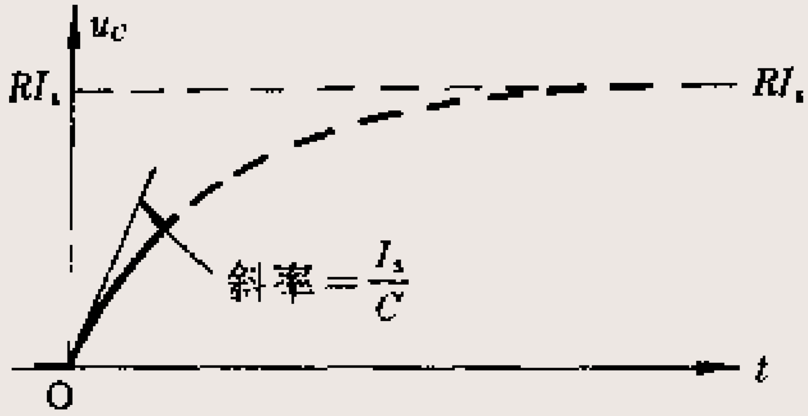
电容电压末态

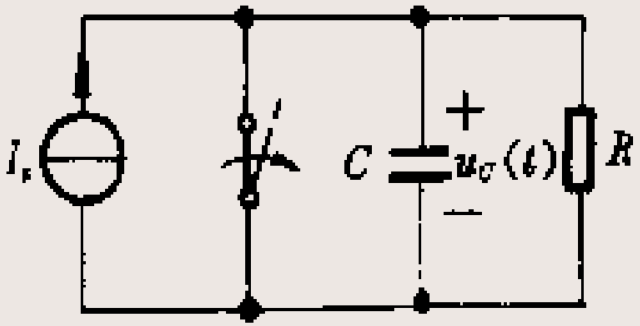
- 最终电容电压几乎不再变化，电容电压

$$\frac{du_C}{dt} \approx 0$$

$$u_C \approx RI_s$$

- 当直流电路中各个元件的电压和电流都不随时间变化时，电路进入了直流稳态。





一阶非齐次微分方程通解

❖ 方程 $C\dfrac{du_C}{dt}+\dfrac{1}{R}u_C=I_S \quad t\geq 0$ 是一阶非齐次微分方程，它的通解 $u_C=u_{Ch}+u_{Cp}$

u_{Ch}为对应得齐次微分方程的通解

$$u_{Ch}=Ke^{-\frac{1}{RC}t} \quad t\geq 0$$

u_{Cp}为非齐次微分方程的任一特解，可认为具有和输入函数相同的形式，令此常量为Q，则

$$u_{Cp}=Q$$

代入方程解得 $u_{Cp}=Q=RI_S \quad t\geq 0$

零状态解

❖ 通解为

$$u_C(t) = u_{Ch} + u_{Cp} = Ke^{-\frac{1}{RC}t} + RI_S \qquad t \geq 0$$

❖ 当t=0时，$u_C(t)$=0，则

$$u_C(0) = K + RI_S = 0$$

$$K = -RI_S$$

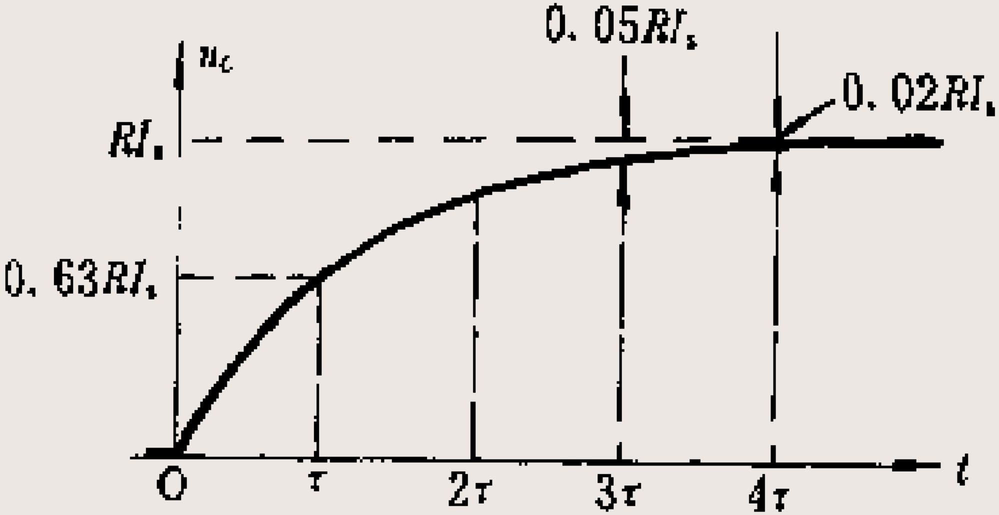
❖ 零状态解为

$$u_C(t) = -RI_S e^{-\frac{1}{RC}t} + RI_S$$

$$= RI_S\left(1 - e^{-t/RC}\right) \qquad t \geq 0$$

时间常数

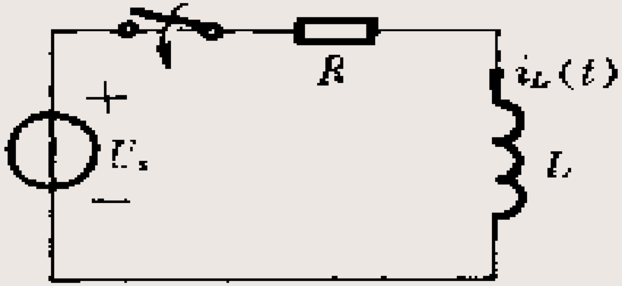
- u_C从零值开始按指数规律上升趋向于稳态值RI_s，其时间常数$\tau=RC$。
- 在 $t=4\ \tau$时，电容电压与其稳态值相差仅为稳态值RI_s的1.8%，一般可认为已充电完毕电压已达到RI_s值。
- τ越小，电容电压达到稳态值就越快。



RL电路电流的零状态响应

- 设开关在t=0时闭合，由于电感电流不能跃变，所以在t=0_+时电流仍然为零，电阻的电压也为零，此时全部外施电压U_s出现于电感两端。因此电流的变化率必须满足

$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{0_+} = \frac{U_s}{L}$$



- 随着电流的逐渐上升，电阻电压也逐渐增大，因而电感电压应逐渐减小。电感电压减小，意味着电流变化率di_L/dt的减小，因此，电流的上升将越来越缓慢，最后，电感电压几乎为零，电感如同短路。

RL电路电流的零状态解

❖ 类似*RC*电路零状态响应的求解步骤，可求得

$$L\frac{di_L}{dt}+Ri_L=U_s$$

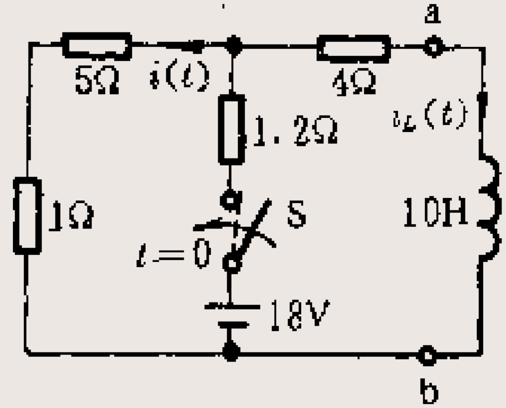
$$i_L(t)=\frac{U_S}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)\qquad t\geq 0$$

说明

- 微分方程通解中的齐次方程解又称为固有响应分量，与输入无关，不论是什么样的输入，这一分量一般具有Ke^{st}的形式，K的具体数值一般与输入有关。这一分量的变化方式完全由电路本身所确定，是由特征根s所确定的，输入仅仅影响这一分量的大小。这一分量又可称为暂态响应分量。
- 微分方程通解中的特解又称为强制响应分量，其形式一般与输入形式相同。如强制响应为常量或周期函数则这一分量又称为稳态响应分量。

例6-3

在t=0时开关S闭合，求$i_L(t)$、$i(t)$，t≥0。

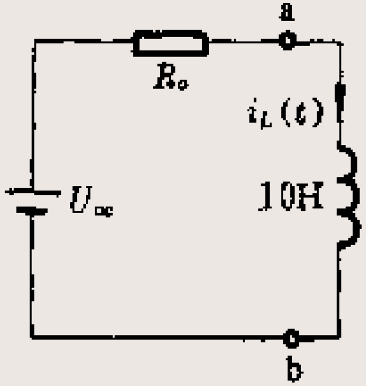


(a)

解 此为零状态响应，先求$i_L(t)$、用戴维南定理将原电路化简为图(b)，其中

$$U_{oc}=18\times\frac{5+1}{5+1+1.2}=15V$$

$$R_o=(1.2\,//\,6)+4=5\Omega$$



(b)

时间常数 $$\tau=\frac{L}{R_o}=\frac{10}{5}=2s$$

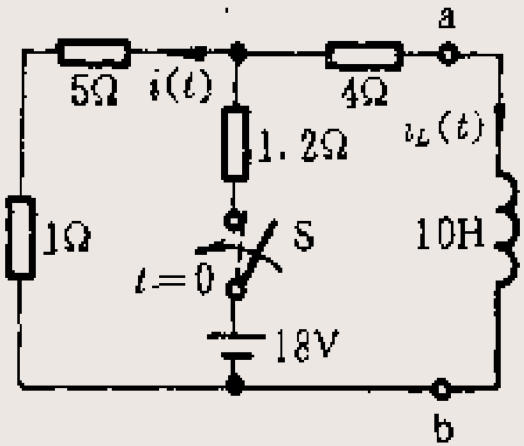
$t\to\infty$ $$i_L(\infty)=\frac{U_{oc}}{R_o}=3A$$

$$i_L(t)=\frac{U_s}{R_0}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)=3\left(1-e^{-\frac{t}{2}}\right)\qquad t\geq 0$$

解答

求$i(t)$

回到原电路，设想开关S闭合，电感用电流源$i_L(t)$置换，运用网孔法求解$i(t)$。网孔电流按支路电流$i_L(t)$和$i(t)$设定，可得网孔方程



(a)

$$7.2i(t)+1.2i_L(t)=18$$

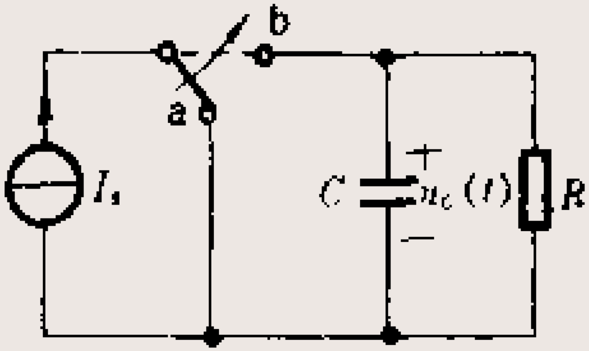
$$i(t)=\frac{18-1.2i_L(t)}{7.2}=2+0.5e^{-\frac{t}{2}}A \qquad t\geq 0$$

§6-4 线性动态电路的叠加定理

- 多个独立电源作用于线性动态电路，零状态响应为各个独立电源单独作用时所产生的零状态响应的代数和。
- 把初始状态和输入共同作用下的响应称为完全响应。完全响应为零输入响应和零状态响应之和。
- 这一结论来源于线性电路的叠加性，而又为动态电路所独有，称为线性动态电路的叠加定理。

完全响应

设在t=0时开关由a投向b，电路与电流源I_s接通，并设$u_C(0)=U_0\neq 0$。因此，在$t>0$时，该RC电路既有输入作用，初始状态又不为零。



其方程

$$C\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{R}u_C=I_S$$

$$u_C(0)=U_0$$

通解可表为 $$u_C(t)=Ke^{-\frac{1}{RC}t}+RI_S$$

代入初始条件 $$u_C(0)=K+RI_S=U_0$$

$$K=U_0-RI_S$$

完全响应为 $$u_C(t)=RI_S+(U_0-RI_S)e^{-t/\tau}\qquad t\geq 0$$

完全响应

完全响应 $u_C(t) = RI_S + (U_0 - RI_S)e^{-t/\tau} \qquad t \geq 0$

强制响应
稳态响应

固有响应
暂态响应

将上式整理 $u_C(t) = U_0 e^{-t/\tau} + RI_S(1 - e^{-t/\tau}) \qquad t \geq 0$

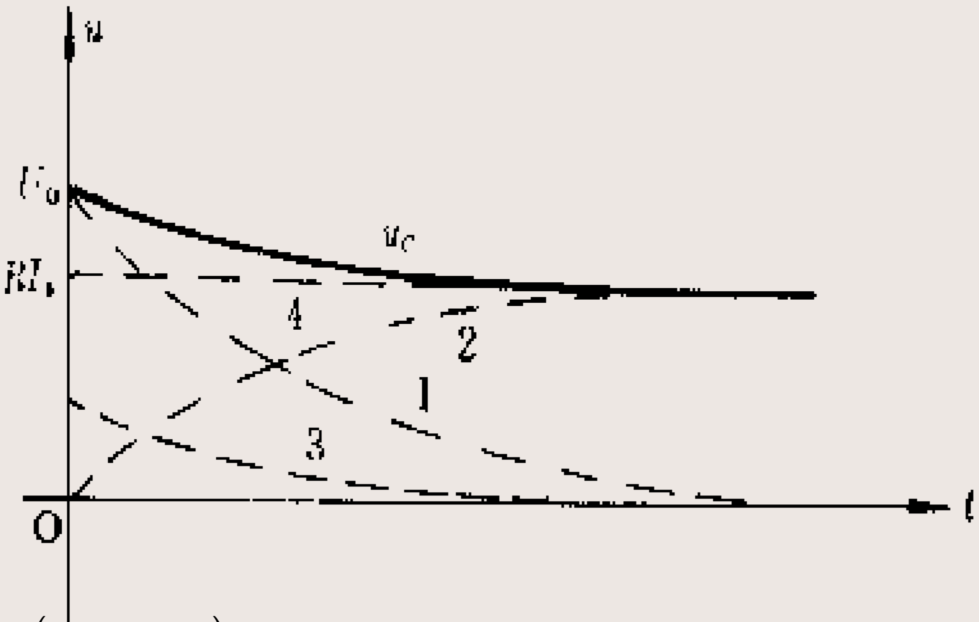
零输入响应

零状态响应

线性动态电路的完全响应是由来自电源的输入和来自初始状态输入分别作用时所产生的响应的代数和。

RC电路的响应曲线

曲线1：零输入响应
曲线2：零状态响应
曲线3：暂态响应
曲线4：稳态响应



$$u_C(t) = U_0 e^{-t/\tau} + RI_S\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad t \ge 0$$

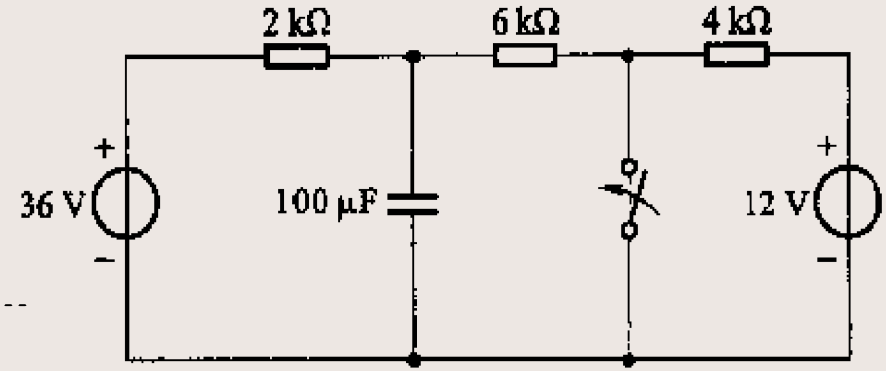
$$u_C(t) = RI_S + (U_0 - RI_S)e^{-t/\tau} \qquad t \ge 0$$

强制响应
稳态响应

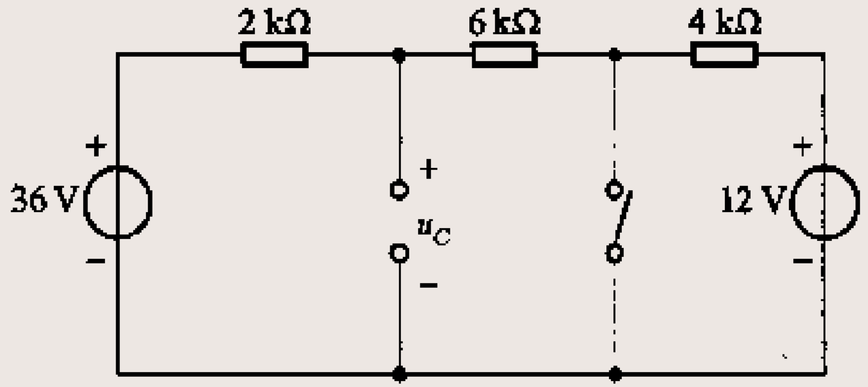
固有响应
暂态响应

例6-4

开关闭合前电路已处于稳态，t=0时开关闭合，求$u_C(t)$、$t\geq0$。



解 (1)求$t\geq0$时的零输入响应$u'_C(t)$，由于$t=0_-$时电路处于直流稳态，电容相当于开路，得电路如图。可知



$$u_C(0_-)=\left[36-(36-12)\times\frac{2}{2+6+4}\right]=32V=u_C(0_+)$$

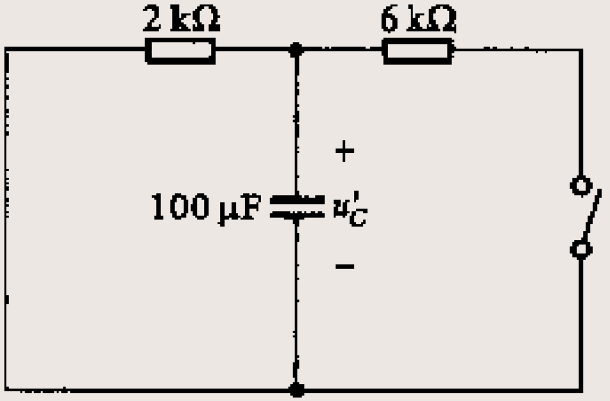
解答

R_o为开关闭合后，对电容两端的等效电阻，时间常数为

$$\tau = R_o C = \frac{6\times 2}{6+2}\times 10^3 \times 100\times 10^{-6} 0.15 s$$

零输入响应为 $u_C'(t) = 32 e^{-\frac{1}{0.15}t} V \qquad t \geq 0$

(2)求$t \geq 0$时零状态响应$u''_C(t)$，开关闭合时，由戴维南定理可得:



$$u_{oc}(t) = 36 \times \frac{6}{6+2} = 27V$$

$$R_o = \frac{6\times 2}{6+2}\times 10^3 = 1.5\times 10^3 \Omega$$

$$u_C(\infty) = 27V$$

$$\tau = R_o C = 0.15$$

解答

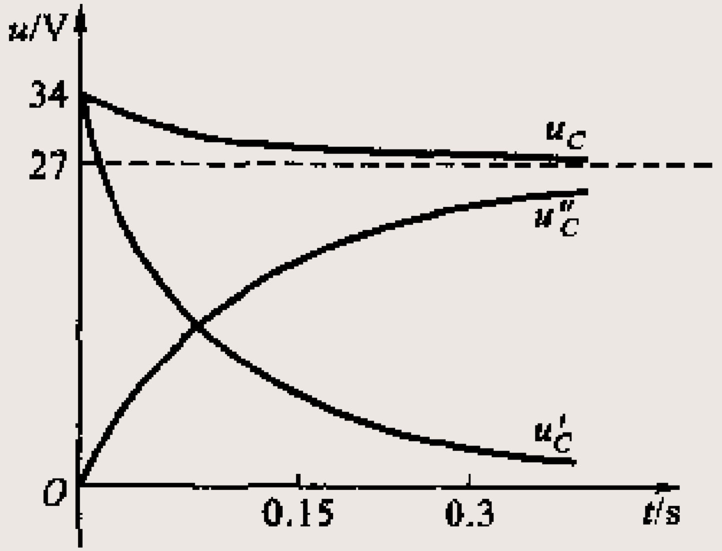
零状态响应为

$$u_C''(t)=27\left(1-e^{-\frac{t}{0.15}}\right)V$$

根据叠加原理，全响应

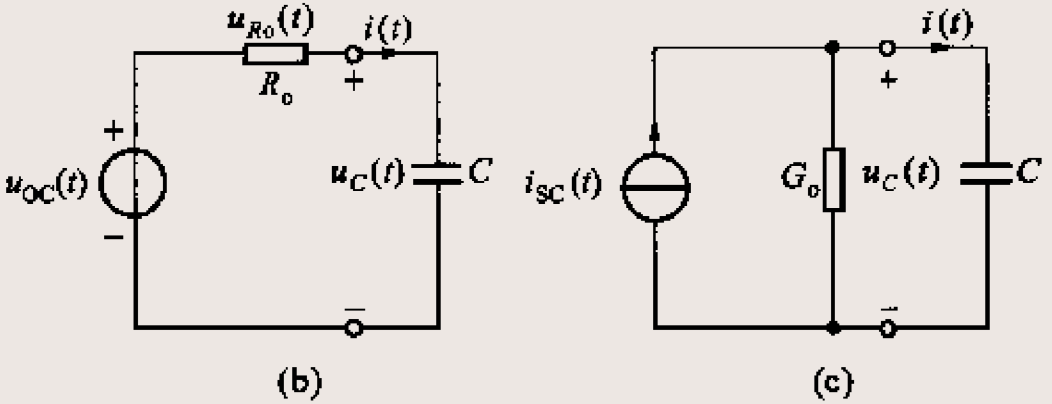
$$u_C(t)=u_C'(t)+u_C''(t)$$

$$=27+5e^{-\frac{t}{0.15}}V$$



§6-5 三要素法

❖ 三要素法适用于直流输入情况。



❖ 当输入为直流时，(b)及(c)中的$u_{oc}(t)$及$i_{sc}(t)$均为常数。以图(b)为例，令$u_{oc}(t)=U$，则可得该电路以u_C为未知量的微分方程和解为:

$$\frac{du_C}{dt}=-\frac{u_C}{\tau}+\frac{U}{\tau} \qquad \tau=R_o C$$

$$u_C(t)=Ke^{-t/\tau}+U$$

电容电压和电感电流

- 如设$u_C(0)$及$u_C(\infty)$分别为电压$u_C(t)$的初始值及稳态值，则下列关系必然成立

$$u_C(0)=K+U,\qquad u_C(\infty)=U$$

$$K=u_C(0)-u_C(\infty)$$

$$u_C(t)=\left[u_C(0)-u_C(\infty)\right]e^{-t/\tau}+u_C(\infty)$$

- 解答$u_C(t)$是由$u_C(0)$、$u_C(\infty)$和τ这三个参量确定的，只要算得这三个参量就可把解答直接写出，不必求解微分方程。对于RL电路中的电感电流，也不难得出类似于的解答式。

$$i_L(t)=\left[i_L(0)-i_L(\infty)\right]e^{-t/\tau}+i_L(\infty)$$

任一支路的电流和电压

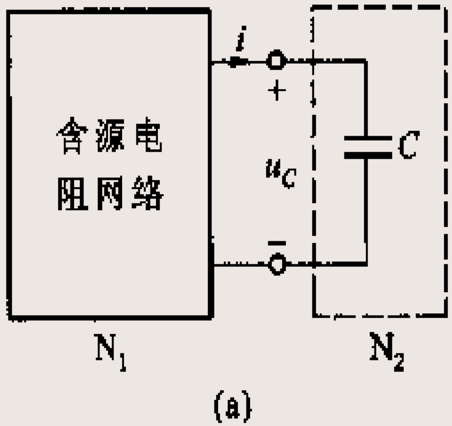
- 直流一阶电路中的任一支路电压、电流是否也都能表示为前面的形式?
- 同一电路中的各电压、电流是否都具有同一时间常数?
- 答案是肯定的，在直流一阶电路中所含电压、电流均可在求得它们的初始值、稳态值和时间常数后，直接写出它们的解答式，它们具有相同的时间常数，毋需先去求得$u_C(t)$、$i_L(t)$。
- 任一支路电压、电流的通式为:

$$f(t)=f(\infty)+[f(0)-f(\infty)]e^{-t/\tau}$$

证明

❖ 以含电容的一阶电路为例，把原电路分为两个单口网络，使其中之一只含电容，另一包含所有电源和电阻，端口电压即电容电压$u_C(t)$。

$$u_C(t)=\left[u_C(0)-u_C(\infty)\right]e^{-t/\tau}+u_C(\infty)$$



❖ 若以电压为$u_C(t)$的电压源置换电容，根据置换定理，含源电阻单口网络N_1内部各电压、电流的解与原电路中该部分中相应的各电压、电流的解答完全相同。

❖ 设单口网络N_1中任何两节点，节点j和节点k之间的电压为u_{jk}，并设N_1内部包含α个直流电压源U_{s1}、U_{s2}…$U_{s\alpha}$和β个直流电流源I_{s1}、I_{s2}…$I_{s\beta}$

证明

根据叠加定理，u_{jk}可表示为

$$u_{jk}(t)=K_0 u_C(t)+\sum_{k=1}^{\alpha}K_k U_{sk}+\sum_{k=1}^{\beta}H_{sk}I_{sk}$$

其中K_0、K_k、H_k为取决于电路联接情况及元件参数值的常数。

$$u_{jk}(t)=K_0 u_C(\infty)+K_0\left[u_C(0)-u_C(\infty)\right]e^{-t/\tau}+\sum_{k=1}^{\alpha}K_k U_{sk}+\sum_{k=1}^{\beta}H_{sk}I_{sk}$$

令 $$u_{jk}(\infty)=K_0 u_C(\infty)+\sum_{k=1}^{\alpha}K_k U_{sk}+\sum_{k=1}^{\beta}H_{sk}I_{sk}$$

$$u_{jk}(0)=K_0 u_C(0)+\sum_{k=1}^{\alpha}K_k U_{sk}+\sum_{k=1}^{\beta}H_{sk}I_{sk}$$

得 $$u_{jk}(t)=u_{jk}(\infty)+\left[u_{jk}(0)-u_{jk}(\infty)\right]e^{-t/\tau}$$

三要素解题

1) 用电压为$u_C(0)$的直流电压源置换电容，用电流为$i_L(0)$的直流电流源置换电感，得到t=0时的等效电路，求得任一电压或电流的初始值$u_{jk}(0)$或$i_j(0)$。

2) 用开路代替电容或用短路代替电感，得到t=∞时的等效电路，求得电路中的任一电压或电流的稳态值$u_{jk}(\infty)$或$i_j(\infty)$。

3) 求N_1的戴维南或诺顿等效电路以计算电路的时间常数$\tau=R_oC$或$\tau=L/R_o$

4) 若$0<\tau<\infty$，根据算得的三要素法，

$$f(t)=f(\infty)+[f(0)-f(\infty)]e^{-t/\tau}=f(0)+[f(\infty)-f(0)](1-e^{-t/\tau})$$

求初始值$f(0_+)$和$f(\infty)$

(1)求初始值$f(0_+)$

- 在t=0_-的等效电路中求$u_C(0_-)$、$i_L(0_-)$。t=0_-的等效电路为换路前的稳态，电容相当于开路，电感相当于短路。根据状态不能跃变

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)\text{和 }i_L(0_+)=i_L(0_-)$$

- 作$t=0_+$的等效电路，电容用电压为$u_C(0_+)$的电压源置换，电感用电流为$i_L(0_+)$的电流源置换。
- 在$t=0_+$的等效电路中求所需的初始值$f(0_+)$ 。

(2)求稳态值$f(\infty)$

- 作t=∞的等效电路，电容开路，电感短路
- 在t=∞的等效电路中求所需的稳态值$f(\infty)$ 。

时间常数τ

(3)求时间常数τ

- ❖ 首先求出从动态元件两端看进去的戴维南等效电阻，求R_o的方法：

①独立源为零值，用电阻的串并联公式化简。

②独立源为零值，外加电压u，求输入端电流i，等效电阻等于端钮上电压、电流比

$$R_o = \frac{u}{i}$$

③ 开路电压比短路电流(独立源要保留)。

$$R_o = \frac{u_{oc}}{i_{sc}}$$

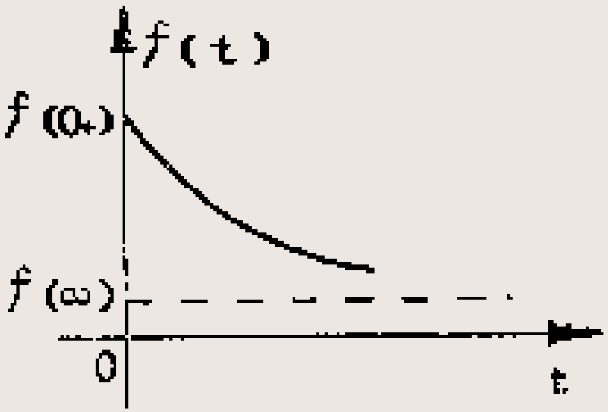
- ❖ 含受控源电路只能用②、③两种方法。
- ❖ 电路的时间常数 $\tau=R_oC$或$\tau=L/R_o$

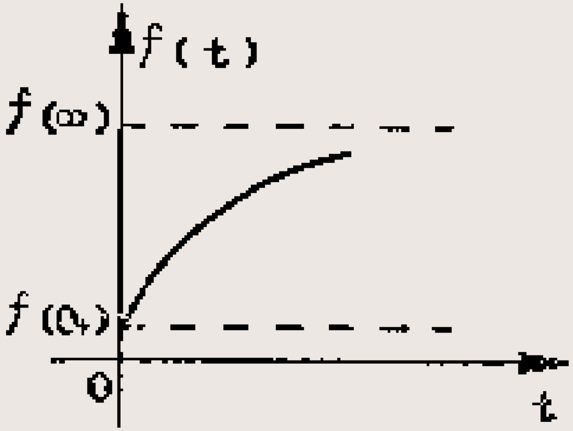
求$f(t)$

(4)将$f(0_+)$和$f(\infty)$、τ代入公式

$$f(t)=f(\infty)+\left[f(0_+)-f(\infty)\right]e^{-t/\tau}$$

$$f(t)=f(0_+)+\left[f(\infty)-f(0_+)\right]\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$





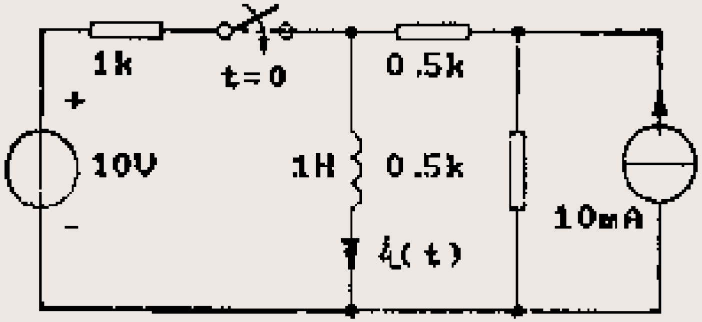
例

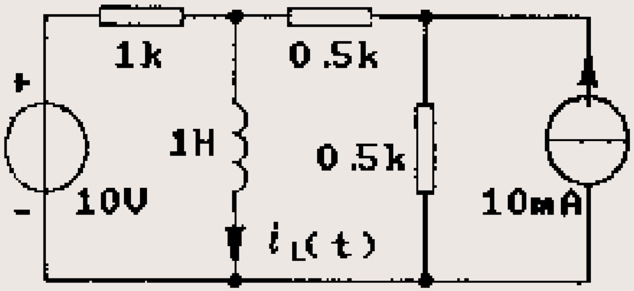
假定开关闭合前电路已处于稳态，求流过1$k\Omega$电阻的电流，$t \geq 0$。(用三要素法)

解 开关闭合后电路如右图

(1)求初始值$i(0_+)$，已知开关闭合前电路处于稳态，电感相当于短路。

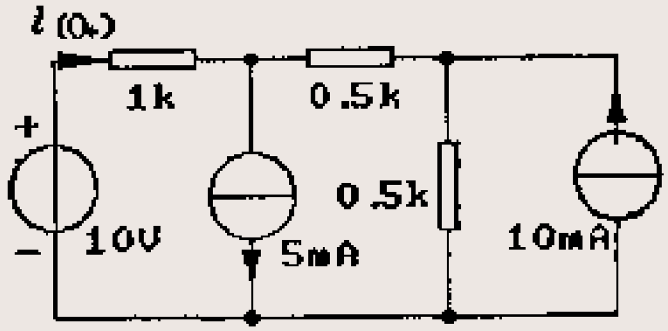
由于电感状态不能跃变 $$i_L(0_-)=\frac{1}{2}\times 10=5mA=i_L(0_+)$$





解 答

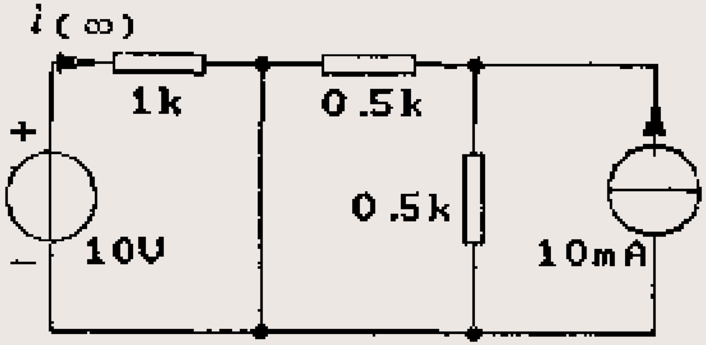
- 作t=0_+的等效电路，电感用电流为5mA的电流源置换。
- 用叠加定理求$i(0_+)$



$$i(0_+)=\frac{10}{1+0.5+0.5}+\frac{1}{2}\times 5-\frac{0.5}{1+0.5+0.5}\times 10=5mA$$

(2)求稳态值$i(\infty)$

作t=∞的等效电路，电感短路。

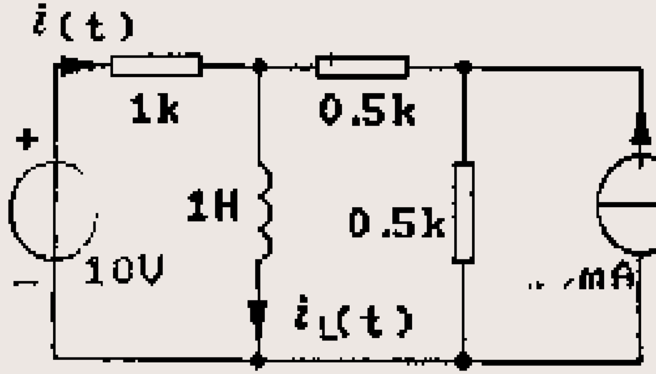


$$i(\infty)=\frac{10V}{1k}=10mA$$

解答

(3)求时间常数τ

从电感两端看进去等效电阻



$$R_o = \frac{1\times(0.5+0.5)}{1+0.5+0.5} = 0.5k\Omega = 500\ \Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R_o} = \frac{1}{500}s$$

$$i(t) = i(\infty) + [i(0_+) - i(\infty)]e^{-t/\tau}$$

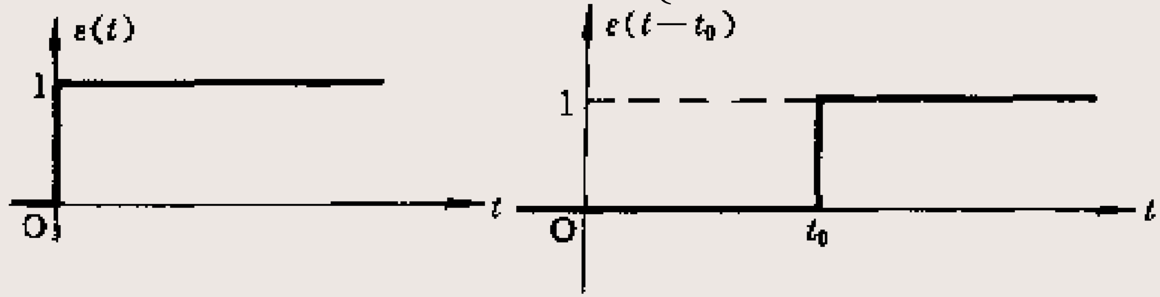
$$= 10 + (5 - 10)e^{-500t}$$

$$= 10 - 5e^{-500t}mA$$

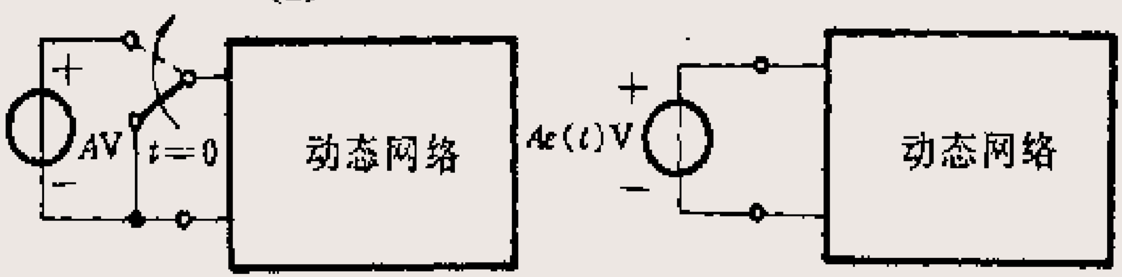
§6-6 阶跃函数和阶跃响应

❖ 单位阶跃函数记为$\varepsilon(t)$，其定义为 $$\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

❖ 延时单位阶跃函数 $$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 1 & t>t_0\end{cases}$$



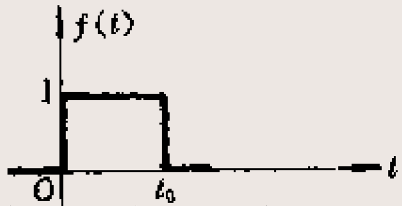
(a) (b)

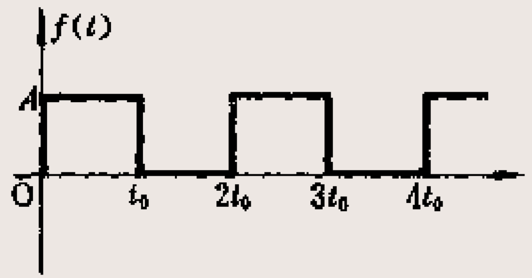


(a) (b)

阶跃函数

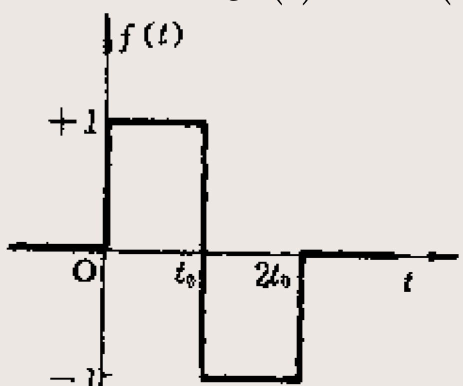
❖ 运用阶跃函数和延时阶跃函数，分段常量信号可表示为一系列阶跃信号之和。

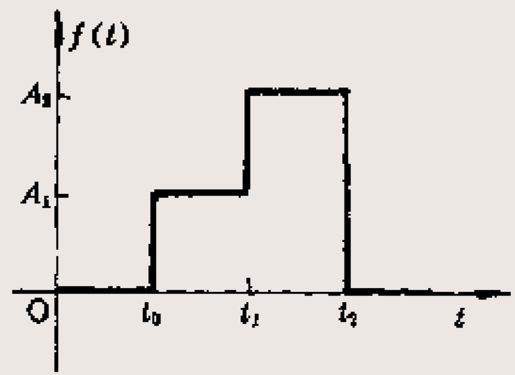




$$f(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-t_0)$$

$$f(t)=A\varepsilon(t)-A\varepsilon(t-t_0)+A\varepsilon(t-2t_0)-A\varepsilon(t-3t_0)+\ldots$$





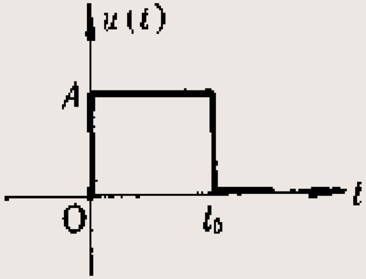
$$f(t)=\varepsilon(t)-2\varepsilon(t-t_0)+\varepsilon(t-2t_0)$$

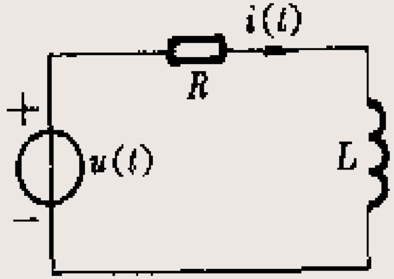
阶跃响应

- 零状态电路对单位阶跃信号的响应称为(单位)阶跃响应，并用$s(t)$表示。
- 如果输入是幅度为A的阶跃信号，则根据零状态比例性可知$As(t)$即为该电路的零状态响应。
- 若单位阶跃信号作用下的响应为$s(t)$，则在延时单位阶跃信号作用下响应应为$s(t-t_0)$。
- 根据叠加定理，各阶跃信号分量单独作用于电路的零状态响应之和为该分段常量信号作用下电路的零状态响应。
- 如果电路的初始状态不为零，只需再加上电路的零输入响应，即可求得该电路在分段常量信号作用下的完全响应。

例6-15

求零状态*RL*电路在脉冲电压作用下的电流*i*(*t*)。已知*L*=1H，*R*=1Ω。





解 脉冲电压*u*(*t*)可分解为两个阶跃信号之和，幅度为*A*，即

$$u(t)=A\varepsilon(t)-A\varepsilon(t-t_0)$$

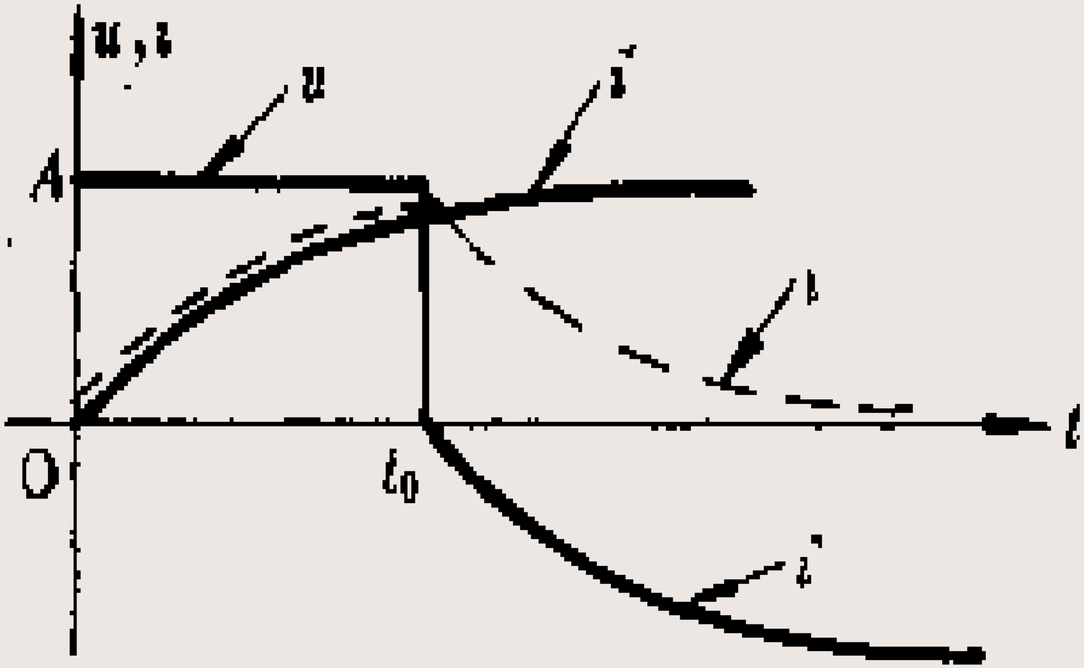
$\tau=L/R=1s$，$A\varepsilon(t)$和$A\varepsilon(t-t_0)$作用下的零状态响应：

$$i'(t)=\frac{A}{R}\left(1-e^{-t/\tau}\right)\varepsilon(t)=A\left(1-e^{-t}\right)\varepsilon(t)$$

$$i''(t)=-\frac{A}{R}\left(1-e^{-(t-t_0)/\tau}\right)\varepsilon(t-t_0)=-A\left(1-e^{-(t-t_0)}\right)\varepsilon(t-t_0)$$

$$i(t)=i'(t)+i''(t)=A\left(1-e^{-t}\right)\varepsilon(t)-A\left(1-e^{-(t-t_0)}\right)\varepsilon(t-t_0)$$

$i(t)$、$i'(t)$和$i''(t)$的波形

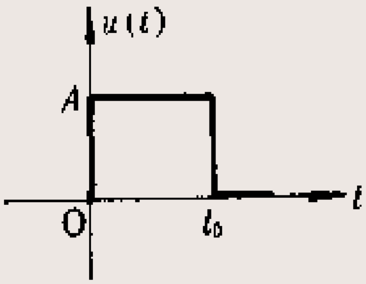


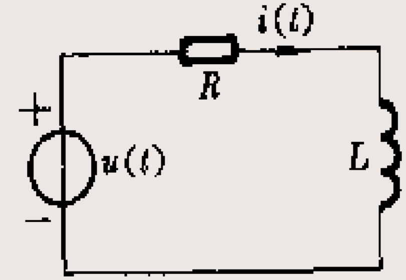
§ 6-7 一阶电路子区间分析

- 分段常量信号作用下的一阶电路还可以按若干子区间进行分析。
- 设分段常量信号在t=0时作用于电路，可以把$0<t<\infty$划分为若干子区间[t_j，t_{j+1})，j=1、2、…，使在每一子区间内输入信号为一常量，电路被分解为一个直流一阶电路序列，每一直流一阶电路均可运用三要素法分析，所得电路序列的响应是由指数波形序列构成的。
- 由于在两子区间交接时刻t_j，输入信号发生跃变，因而除了u_C、i_L能保持连续不变，其他电压、电流一般都要发生跃变。在子区间[t_j，t_{j+1})内电压、电流的初始值应是t=t_{j+}时的数值。

例6-18

求零状态*RL*电路在图中所示脉冲电压作用下的电流*i*(*t*)。已知L=1H，R=1Ω。运用于区间分析求解。





解　在子区间[0，t_0)内，电路相当于在直流电压的作用下，由三要素法可得

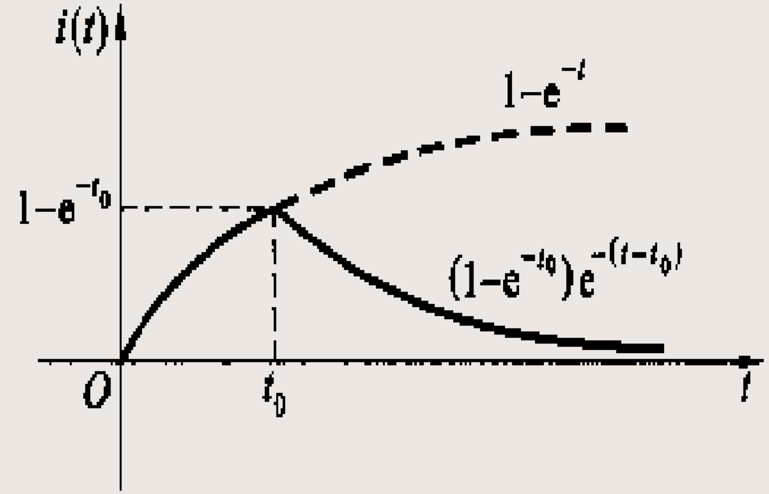
$$i(t)=A\left(1-e^{-t}\right)\qquad 0\le t\le t_0$$

由于$i(t)$为电感电流，$i(t_{0-})=i(t_{0+})$，所以，在子区间[$t_{0+}\infty$)内，电流$i(t)$的初始值为

$$i(t_0)=A\left(1-e^{-t_0}\right)$$

解答

在子区间$[t_{0+}, \infty)$内，电压源相当于短路，电路在初始电流$i(t_0)$的作用下，电路的时间常数未变，仍为τ=1s。产生的零输入响应为：



$$i(t) = A\left(1 - e^{-t_0}\right)e^{-t'}$$

故得 $t = t_0 + t'$

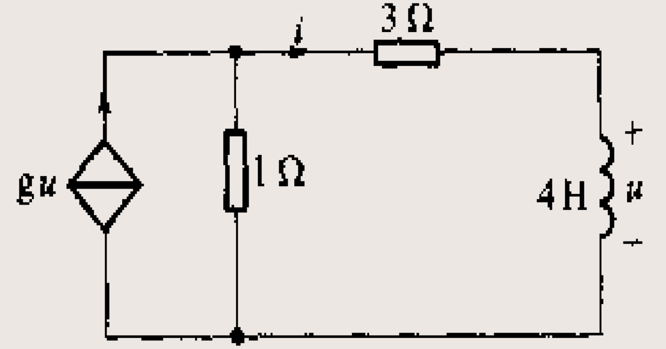
$$i(t) = A\left(1 - e^{-t_0}\right)e^{-(t-t_0)} \qquad t \geq t_0$$

$$i(t) = A\left(1 - e^{-t}\right)\left[\varepsilon(t) - \varepsilon(t - t_0)\right] + A\left(1 - e^{-t_0}\right)e^{-(t-t_0)}\varepsilon(t - t_0)$$

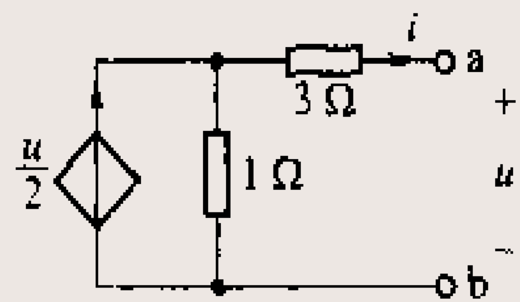
把两个子区间合起来

习题6-7

已知$i(0)=2A$，$g=0.5s$，求$u(t)$，$t\geq 0$。



解 此为零输入响应，用外加电压源法求等效电阻。



$$u = -3i + \left(\frac{u}{2} - i\right) \times 1$$

$$u = -8i$$

非关联

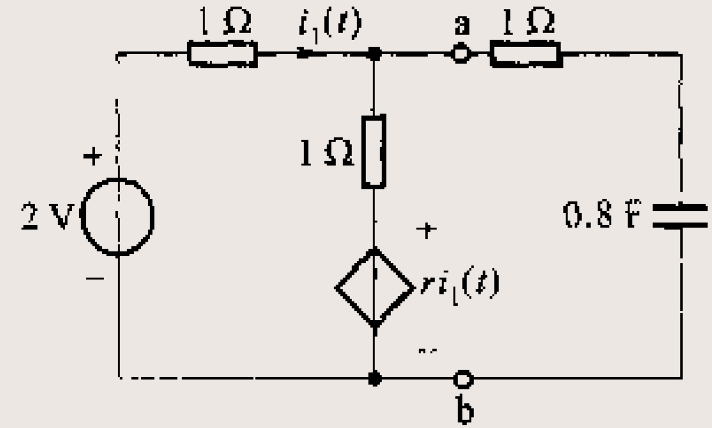
$$R_o = \frac{u}{-i} = 8\Omega \qquad \tau = \frac{L}{R_o} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}s$$

$$i_L(t) = i(0)e^{-t/\tau} = 2e^{-2t}A \qquad t \geq 0$$

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = 4 \times 2 \times (-2)e^{-2t} = -16e^{-2t}V \qquad t \geq 0$$

习题6-16

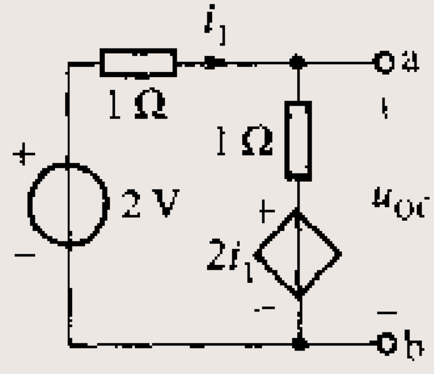
r=2Ω，电压源于t=0时开始作用于电路，试求i_1，$t\geq 0$。



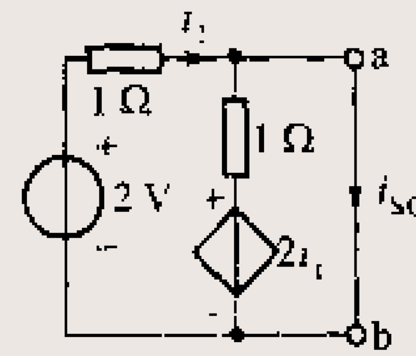
解 此为零状态响应，从ab处断开1Ω和0.8F 串联支路，用回路法求出开路电压u_{oc}。

$$(1+1)i_1+2i_1=2 \qquad i_1=\frac{1}{2}A$$

$$u_{oc}=2-1\times i_1=1.5V$$



(a)



(b)

求短路电流i_{sc}

$$i_1=\frac{2}{1}=2A \qquad i_{sc}=i_1+\frac{2i_1}{1}=6A$$

解答

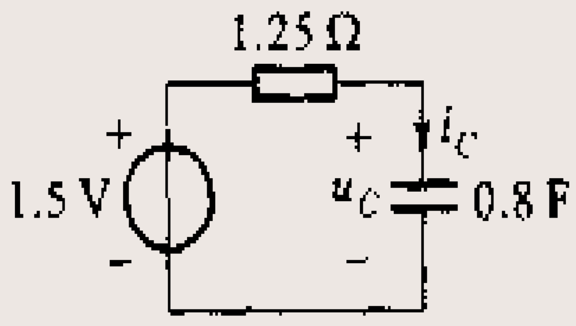
等效电阻

$$R_{ab} = \frac{u_{oc}}{i_{sc}} = \frac{1.5}{6} = 0.25\,\Omega$$

$$\tau = (1 + R_{ab})C = 1.25 \times 0.8 = 1s$$

$$u_c(t) = 1.5(1 - e^{-t})V \qquad t \geq 0$$

零状态响应



(c)

作业

练习

1、2、3、7、14、21、33、38、41

预习第七章