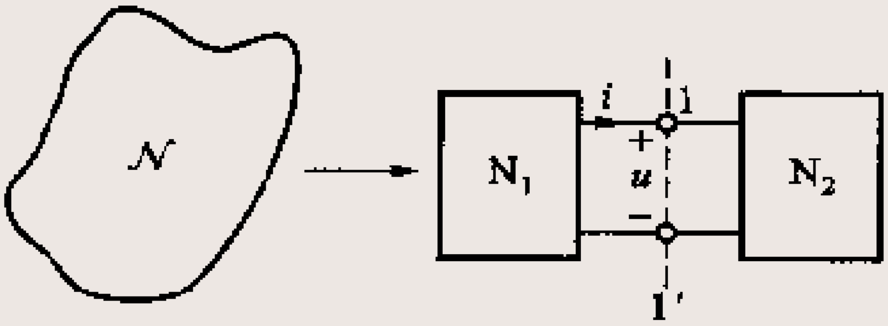
第四章

分解方法及单口网络

2010年10月9日

网络分解的目的

- 运用节点法或网孔法对复杂网络进行分析时，如果只对其中某一支路的电压、电流或其中某些局部的电压、电流感兴趣时，仍嫌联立方程太多。
- 解决这一问题的一种办法是把这个“大”网络分解为若干个“小”网络，即若干个子网络，对这些子网络逐一求解从而得出所需结果。
- 最简单的情况是把原网络看成是由两个通过两根导线相连的子网络N_1和N_2所组成。



单口网络

- 对外只有两个端钮的网络整体称为二端网络或单口网络。
- 一个元件的电压电流关系是由元件本身所确定的，与外接的电路无关；一个单口网络除了通过它的两个端钮与外界相连接外，别无其他联系，则单口网络的VCR也是由网络本身所确定的，与外接电路无关。
- 当对一个网络N进行分解处理时，首先应把单口网络N_1和N_2从原网络中分离出来，求得它们的VCR，然后再求得它们相连时的端口电压u和端口电流i。

§4-1分解的基本步骤

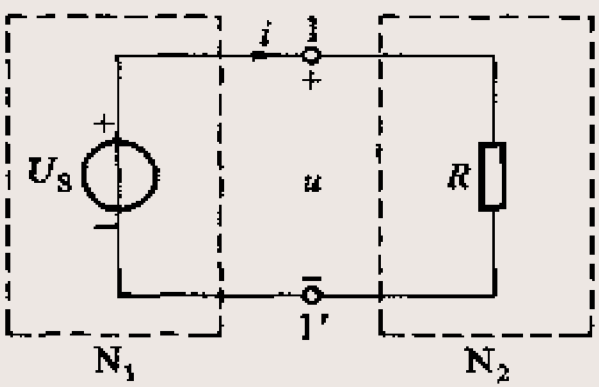
❖ 分解的基本步骤为:

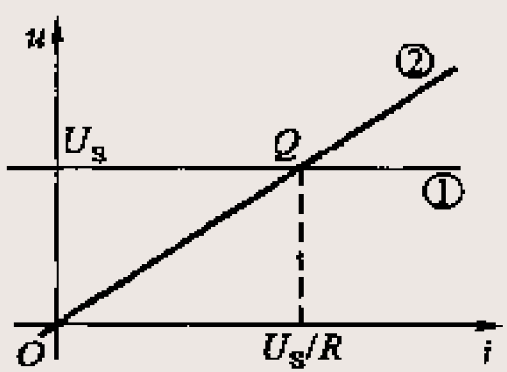
(1)把网络划分为两个单口网络N_1和N_2;

(2)分别求出N_1和N_2的VCR(计算或测量);

(3)联立两者的VCR式或由它们伏安特性曲线的交点，求得N_1和N_2的端电压、电流;

(4)分别求解N_1和N_2内部各支路电压、电流。





§4-2 单口网络的电压电流关系

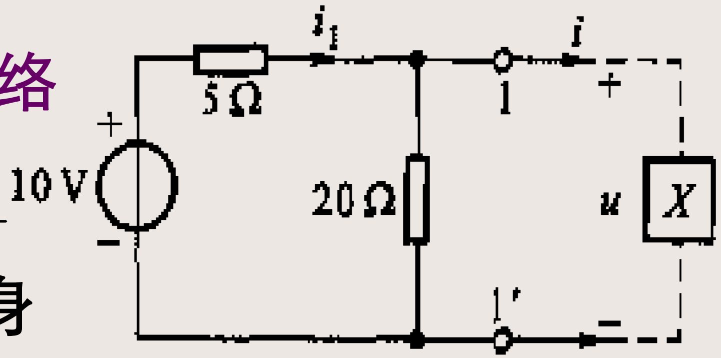
- 如果在单口网络中不含有任何能通过电或非电的方式与网络之外的某些变量相耦合的元件，则这单口网络称为明确的。
- 单口可以用下列的几种方式之一来描述：

1) 详尽的电路模型；
2) 端口电压与电流的约束关系：方程或曲线；
3) 等效电路。

- 其中以2)最具表征意义，相当于元件的约束关系，当单口内部情况不明时，可以用实验方法测得。

例4-1

试求含电压源和电阻的单口网络的VCR。



解　单口网络的VCR是由它本身性质决定的，与外接电路无关。因此，可以在任何外接电路X的情况下来求它的VCR。

先列出整个电路的方程，然后消去除u和i以外的所有变量。

$$10 = 5i_1 + u$$

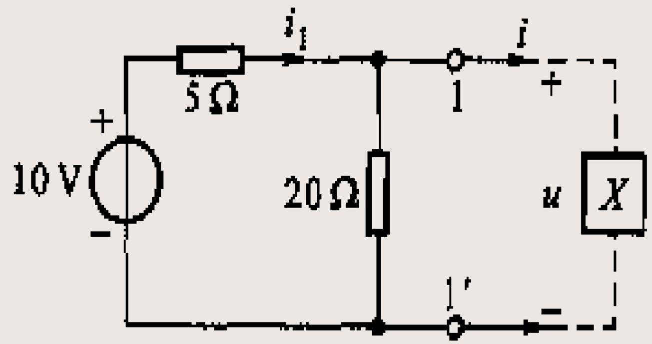
$$u = 20\left(i_1 - i\right)$$

消去i_1

$$u = 8 - 4i$$

X为电流源

- 如果设想X是一个电流源i_s(设方向向下)，且设其两端电压为u(设正极在上)，则由节点法可以更方便可求得结果。



- 该电路共有两个节点电压，其一即为电流源两端的电压u，亦即单口网络的端口电压；另一为已知电压源的电压，其值为$10V$，故得节点电压方程：

$$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{20}\right)\times u-\left(\frac{1}{5}\right)\times 10=-i_s$$

$$i=i_s$$

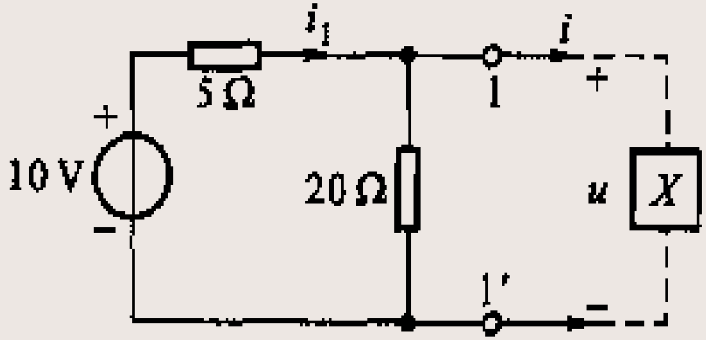
$$u=8-4i$$

X为电压源

- 用“外施电压源求电流”的方法来解决求VCR的问题。
- 可设想X为电压源，此电压源的电压显然即为单口网络的端口电压u，所求的电流显然即为单口网络的端口电流i。
- 如用节点法，则方程当为

$$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{20}\right)u-\left(\frac{1}{5}\right)\times 10=-i$$

$$u=8-4i$$



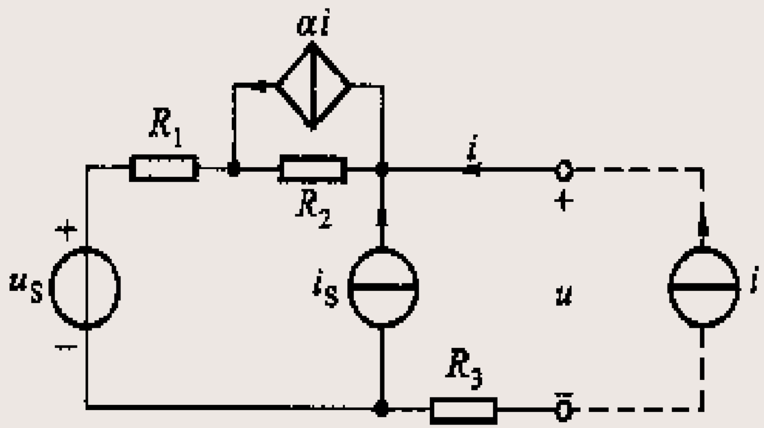
结论

- 单口网络的VCR与外接电路无关，因此，完全可以在最简单的外接电路情况下，求得它的VCR。
- 外施电流源求电压法和外施电压源求电流法是常用的方法，也是用实验方法确定VCR的依据。

例4-2

求含电源、电阻和受控源的单口网络的VCR。

解 设想在电路两端施加电流源i，可写出VCR表达式

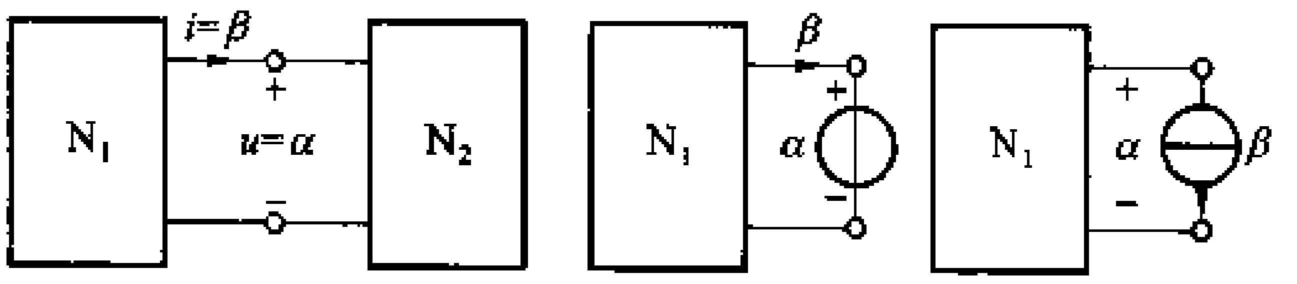


$$u = (i + i_s - \alpha i)\times R_2 + (i + i_s)\times R_1 + u_s + iR_3$$
$$= [u_s + (R_1 + R_2)\times i_s] + [R_1 + R_3 + (1-\alpha)\times R_2]\times i$$

由本例和上例可见含独立电源单口网络的VCR总可以表示为 $u = A + Bi$ 的形式。

§4-3 置换定理

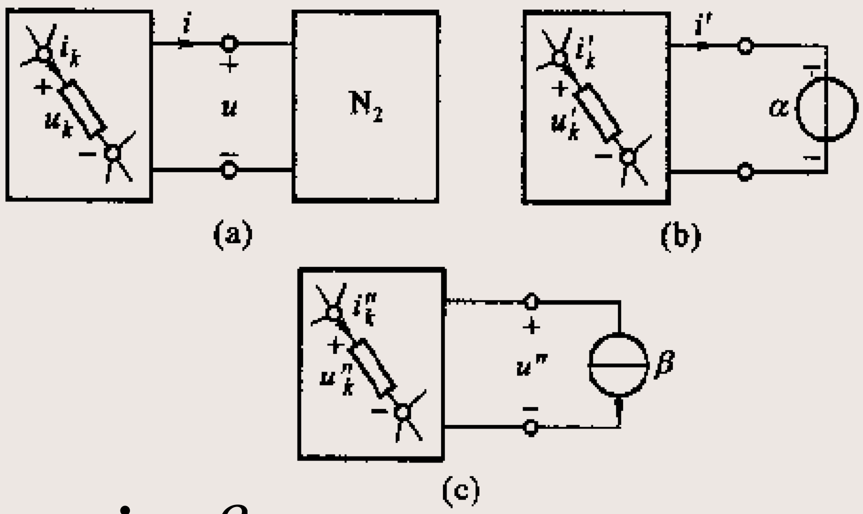
定义：若网络N由两个单口网络N_1和N_2连接组成，且各支路电压、电流均有惟一解。设已知端口电压和电流值分别为α和β，则N_2(或N_1)可以用一个电压为α的电压源(图b)或用一个电流为β的电流源 (图c) 置换，不影响N_1(或N_2)内各支路电压、电流原有数值，只要在置换后，网络仍有惟一解。



(a) (b) (c)

证明

设在图(a)所示的网络中，根据两类约束关系已解出各支路的电压、电流。例如，N_1内某支路k的电压、电流分别为：



$$u_k = \alpha_k, i_k = \beta_k$$

端口电压、电流分别为： $u = \alpha, i = \beta$

若N_2用一个电压为α的电压源所置换，如图(b)，需要论证支路k电压、电流的解u_k'和i_k'仍应为：

$$u_k^{'} = \alpha_k, i_k^{'} = \beta_k$$

端口电流i'的解答则应为： $i^{'} = \beta$

证明（续）

- 对图(b)，一个典型的KCL方程的形式为：

$$\sum i_k' = 0$$

- 该方程系根据某一包含支路k的节点n写出的。如以假定的解答$i_k' = \beta_k$代入，需要论证

$$\sum \beta_k = 0$$

- 显然，这一式子是成立的，因为同样的节点n也存在于图(a)的网络之中，而电流β_k正是该网络惟一的一组解答。

证明（续）

- 也可论证所设的解答也满足KVL以及N_1内部所有元件的VCR。
- 剩下的工作是要论证所设的解答是否满足用以置换N_2的电压源的VCR。
- 回答也是肯定的，因为流过电压源的电流可以为任何值。

证明（续）

- 对图(c)所示用电流为β的电流源置换N_2的情况，也可用同样的方法论证：

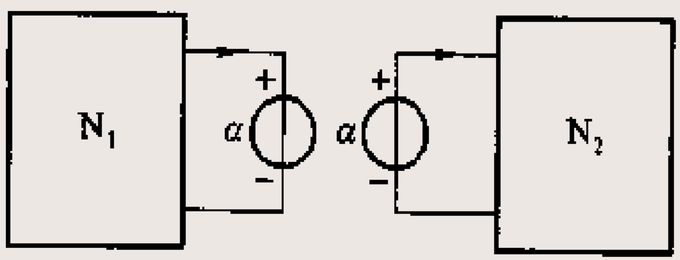
$$u_k'' = \alpha_k , i_k'' = \beta_k$$

而端口电压

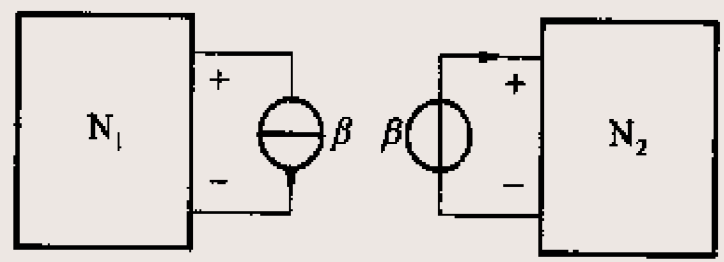
$$u'' = \alpha$$

置换定理的作用

- 利用置换定理，可以先求得N_1和N_2的端口电压和端口电流，把原电路分为两个子网络，进而求出N_1及N_2所有支路电压和电流。



(a)　　(b)

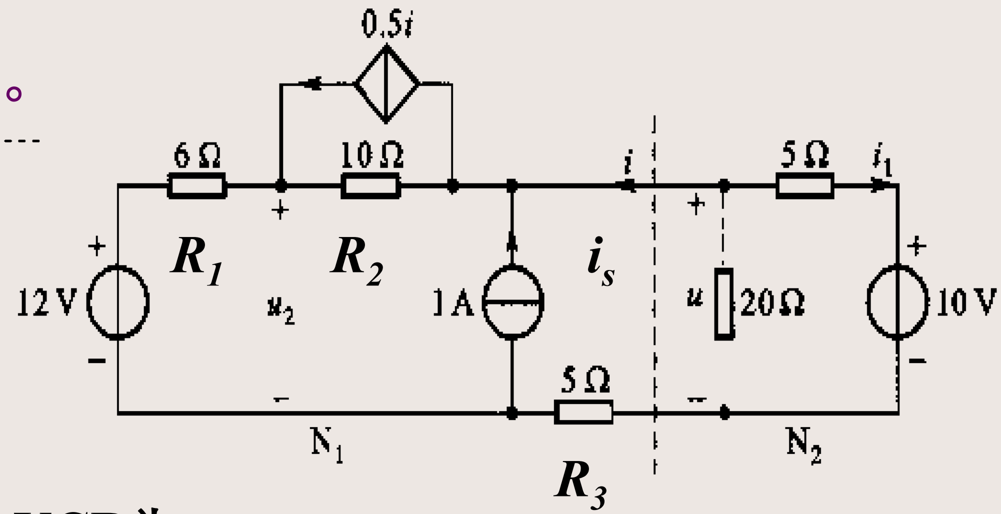


(a)　　(b)

例

试用分解方法求i_1和u_2。

解 (1)自图中虚线处把电路分为两个单口网络N_1和N_2，端口电压u和电流i的参考方向如图。



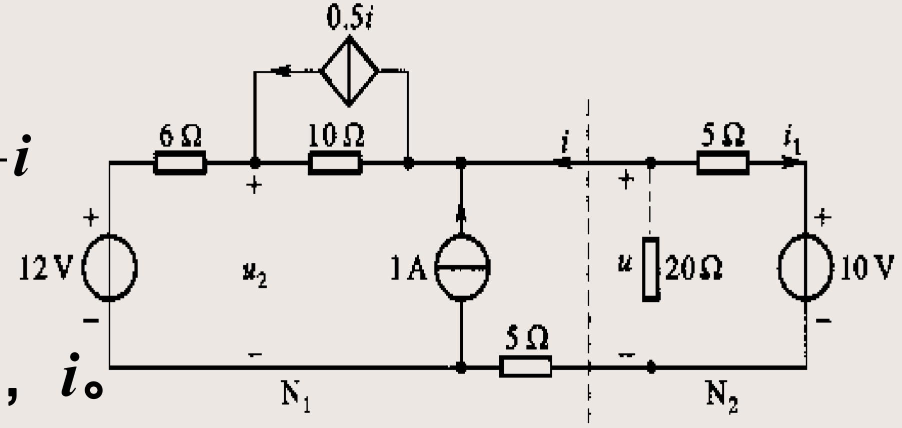
(2)求N_1和N_2的VCR。N_1的VCR为:

$$u=(i+i_S-\alpha i)R_2+(i+i_S)R_1+u_S+iR_3$$
$$=[u_S+(R_1+R_2)i_S]+[R_1+R_3+(1-\alpha)R_2]i$$
$$=[12+(6+10)\times 1]+[6+5+(1-0.5)\times 10]i$$
$$=28+16i$$

解答

N$_2$的节点电压方程为：

$$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{20}\right)u-\left(\frac{1}{5}\right)\times 10=-i$$



$$u=8-4i$$

(3)联立两者的VCR，解u，i。

$$8-4i=28+16i$$

$$i=-1A \qquad u=12V$$

节点电流和为零

(4)以12V电压源置换N$_1$，可得：

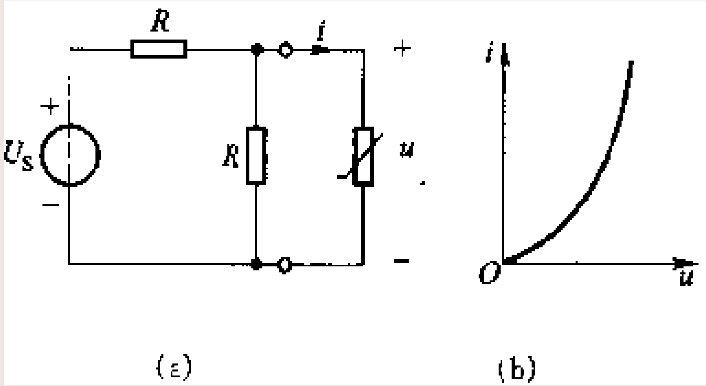
$$u=5i_1+10 \qquad i_1=\frac{12-10}{5}A=0.4$$

以-1A电流源置换N$_2$，因6Ω电阻上无电流，可得

$$u_2=12V$$

例

已知非线性电阻的伏安特性曲线如图(b)所示，试求非线性电阻两端的电压u和流过的电流i。

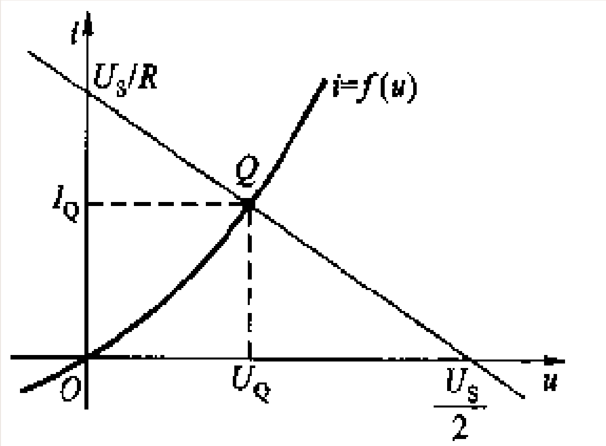


解 将线性部分与非线性部分划分为两个单口网络，用节点法求得线性单口的VCR为：

$$\frac{2}{R}u - \frac{1}{R}U_S = -i$$

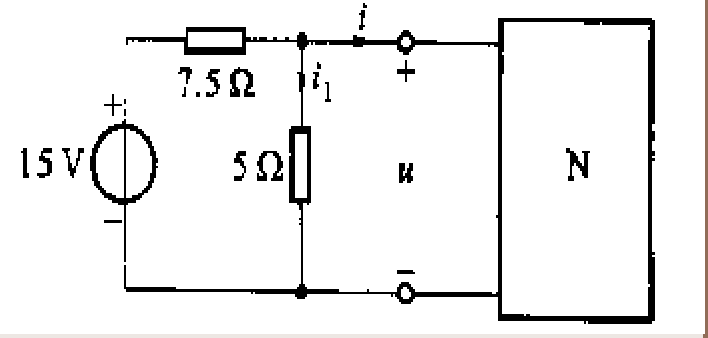
$$2u = U_S - Ri$$

在非线性电阻VCR的同一个u-i平面上作出线性部分的伏安特性曲线，这是一条直线，两条线的交点便是所求解答。



练习题

已知N的VCR为$u=i+2$，试用置换定理求解i_1。



解：先求出左边网络的VCR，再与N的VCR联立，求出u，用电压源u置换。

$$i+\frac{u}{5}=\frac{15-u}{7.5} \Rightarrow u=-3i+6$$

与$u=i+2$联立求解

$$u=-3\times(u-2)+6 \Rightarrow u=3V$$

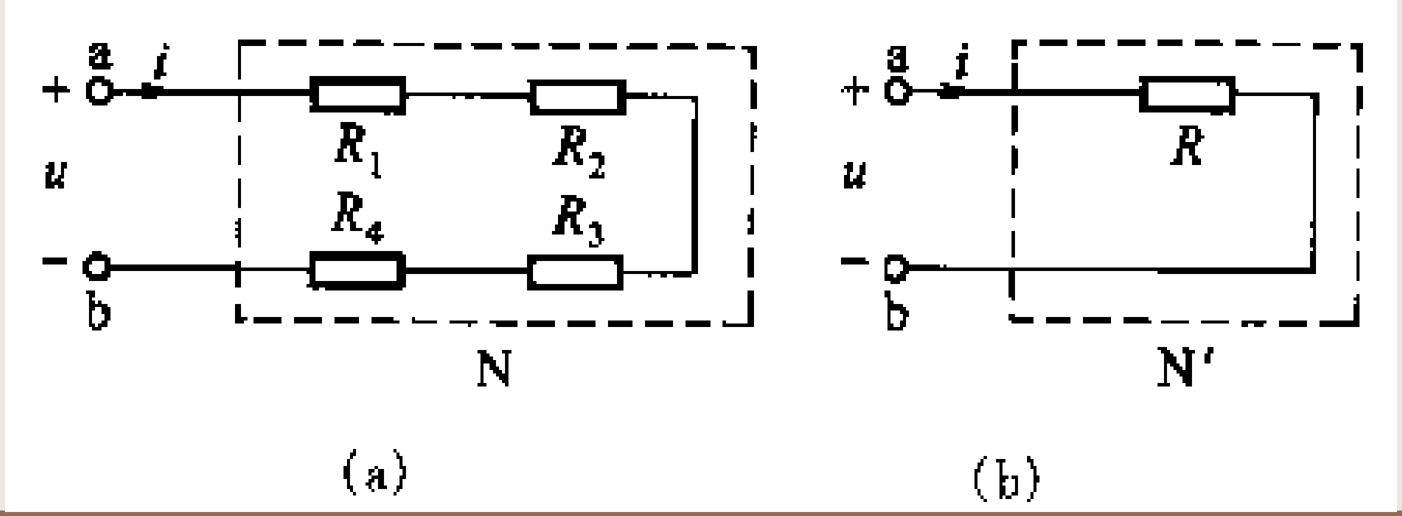
用3V电压源置换

$$i_1=\frac{u}{5}=\frac{3}{5}A$$

§ 4-4 单口网络的等效电路

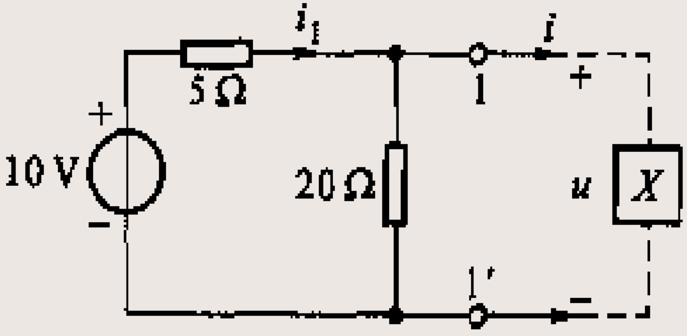
定义：如果一个单口网络N和另一个单口网络N’的电压、电流关系完全相同，亦即它们在*u*-*i*平面上的伏安特性曲线完全重叠，则这两单口网络便是等效的。

尽管这两个网络可以具有完全不同的结构，但对任一外电路来说，它们却具有完全相同的影响，没有丝毫差别。



例

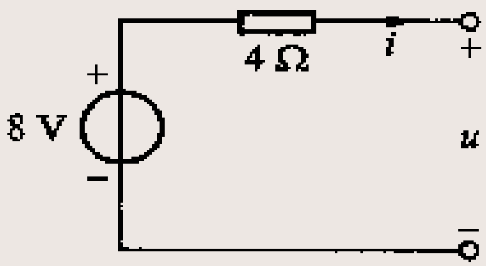
求单口网络的最简单的等效电路。



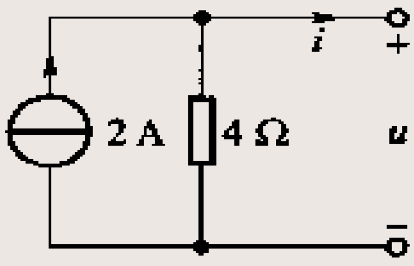
解 该单口的VCR为

$$i+\frac{u}{20}=\frac{10-u}{5} \Rightarrow u=8-4i,\quad i=2-\frac{u}{4}$$

可用以下两图等效



(a)



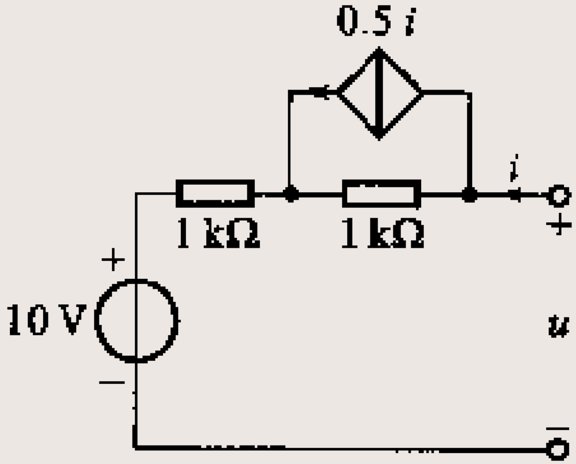
(b)

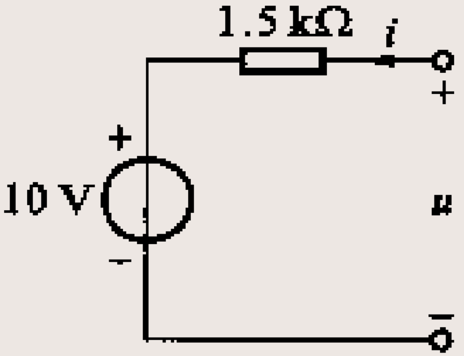
例4-7

试化简单口网络。

解　因为受控源控制量为i，设想在单口网络两端外接电流源，其电流为i，则可求得其端口电压：

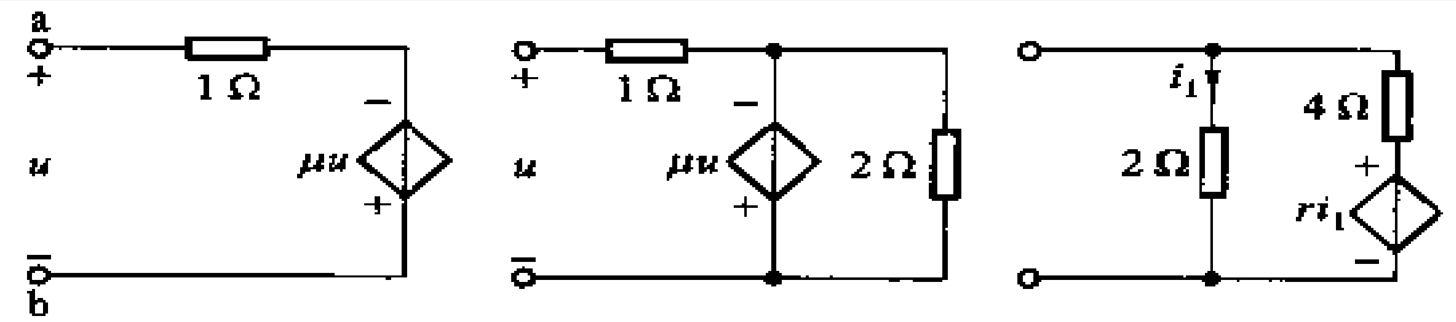
$$u = 1\times(i-0.5i)+1\times i+10$$
$$= 1.5i+10$$





练 习 题

求各单口网络的输入电阻R。



解 只含电阻和受控源单口网络，其端口电压与端口电流的比值称为输入电阻。 在计算网络电阻时，可直接计算此比值。外接一个电压u，则:

$$u = i \times 1 - \mu u$$

$$R = \frac{u}{i} = \frac{1}{1+\mu}$$

$$u = i \times 1 - \mu u$$

$$R = \frac{u}{i} = \frac{1}{1+\mu}$$

$$u = (i - i_1) \times 4 + r i_1$$

$$i_1 = \frac{u}{2}$$

$$R = \frac{u}{i} = \frac{8}{6-r}$$

§ 4-5 等效规律和公式

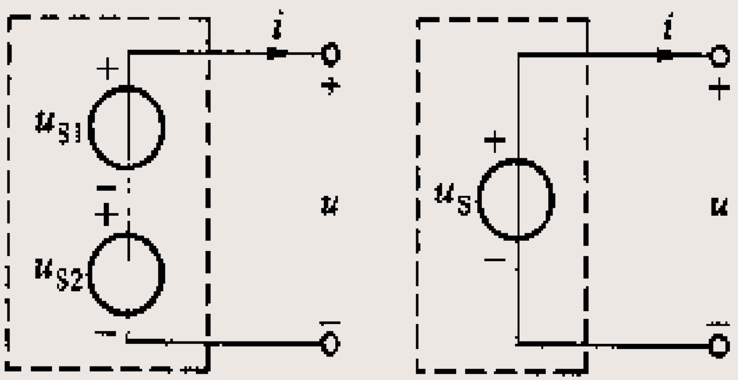
❖ 对电压源、电流源和电阻等三种元件中每次取两个元件作串联或并联组成的，共计十二种情况。

❖ 含受控源的单口网络，即便结构简单，一般也需用外施电源求VCR的方法来处理，没有公式可以直接套用。

(1)两电压源串联

❖ 设一单口网络由两电压源串联组成，在任何外接电路下，都可得到：

$$u_s = u_{s1} + u_{s2}$$

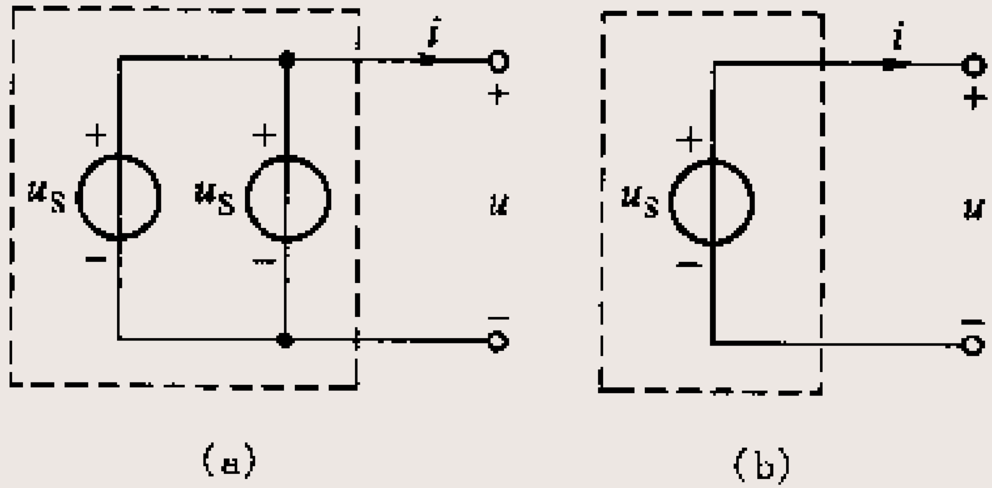


(a)　　(b)

对几个电压源及各种不同极性相串联的情况，u_s 为所有电压源的电压值的代数和。

(2)两电压源并联

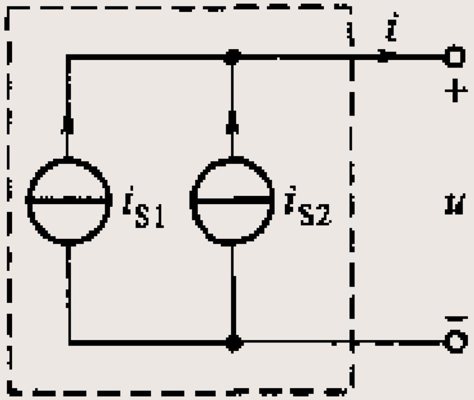
- 电压源的并联一般将违背KVL，因而是不可能的。
- 只有相同电压源作极性一致的并联才是允许的，此时其等效电路即为其中任一电压源。



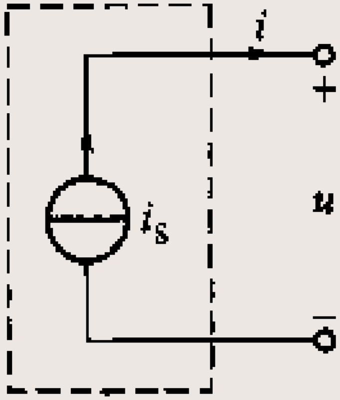
(3)两电流源的并联

❖ 两电流源i_{s1}和i_{s2}作并联，其等效电路为一个电流源，其值为

$$i_s = i_{s1} + i_{s2}$$



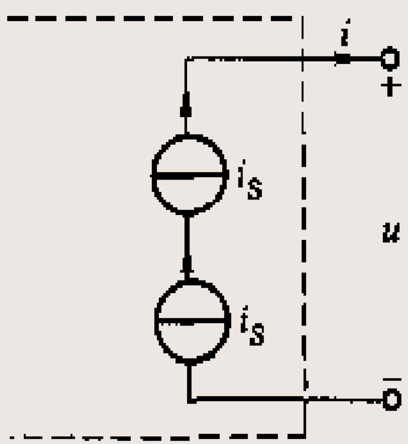
(a)



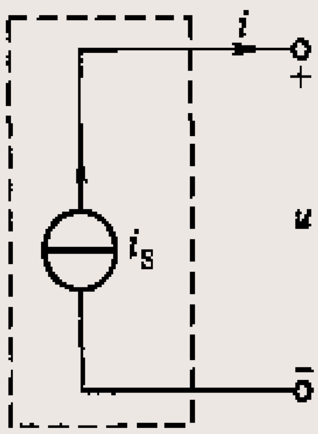
(b)

(4)两电流源的串联

❖ 电流源的串联一般将违背KCL，只有在电流源的电流都相等，且方向一致时，串联才是允许的，此时其等效电路即为其中任一电流源。



(a)



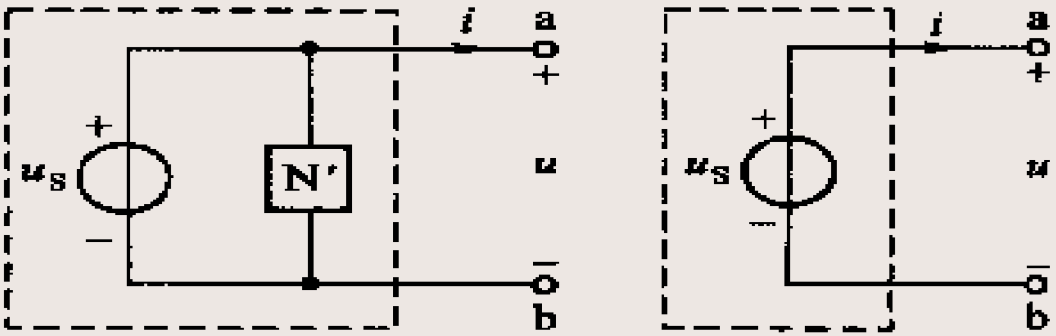
(b)

(5) 电压源与电流源/电阻并联

❖ 这两种情况可归结为下图所示电路，其中N’可为电流源或电阻，其单口网络的VCR是:

$$u = u_s$$

电流可为任意值



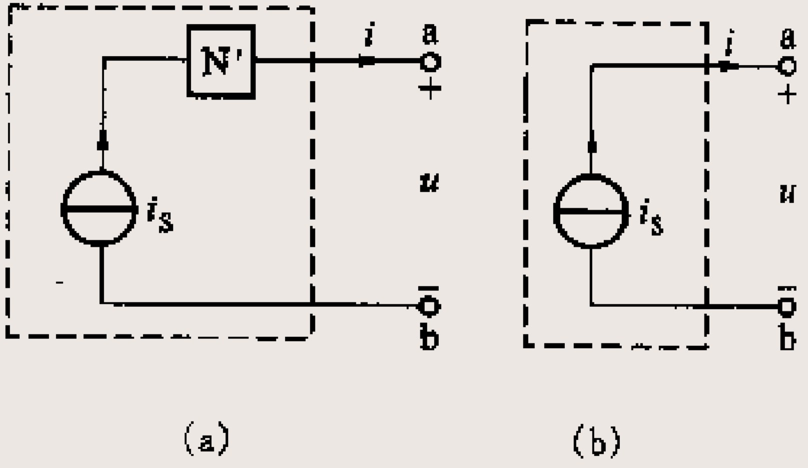
(a) (b)

N’不影响端口电压的大小，端口电压总等于电压源的电压。N’为多余元件。

(6)电流源与电压源/电阻串联

❖ 这两种情况可归结为下图所示电路，其中N’可为电压源或电阻，其单口网络的VCR是

$$i = i_s$$



N’不影响端口电流的大小，端口电流总等于电流源的电流。N’为多余元件。

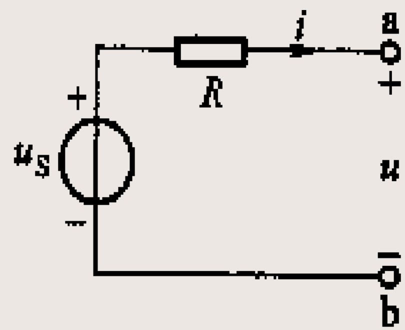
(7)电阻与电源串并联

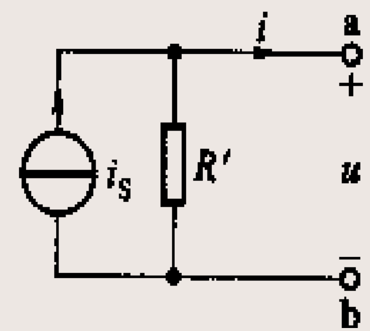
❖ 电压源与电阻的串联/电流源与电阻的并联-这两种含两元件的电路都是无法再行化简的。但满足一定的条件，它们可以互为等效电路，即它们可以互相替换。

电压源串联电阻电路的VCR为

$$u = u_s - Ri$$

电流源并联电阻电路的VCR为

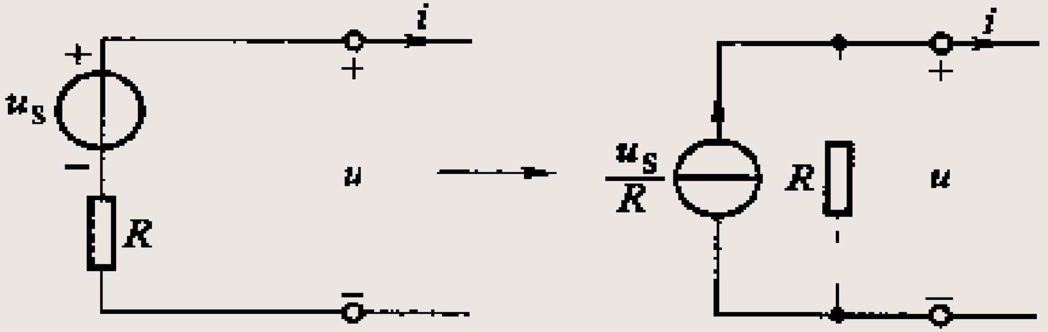




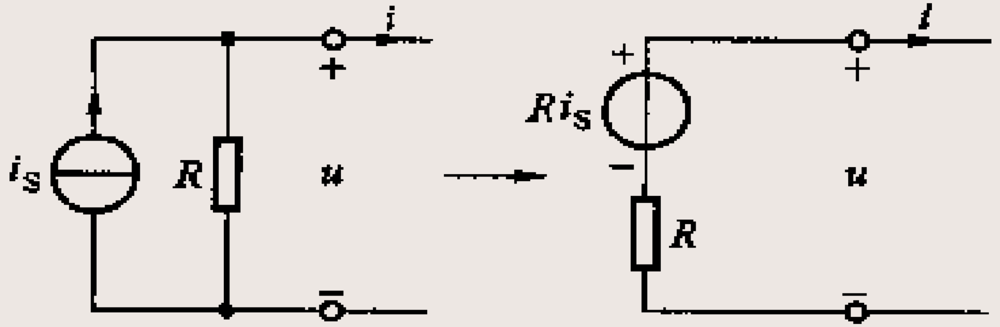
$$i = i_s - \left(u/R'\right) \quad \Rightarrow \quad u = R'i_s - R'i$$

当满足 $R = R'$ $\begin{cases} u_s = R'i_s \\ i_s = u_s/R' \end{cases}$ 时，两电路等效。

等效电路图



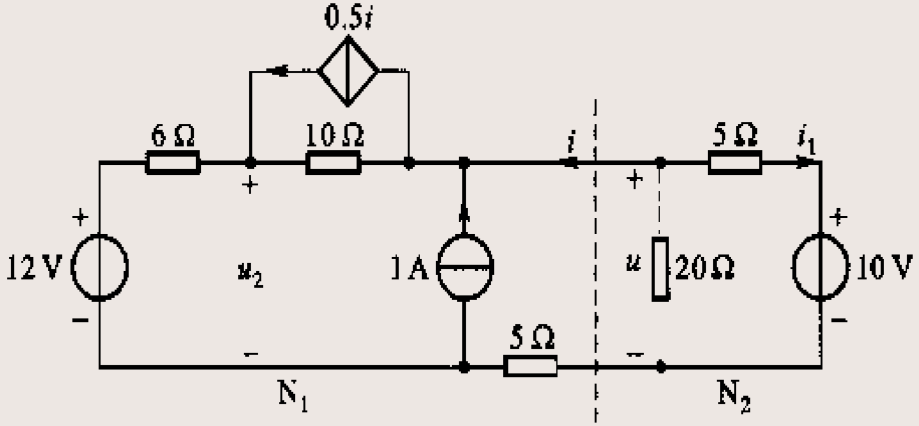
(a)



(b)

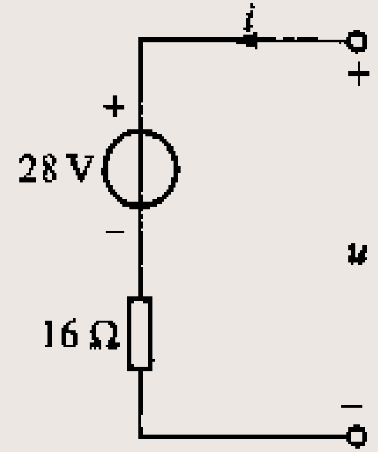
例

试用分解方法求i_1和u_2。



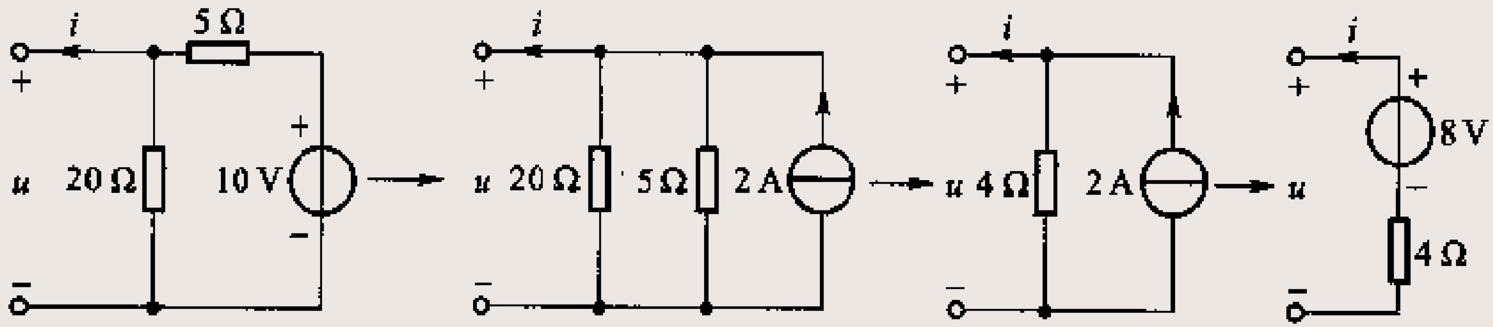
解　求N_1的等效电路，因含受控源无公式可供直接使用，仍需用外施电源法求得其VCR后得出

$$
\begin{aligned}
u &= (i + i_S - \alpha i)R_2 + (i + i_S)R_1 + u_S + iR_3 \\
&= [u_S + (R_1 + R_2)i_S] + [R_1 + R_3 + (1 - \alpha)R_2]i \\
&= [12 + (6 + 10)\times 1] + [6 + 5 + (1 - 0.5)\times 10]i \\
&= 28 + 16i
\end{aligned}
$$

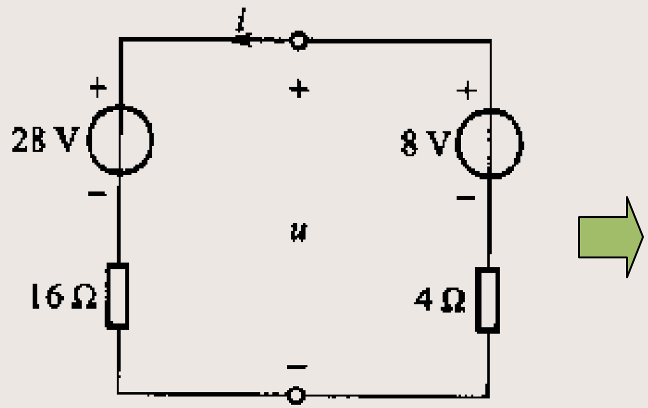


解答

N_2的等效电路则可利用有关公式逐步化简后求得。



等效图为:



$$i = \frac{8-28}{16+4} = -1A$$

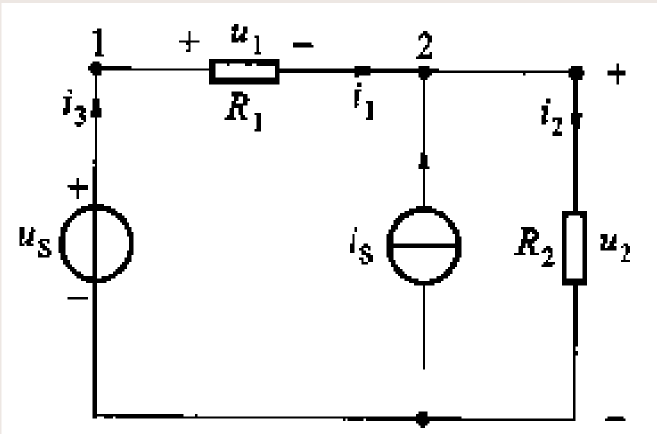
$$u = 28 + 16i = 12V$$

§ 4-6 叠加原理

- 由线性电阻、线性受控源及独立源组成的电路中，每一元件的电流或电压可以看成是每一个独立源单独作用于电路时，在该元件上产生的电流和电压的代数和。
- 当某一独立源单独作用时，其他独立源应为零值，即独立电压源用短路代替；独立电流源用开路代替。
- 虽然电流或电压满足叠加原理，但各元件的功率不等于各电源单独作用在该元件上所产生的功率之和。

说明

若以R_2为输出：



节点1　$i_1 - i_3 = 0$

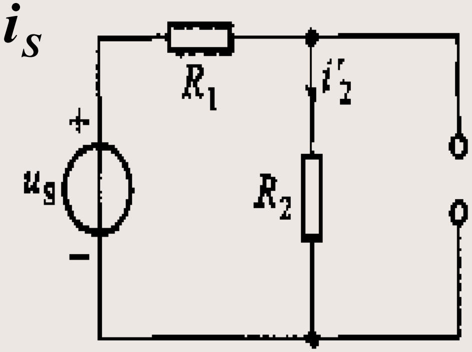
节点2　$-i_1 + i_2 = i_S$

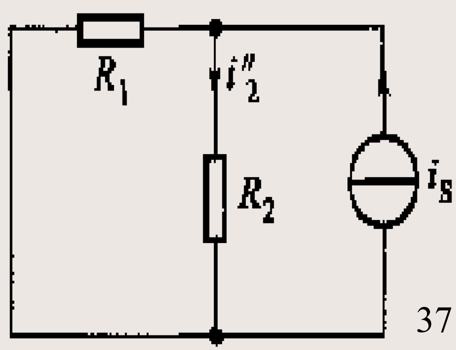
左网孔　$R_1 i_1 + u_2 = u_S$

右网孔　$R_2 i_2 - u_2 = 0$

求解得：

$$i_2 = \frac{1}{R_1 + R_2} u_S + \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_S$$





第1项为u_s作用的结果

第2项为i_s作用的结果

例

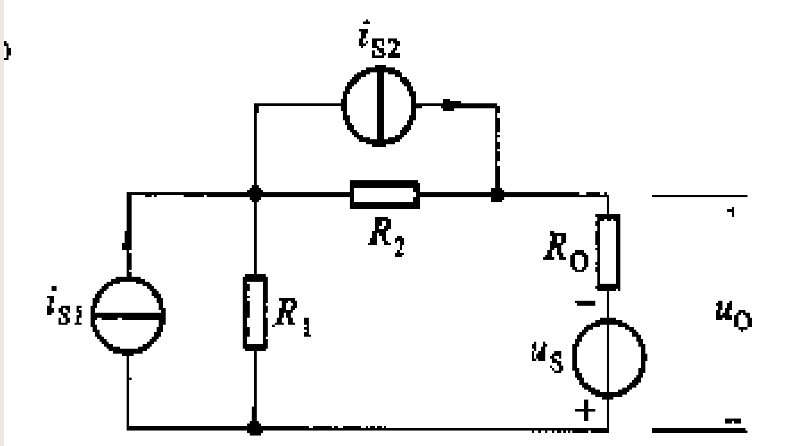
利用叠加原理求u_o

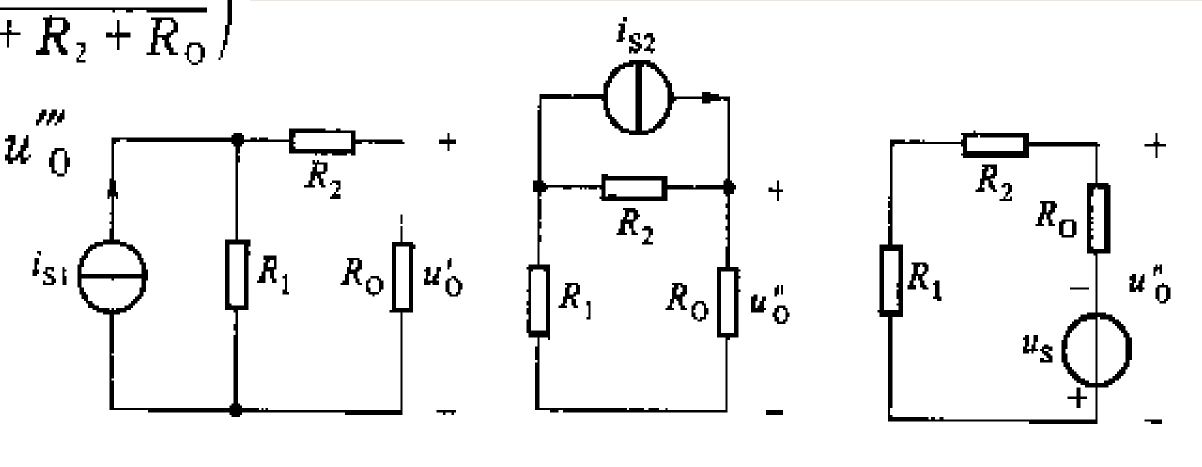
$$u_O' = i_{S1}\left(\frac{R_1}{R_1+R_2+R_O}\right)R_O$$

$$u_O'' = i_{S2}\left(\frac{R_2}{R_1+R_2+R_O}\right)R_O$$

$$u_O''' = -u_S\left(\frac{R_1+R_2}{R_1+R_2+R_O}\right)$$

$$u_O = u_O' + u_O'' + u_O'''$$



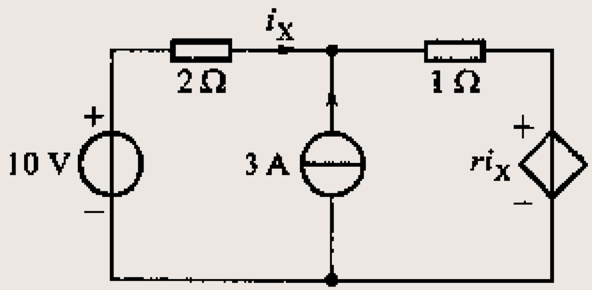


(a) (b) (c)

例

利用叠加原理求i_x，r=2。

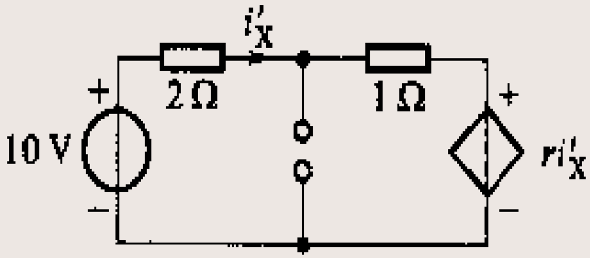
解：受控源不是独立电源，不能单独使用，应象电阻一样保留在电路中。



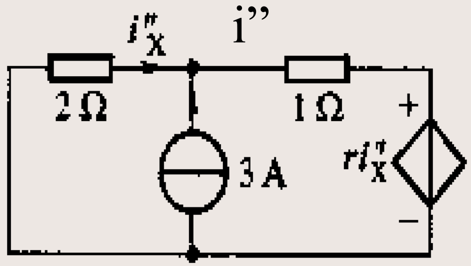
由（a）

$$-10+3i_x^{'}+2i_x^{'}=0$$

$$i_x^{'}=2A$$



(a)



(b)

由（b）

$$i^{''}-i_x^{''}=3$$

$$2i_x^{''}+i^{''}+2i_x^{''}=0$$

$$i_x^{''}=-0.6A$$

$$i_x=i_x^{'}+i_x^{''}=1.4A$$

§4-7 戴维南定理

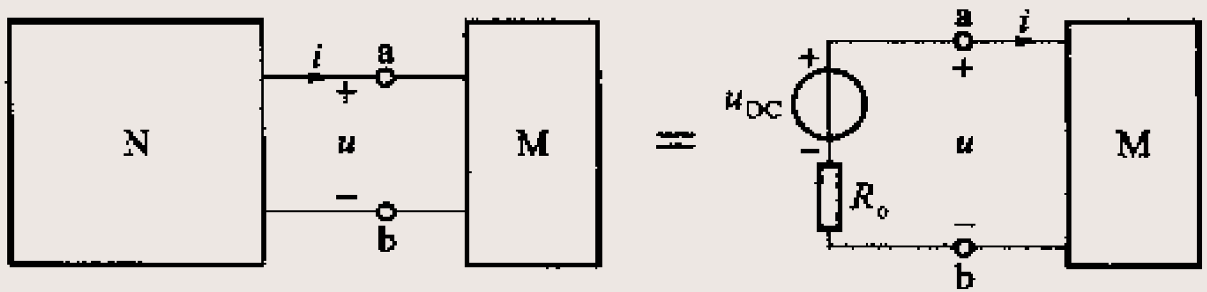
- 单口网络的等效电路问题实质上是求单口网络VCR的问题。
- 戴维南定理和诺顿定理提供了求含源线性单口网络等效电路及VCR的另一方法，对等效电路及VCR能提出普遍适用的形式。

定义：含电源、线性电阻和受控源的单口网络，不论其结构如何复杂，就其端口来说，可等效为一个电压源串联电阻支路，电压源的电压等于该网络N的开路电压u_{oc}，串联电阻R_o等于该网络中所有独立源为零值时网络N_0的等效电阻R_{ab}。

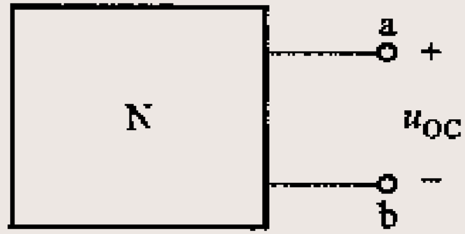
戴维南定理

❖ 若含源线性单口网络的端口电压u和电流i为非关联参考方向，则其VCR可表为：

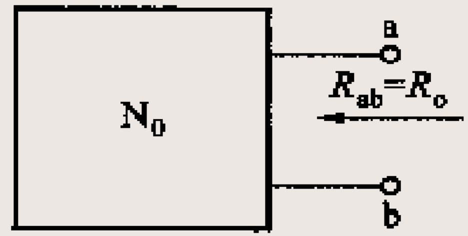
$$u = u_{OC} - R_o i$$



(a)



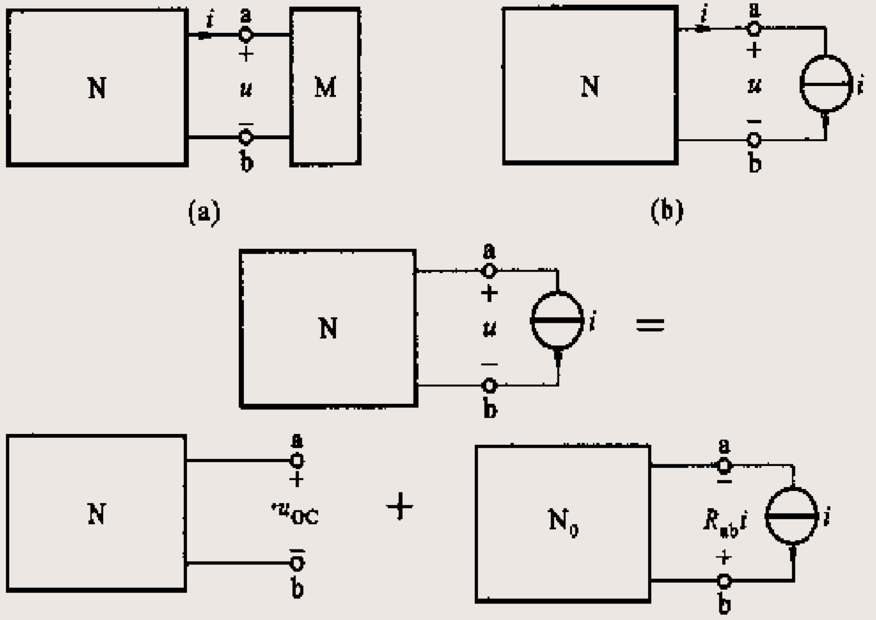
(b)



(c)

证 明

- 由于单口网络的VCR与外接电路无关，可以外接一个电流源*i*去求网络两端的电压*u*，从而得出它的VCR。
- 用电流源*i*施加于N两端，得电路如图(b)所示。
- 由叠加原理可知：



(c) 根据叠加定理$u=u_{OC}-R_{ab}i$

u=(电流源*i*产生的电压)+(N中所有独立源产生的电压)

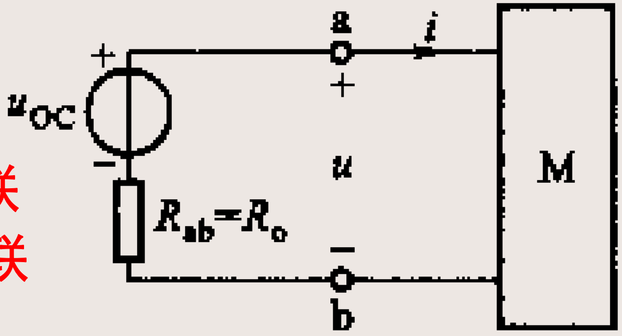
证明

u = (电流源i产生的电压)+(N中所有独立源产生的电压)

- 第二项是电流源i=0时(电流源用开路代替)，网络N的端电压，即其开路电压u_{oc};
- 第一项则是网络N中所有独立源为零值，电流源i作用时，网络的端电压可表示为$R_{ab}i$，R_{ab}是独立源为零值时网络的等效电阻，因此，u可写为：

$$u = u_{OC} - R_{ab}\, i$$

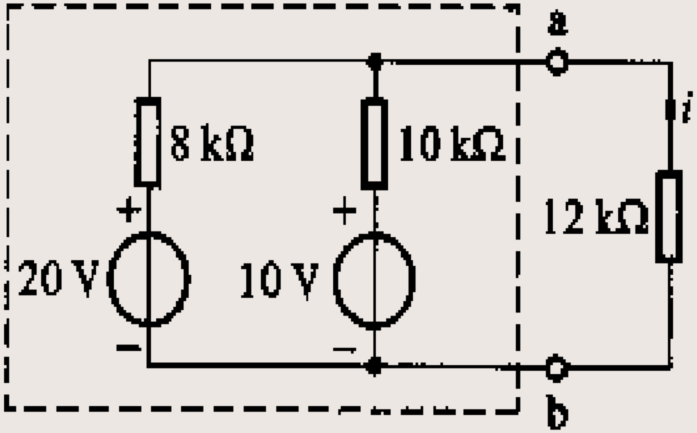
含源单口网络可等效为一个电压源串联电阻支路，其电压源电压为u_{oc}，其串联电阻为R_{ab}。



(d)

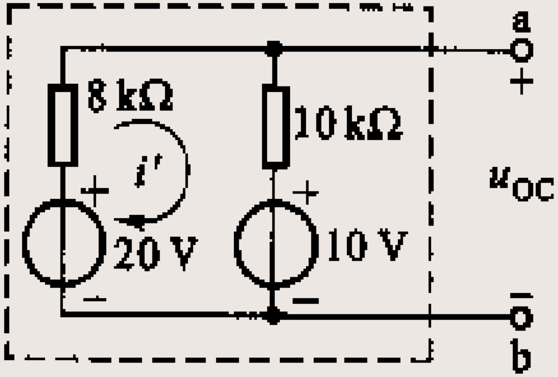
例 4-13

求电阻电路中12$k\Omega$电阻的电流i。



解 根据戴维南定理，虚线框所构成的含源单口网络可以化简为一个电压源u_{oc}与电阻R_o相串联的等效支路。

为了求得u_{oc}，应使该单口网络处于断开状态,设该电路中的电流为i'，由KVL得:



(a)

$$(8+10)\times i' - 20 + 10 = 0$$

$$u_{oc} = 10i' + 10 \quad \Rightarrow \quad u_{oc} = 15.56V$$

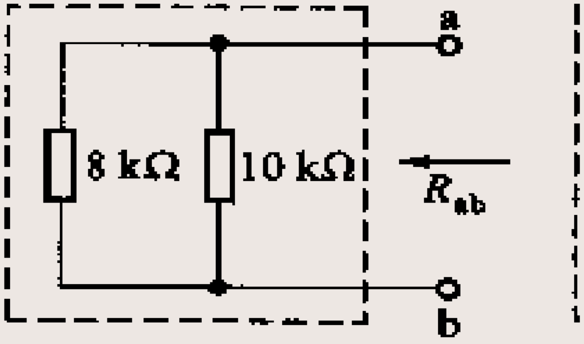
解答

为了求得R_o，把图(a)所示含源单口网络中的两个独立电压源用短路代替，得电路如图(b)。显然，电路ab两端的等效电阻：

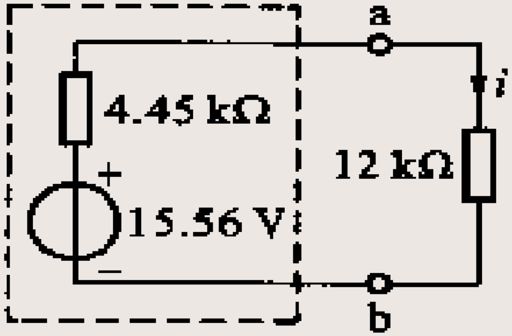
$$R_{ab}=\frac{10\times 8}{10+8}k\Omega=4.45k\Omega$$

$$R_o=4.45k\Omega$$

$$i=\frac{15.56}{12+4.45}mA=0.946mA$$



(b)

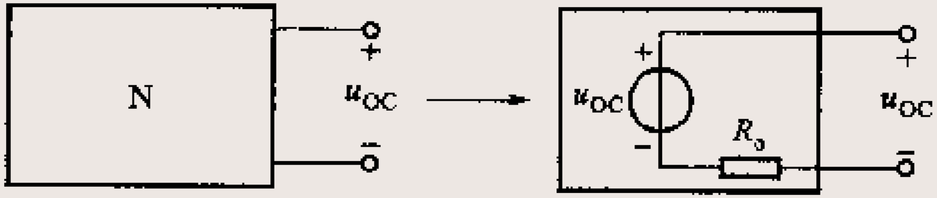


(c)

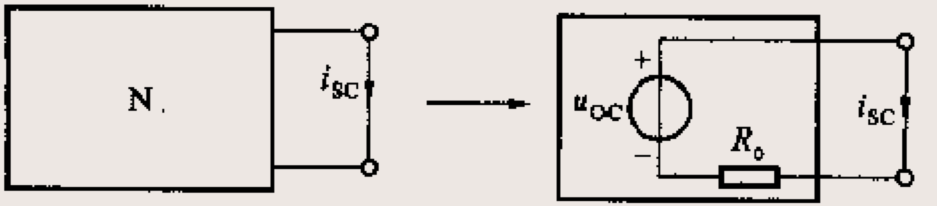
例4-15

试说明：若含源单口网络的开路电压为u_{oc}，短路电流为i_{sc}，则戴维南等效电阻

$$R_o = \frac{u_{OC}}{i_{SC}}$$



(a)



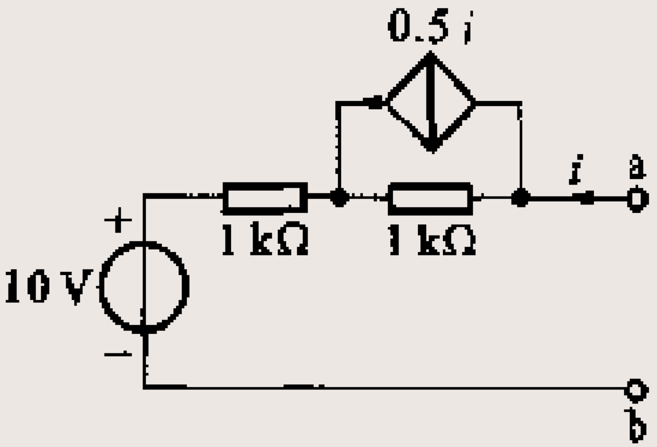
(b)

解 已知一个含源单口网络可等效为一个电压源u_{oc}与电阻R_o的串联电路。因此，原网络的短路电流i_{sc}应等于这个等效电路的短路电流，故得

$$i_{SC} = \frac{u_{OC}}{R_o} \quad \Rightarrow \quad R_o = \frac{u_{OC}}{i_{SC}}$$

例4-17

求电路的戴维南等效电路。

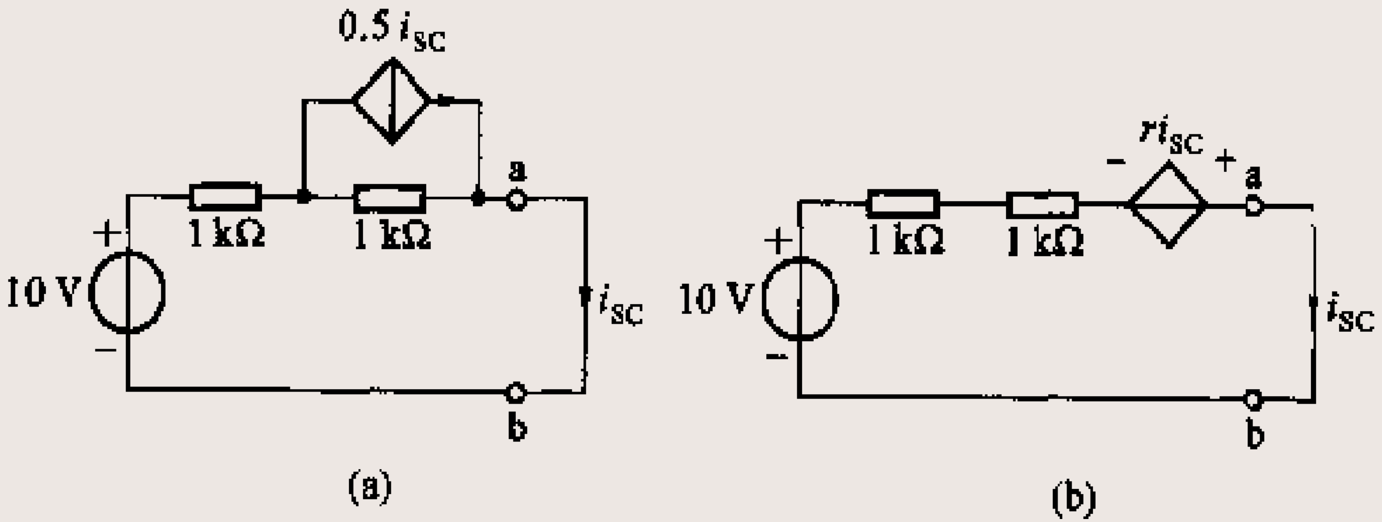


解　先求开路电压u_{oc}，此时i为零，*CCCS*的电流0.5i也为零，各电阻上也无电压，故得

$$u_{oc} = u_{ab} = 10V$$

为了求等效电阻，可先求短路电流。把电路ab端短路，设短路电流i_{sc}的方向如后面图中所示，则受控源电流为$0.5i_{sc}$，且其方向应与上图方向相反。

解答



$$-10+2i_{sc}-0.5i_{sc}=0$$

$$i_{sc}=\frac{10}{1.5}=\frac{20}{3}mA$$

$$R_o=\frac{u_{oc}}{i_{sc}}=1.5k\Omega$$

如用外加电压求电流法计算R_o时，只能把独立电源置零，保留受控源。

说明

- 戴维南定理是由叠加原理推导出来的。叠加原理运用于含线性受控源电路时，当某个独立源单独作用时，所有其他的独立源均视为零值，但所有的受控源仍需保留。
- 在运用戴维南定理分析含受控源电路，在求等效电阻R_o时，必须计算受控源的作用，不能像处理独立源那样把受控源用短路或开路代替，否则将导致错误。
- 单口网络N中不能含有控制量在外电路部分的受控源，但控制量可以是N的端口电压或电流。

思考题4-9

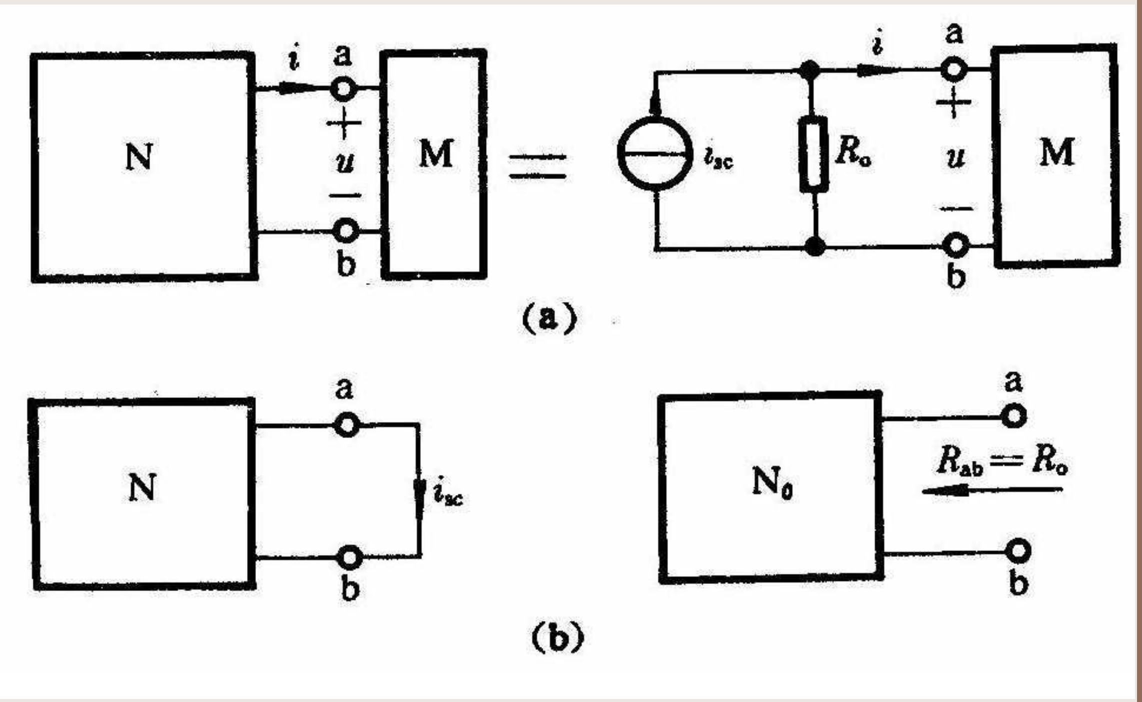
有人认为：一个含源单口网络根据置换定理可以用一个电压源来替换，而根据戴维南定理，却要求用电压源串联电阻来替换。因此，置换定理更为有用。对吗?

答：置换定理对外电路有效，而戴维南定理是对被置换的电路有效。

§4-8 诺顿定理

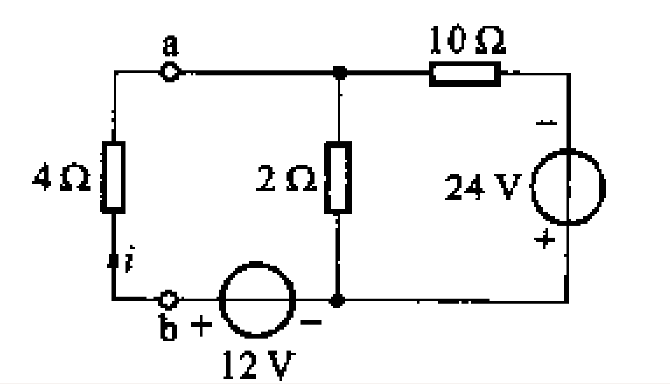
定义：含源线性单口网络N，就其端口来看，可以等效为一个电流源并联电阻的组合。电流源的电流等于该网络N的短路电流i_{sc}，并联电阻R_o等于该网络中所有独立源为零值时所得网络N_0的等效电阻R_o。

$$i = i_{sc} - \frac{u}{R_o}$$



例4-18

用诺顿定理求电路中流过4Ω电阻的电流。

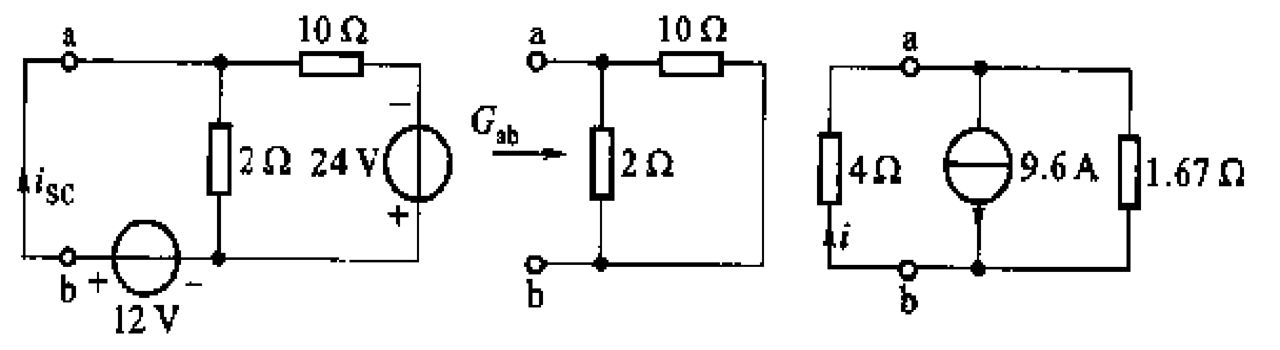


解 把电路中除4Ω电阻以外的部分化简为诺顿等效电路。先求短路电流i_{sc}。（叠加原理）

$$i_{sc}=\frac{24}{10}+\frac{12}{10 // 2}=9.6A$$

电压源短路，等效电阻为：

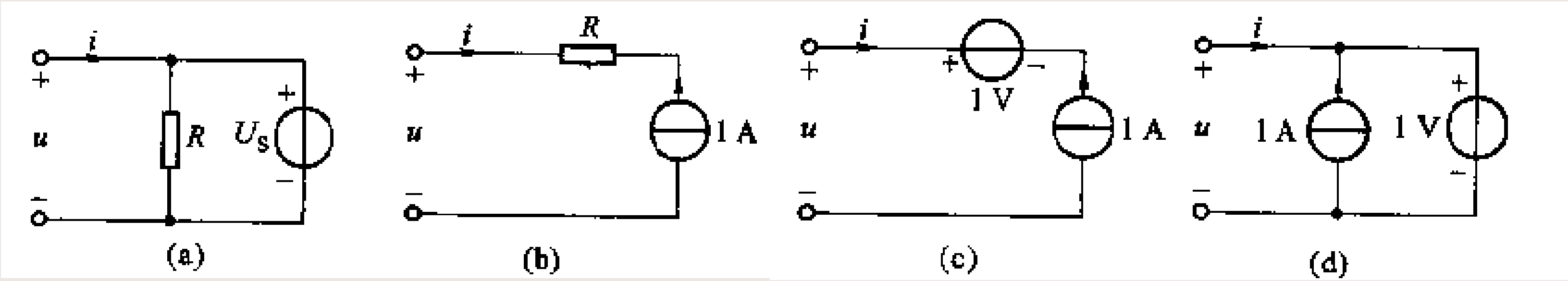
$$R_o=R_{ab}=10 // 2=1.67\,\Omega$$



(a) (b) (c)

思考题

求电路的戴维南等效电路、诺顿等效电路，如不存在，如何解释。



*R*多余，*i*不能确定

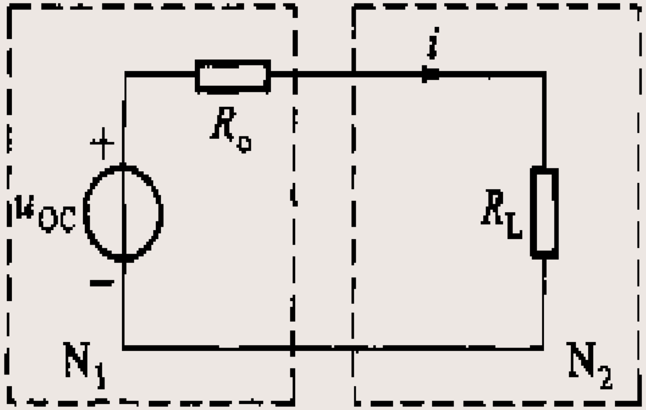
*R*多余，*u*不能确定

电压源多余，*u*不能确定

电流源多余，*i*不能确定

§ 4-9 最大功率传递定理

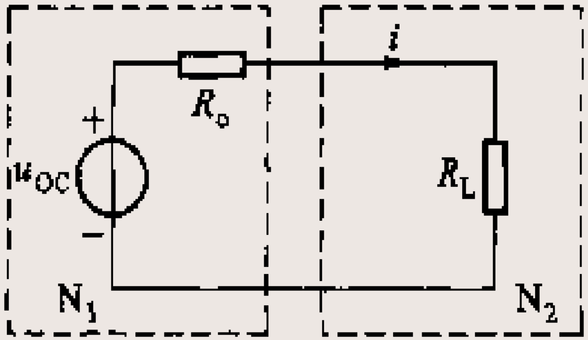
- 给定一含源线性单口网络N_1，接在它两端的负载电阻不同，从单口网络传递给负载的功率也不同。
- 设负载电阻为R_L，则当R_L很大时，流过R_L的电流很小，因而R_L得到的功率$i^2 R_L$很小。
- 如果R_L很小，功率同样也很小。
- 在$R_L=0$与$R_L=\infty$之间有一个值可使负载所得功率为最大。



最大功率传递

R_L的功率为:

$$p = i^2 R_L = \left(\frac{u_{oc}}{R_o + R_L} \right)^2 \times R_L = f(R_L)$$



要使p为最大，应使:

$$\frac{dp}{dR_L} = 0 \quad 即 \quad \frac{dp}{dR_L} = u_{oc}^2 \times \left[\frac{(R_o + R_L)^2 - 2 \times (R_o + R_L) R_L}{(R_o + R_L)^4} \right]$$

$$= \frac{u_{oc}^2 (R_o - R_L)}{(R_o + R_L)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_L = R_o$$

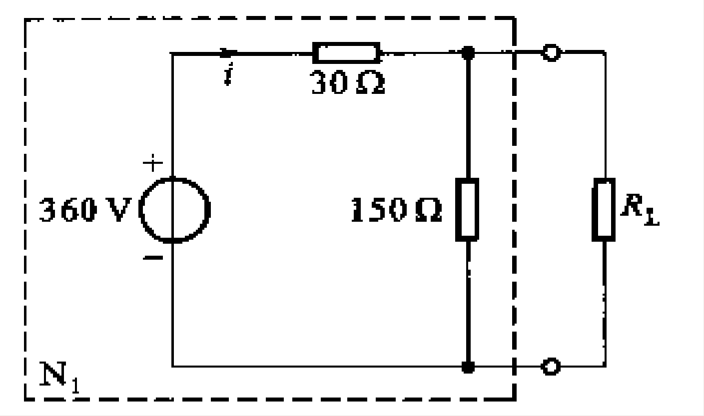
由于 $\left. \dfrac{d^2 p}{dR_L^2} \right|_{R_L = R_o} = -\dfrac{u_{OC}^2}{8R_o^3} < 0$ 　p有最大值 　$p_{\max} = \dfrac{u_{OC}^2}{4R_o}$

例4-19

(1)求R_L获得最大功率时的R_L；

(2)计算此时R_L得到的功率；

(3)当R_L获得最大功率时，求360V电源产生的功率传递给R_L的百分数。



解 (1)先求N_1的戴维南等效电路：

$$u_{OC} = 360 \times \frac{150}{180} V = 300 V$$

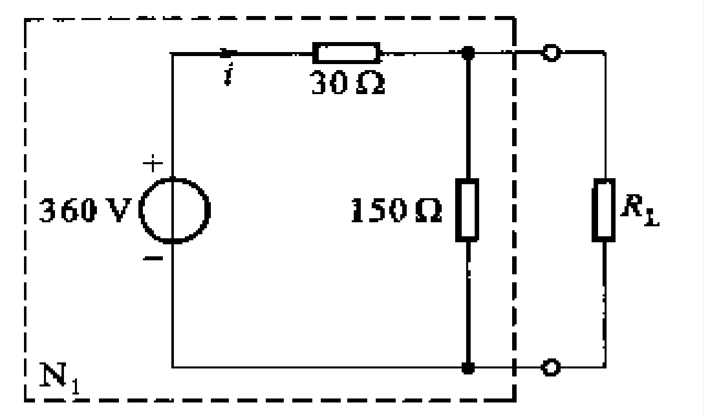
$$R_o = \frac{150 \times 30}{150 + 30} \Omega = 25\Omega$$

因此，当R_L=R_o=25Ω时，R_L获得最大功率。

解答

(2) R_L获得的最大功率为：

$$p_{\max}=\left(\frac{300}{25+25}\right)^2\times 25=900W$$



(3)当R_L=25Ω时，其两端电压为

$$300\times\frac{25}{25+25}V=150V$$

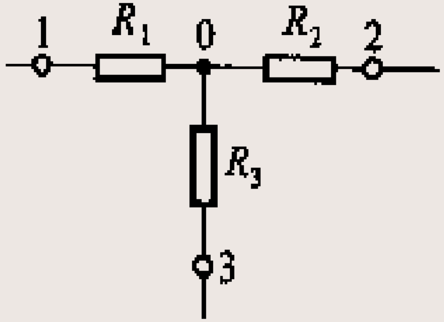
$$i=\frac{360-150}{30}A=7A$$

360V电源的功率为 $$p_S=-360\times 7=-2520W$$

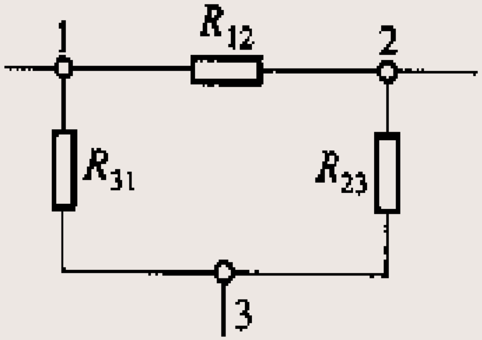
负载所得功率的百分数为 $$\frac{p_{\max}}{p_S}=\frac{900}{2520}\times 100\%=35.71\%$$

§ 4-10 T形和Π形网络的等效变换

- 将三个电阻的一端连接在一个节点上，它们的另一端分别接到三个不同的端钮上，这样就构成了T形网络，亦称星形或Y形网络。
- 如果将三个电阻分别接在每二个端钮之间，使三个电阻本身构成一个回路，这样就构成了Π形网络，亦称三角形或Δ形网络。



(a)



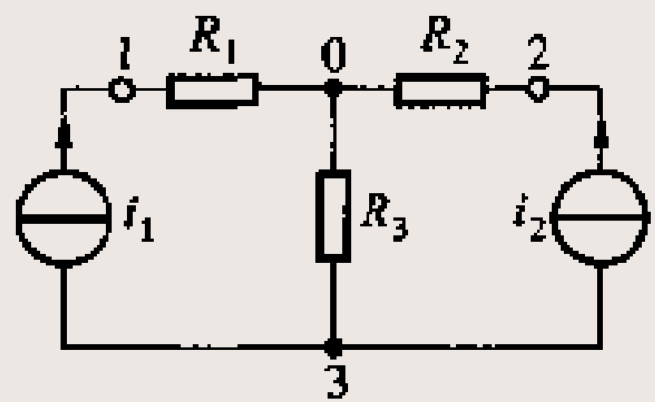
(b)

T型电路端钮的VCR

❖ 设想在这两种网络相对应的端钮上分别施加相同的电流源i_1和i_2，分别推导它们端钮的VCR。

对T形网络

$$u_{13} = R_1 i_1 + R_3(i_1 + i_2)$$
$$u_{23} = R_2 i_2 + R_3(i_1 + i_2)$$



整理得:

$$\left.\begin{aligned} u_{13} &= (R_1 + R_2) \times i_1 + R_3 i_2 \\ u_{23} &= R_3 i_1 + (R_2 + R_3) \times i_2 \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

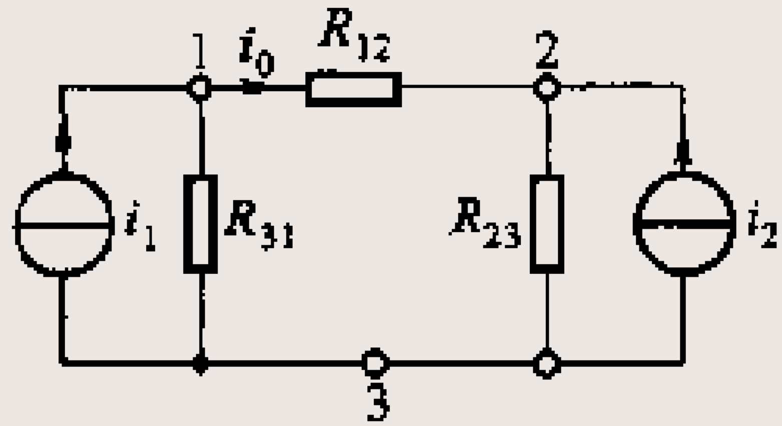
Π型电路端钮的VCR

对Π形网络，电流源并联电阻模型变为电压源串联电阻模型：

$$i_0 = \frac{R_{31}i_1 - R_{23}i_2}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$$

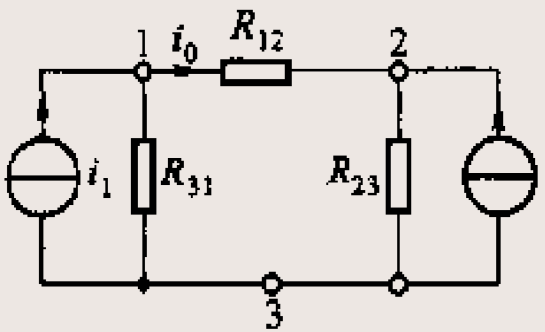
$$u_{13} = R_{31}(i_1 - i_0)$$

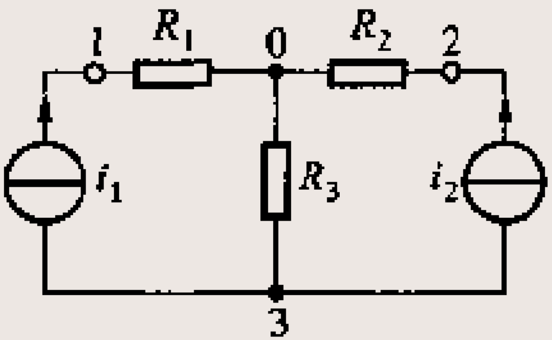
$$u_{23} = R_{23}(i_0 + i_2)$$



$$\left.\begin{aligned} u_{13} &= \frac{R_{31}(R_{12}+R_{23})}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}i_1 + \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}i_2 \\ u_{23} &= \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}i_1 + \frac{R_{23}(R_{12}+R_{31})}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}i_2 \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Π形网络变换为T形网络的公式





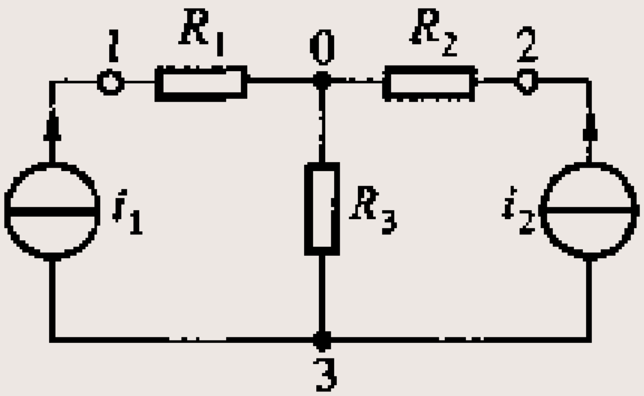
(*)式和(**)式分别为T形网络和Π形网络的VCR。如果VCR完全相同，(*)两式和(**)两式中i_1与i_2的系数应分别相等，即

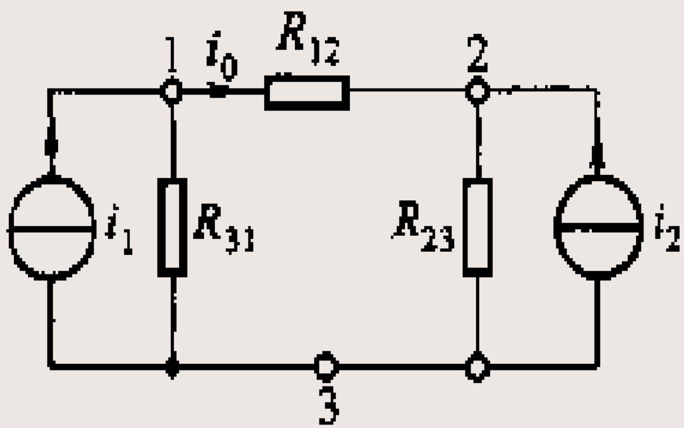
$$\left.\begin{aligned} R_1+R_3&=\frac{R_{31}(R_{12}+R_{23})}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_3&=\frac{R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_2+R_3&=\frac{R_{23}(R_{12}+R_{31})}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} R_1&=\frac{R_{31}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_2&=\frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_3&=\frac{R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \end{aligned}\right\}$$

$$R_j=\frac{\text{接于端钮 } j \text{的两电阻的乘积}}{\text{三电阻之和}}$$

T形网络变换为Π形网络的公式

$$\left.\begin{aligned}
R_{12} &= \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3} \\
R_{23} &= \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1} \\
R_{31} &= \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2}
\end{aligned}\right\}$$

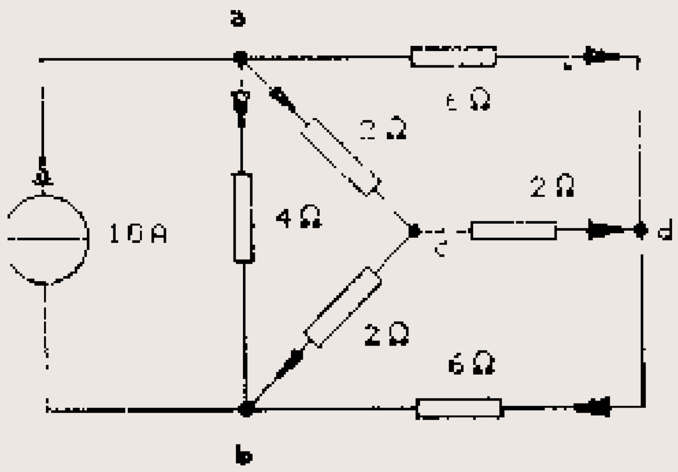




$$R_{mn} = \frac{\text{电阻两两乘积之和}}{\text{接在与}R_{mn}\text{相对端钮的电阻}}$$

例

(1)求R_{ab}；(2)求各支路电流以及U_{ab}、U_{ad}和U_{ac}。



解　将电路分解为在a、b、d三端相连的两个三端网络：一个是abd星形网络，另一个是三角形网络。将电路中abd星形网络等效变换为三角形网络。

$$R_{ab}=\frac{R_aR_b+R_bR_d+R_aR_d}{R_d}=\frac{2\times2+2\times2+2\times2}{2}=6\Omega$$

$$R_{bd}=R_{da}=6\Omega$$

解答

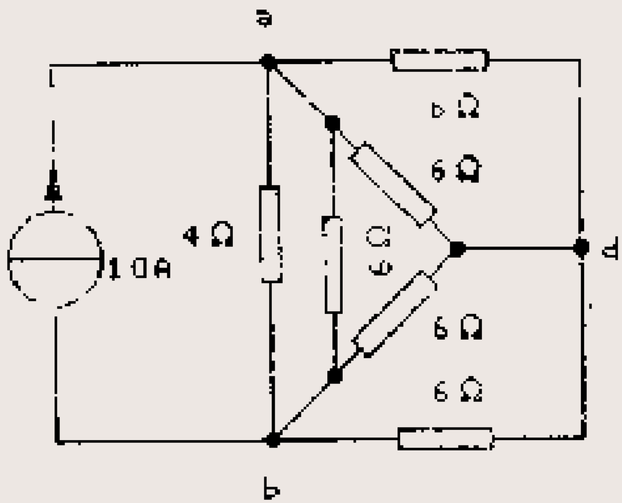
原电路等效变换成串、并联电路。

(1)解得等效电阻

$$R_{ab}=\frac{12}{7}\Omega \qquad U_{ab}=10R_{ab}=\frac{120}{7}V$$

$$U_{ad}=\frac{U_{ab}}{2}=\frac{60}{7}V$$

$$U_{db}=\frac{60}{7}V$$

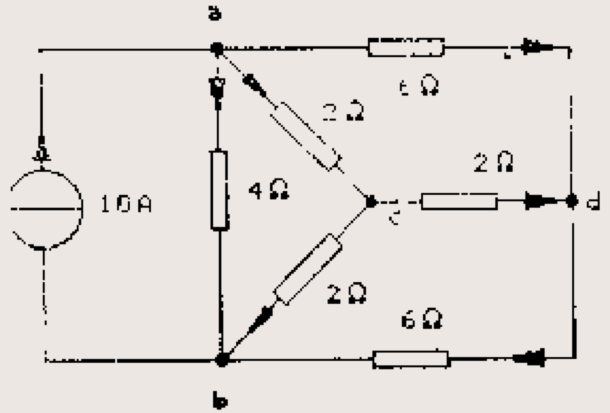


再由原电路，解得

$$I_{ab}=\frac{U_{ab}}{4}=\frac{30}{7}A$$

$$I_{ad}=I_{db}=\frac{U_{ad}}{6}=\frac{10}{7}A$$

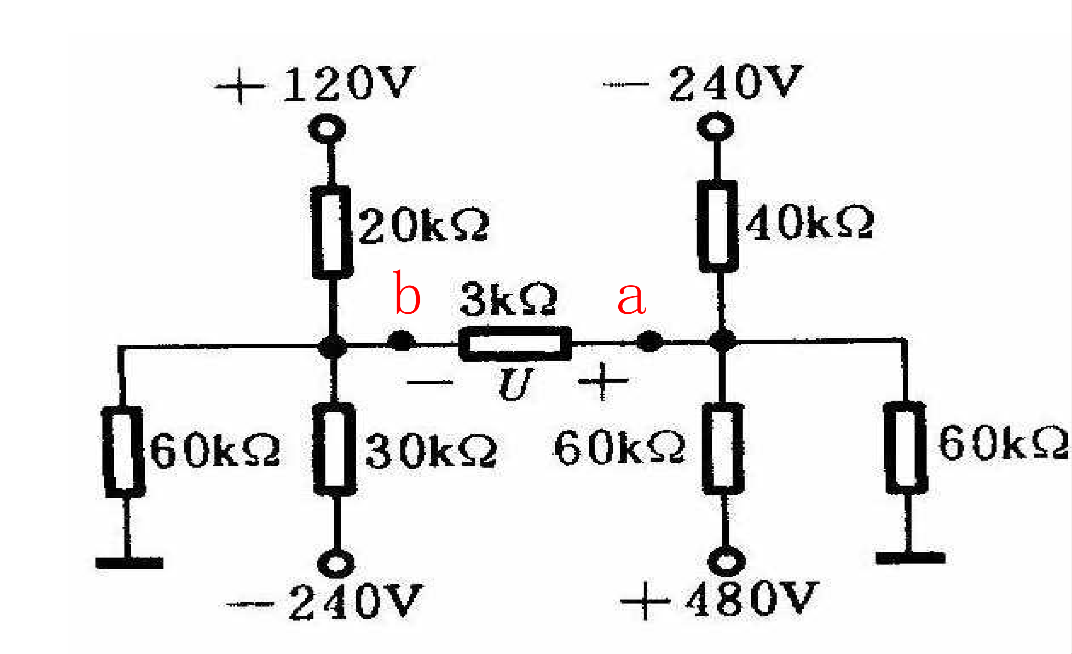
$$I_{cd}=0$$



习题4-39

求3$k\Omega$电阻上的电压。

解 设3$k\Omega$电阻的右侧端钮为a端，左侧端钮为b端。断开3$k\Omega$电阻支路。分别求a端与地端之间单口网络的戴维南等效和b端与地端之间单口网络的戴维南等效。



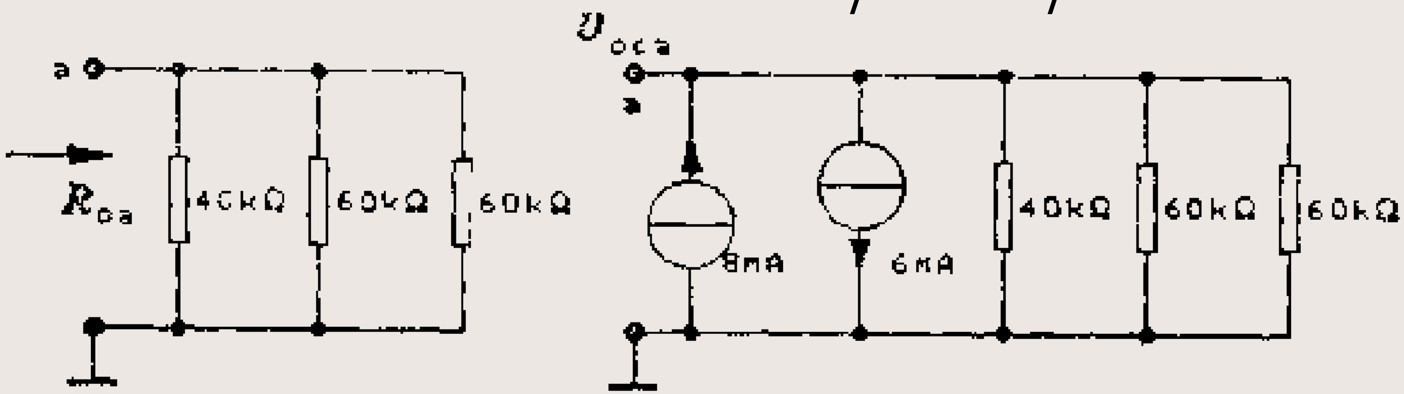
解答

- 求右侧的戴维南等效单口网络。
- 求等效电阻R_{oa}

$$R_{oa}=\frac{1}{\frac{1}{40}+\frac{1}{60}+\frac{1}{60}}=\frac{120}{7}k\Omega$$

- 将电压源串联电阻支路等效变换为电流源并联电阻支路，得到求开路电路u_{oca}，解得

$$U_{oca}=(8-6)\times\frac{120}{7}=\frac{240}{7}V$$



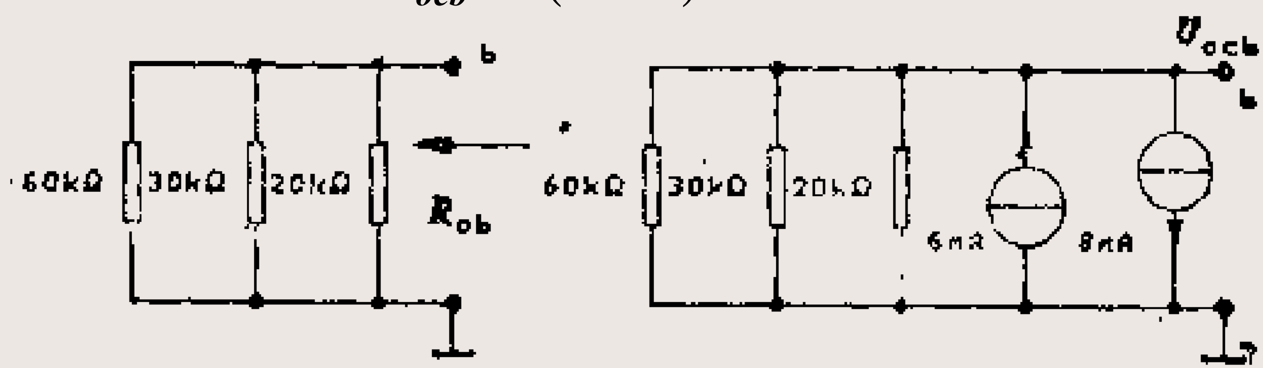
解答

- 求左侧的戴维南等效单口网络。
- 求等效电阻R_{ob}

$$R_{ob}=\frac{1}{\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}}=10k\Omega$$

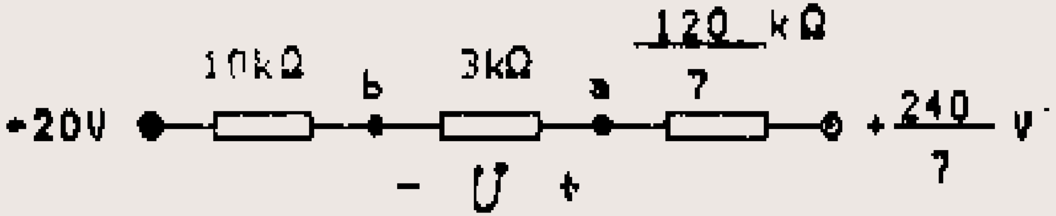
- 将电压源串联电阻支路等效变换为电流源并联电阻支路，得到求开路电路u_{ocb}，解得

$$U_{ocb}=(6-8)\times 10=-20V$$



解 答

❖ 将两侧的戴维南等效单口网络与3kΩ电阻支路接通，就是戴维南等效变换电路。



$$U=\frac{3}{\frac{120}{7}+3+10}\times\left(\frac{240}{7}+20\right)=\frac{1140}{211}V$$

作 业

第151页 习题

4-4、4-6、4-8、4-17、4-19、4-28、4-31、4-32、4-33、4-1

预习第五章