

第十三章

冲激函数在动态电路分析中的应用

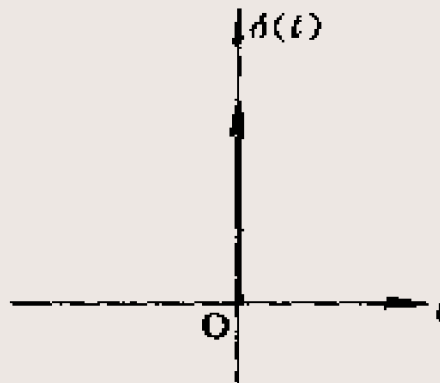
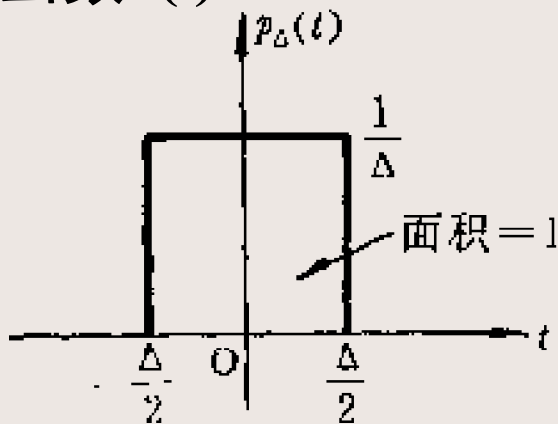
2010年11月25日

§ 13-1 冲激函数

- ❖ 单位冲激函数(unit impulse function)又称狄拉克 δ 函数，其定义为

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & \forall t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$$

- ❖ 单位冲激函数可以看成是脉冲函数 $p_{\Delta}(t)$ 在 $\Delta \rightarrow 0$ 时的极限。当 Δ 减小时，脉冲函数的幅度 $1/\Delta$ 增加，而 $p_{\Delta}(t)$ 曲线下的面积总保持为1，当 Δ 趋近于零时，即为单位冲激函数 $\delta(t)$ 。



冲激函数的强度

- ❖ 冲激函数所含的面积称为冲激函数的强度，单位冲激函数为强度为1单位的冲激函数。
- ❖ 冲激电流强度的量纲为安培·秒，即库仑。单位冲激电流是指强度为1库仑，而不是指幅度为1单位(即1安培)的冲激电流。
- ❖ 冲激电流的幅度趋于无限大，移动的电荷为1库仑，电荷的移动是在极其短促(趋于零)的时间内完成的，因而电流的幅度极大。

单位延时冲激函数

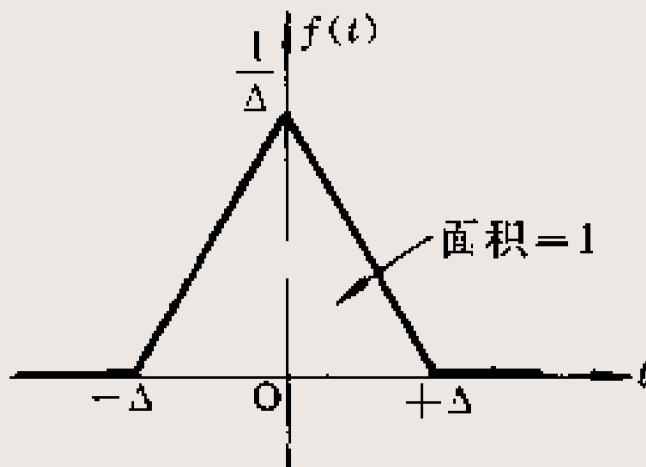
❖ 单位延时冲激函数的定义为

$$\begin{cases} \delta(t-t_0)=0 & \forall t \neq t_0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = 1 \end{cases}$$

- ❖ 单位延时冲激函数 $\delta(t-t_0)$ 可设想为：在 $t=t_0$ 处宽度趋于零，而幅度趋于无限大，但具有单位面积的脉冲。
- ❖ 在 t_0 处强度为 A 的冲激函数记为 $A\delta(t-t_0)$ 。对冲激电流来说可表为 $Q\delta(t-t_0)$ ；对冲激电压来 $\Psi\delta(t-t_0)$ 。

其他形状脉冲的极限情况

- ❖ 冲激函数一般看成是矩形脉冲函数的极限情况，其他形状脉冲的极限情况也可作为单位冲激的近似。
- ❖ 具有单位面积的三角形脉冲，当 Δ 趋近于零时，可作为单位冲激的近似。

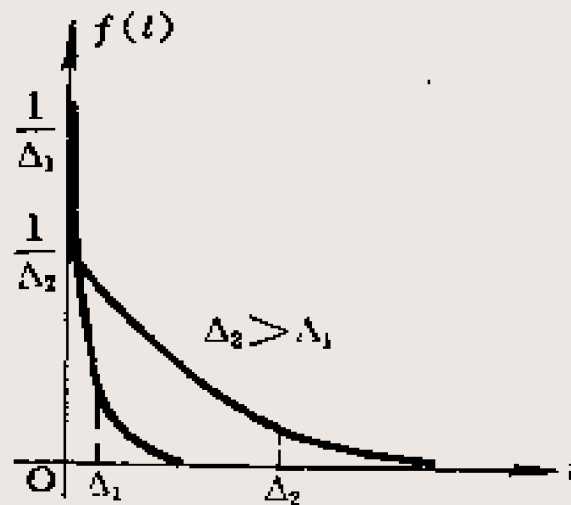


负指数函数

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Ae^{-t/\tau} & t > 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} Ae^{-t/\tau} dt = -\tau Ae^{-t/\tau} \Big|_0^{\infty} = \tau A$$

令 $A = \frac{1}{\tau}, \quad \Delta = \tau$



当 $\Delta \rightarrow 0$ 时, $f(t)$ 趋近于单位冲激函数。

§ 13-2 冲激函数的性质

❖ 冲激函数是阶跃函数的导数

根据定义

$$\int_{-\infty}^t \delta(\xi) d\xi = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^t \delta(\xi) d\xi = \varepsilon(t)$$

故得

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \delta(t)$$

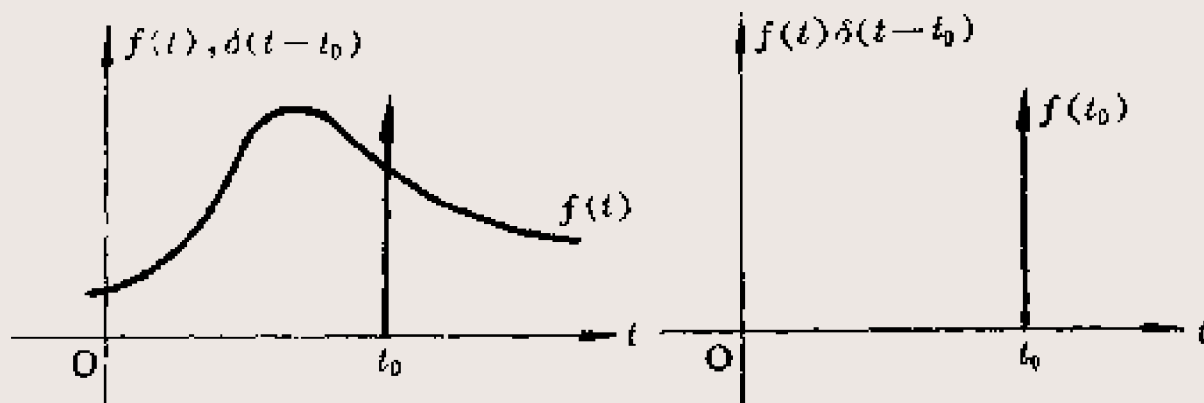
冲激函数的性质

- ❖ 筛分性：除了在原点外，对所有 t ， $\delta(t)=0$ ，因此，除了 $t=0$ 外，对所有 t ，乘积 $f(t)\delta(t)$ 也将为零。在 $t=0$ ， $f(t)=f(0)$ ，故得

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\delta(t)dt = f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$



§ 13-3 电容电压和电感电流的跃变

- ❖ 若电容的电流只能为有限值，则电容电压不能跃变；若电感的电压只能为有限值，则电感电流不能跃变。
- ❖ 在实际电路中，由于电路必须满足KCL和KVL，电容电压和电感电流发生跃变都是可能出现的，在这种情况下，电容电流和电感电压都应无限大。
- ❖ 当电容电压和电感电流发生跃时，讨论电容电压和电感电流初始值的计算问题，就需要运用冲激电流和冲激电压的概念。

冲激电流概念

由电容的VAR可表为

$$u_C(t) = u_C(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i d\xi$$

设 $t_0=0_-$, $t=0_+$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} i d\xi$$

若 $Q\delta(t)$ 流经电容

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) + \frac{Q}{C}$$

电容的冲激电流

- ❖ 若不存在冲激电流，电容电压不能跃变。
- ❖ 有冲激电流作用时，则电容电压可以跃变，跃变前后的电压应服从

$$u_c(0_+) = u_c(0_-) + \frac{Q}{C}$$

$$Q = C[u_c(0_+) - u_c(0_-)]$$

其中 Q 为冲激电流的强度，亦即为由 $t=0_-$ 至 $t=0_+$ 期间电容所获得的电荷。

- ❖ 对单位电荷

$$u_c(0_+) = u_c(0_-) + \frac{1}{C}$$

冲激电压的概念

❖ 由电感的VAR可表为 $i_L(t) = i_L(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u d\xi$

设 $t_0 = 0_-$, $t = 0_+$ $i_L(0_+) = i_L(0_-) + \frac{1}{L} \int_{0_-}^{0_+} u dt$

若冲激电压为 $\psi \delta(t)$ $i_L(0_+) = i_L(0_-) + \frac{\psi}{L}$
 $\psi = L[i_L(0_+) - i_L(0_-)]$
 $\psi \delta(t) = L[i_L(0_+) - i_L(0_-)]\delta(t)$

❖ 在有冲激电压作用时，则电感电流可以跃变，其中 ψ 为冲激电压的强度，为由 $t_0 = 0_-$ 到 $t = 0_+$ 期间电感所获得的磁链。

例13-1

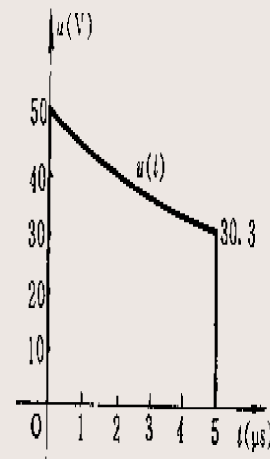
$1\mu F$ 电容两端的电压如图，求电容电流并给波形图。已知 $u(t)=50e^{-10^5 t}V$, $0 < t < 5 \times 10^{-6}s$ 。

解 设电容电压、电流的参考方向一致。
从波形可以看到在 $t=0$ 和 $t=5\mu s$ 时波形不连续，因此，在 $t=0$ 和 $t=5\mu s$ 时的冲激电流强度为：

$$A_1 = C[u(0_+) - u(0_-)] = 10^{-6} \times 50 = 5 \times 10^{-5} C$$

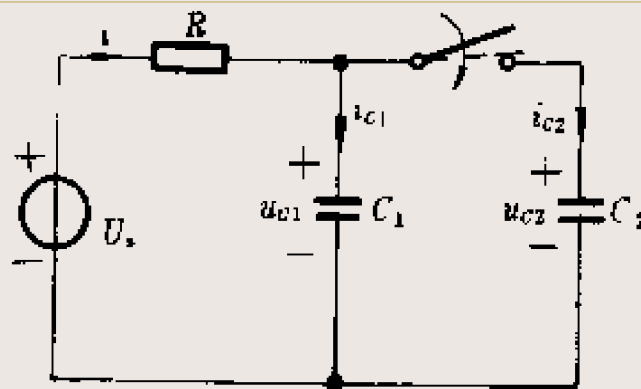
$$\begin{aligned} A_2 &= C[u(5_+) - u(5_-)] \\ &= 10^{-6} \times (-30.3) = -3.03 \times 10^{-5} C \end{aligned}$$

$$i = C \frac{du}{dt} = -10^{-6} \times 50 \times 10^5 e^{-10^5 t} = -5e^{-10^5 t} A$$



例13-3

电路如图所示，开关在 $t=0$ 时闭合，已知 $u_{C1}(0_-)=U_S$ ， $u_{C2}(0)=0$ ，求 $u_{C1}(0_+)$ 及 $u_{C2}(0_+)$ ， $i_{C1}(t)$ ， $i_{C2}(t)$ ， $t \geq 0$ 。



解：由KVL可知，开关闭合后的瞬间，两电容的电压必须相等。但 $u_{C1}(0_-) \neq u_{C2}(0_-)$ ，因此在这一瞬间电容电压有跃变：

$$u_{C1}(0_-) = U_S, \quad u_{C2}(0_-) = 0$$

$$u_{C1}(0_+) = u_{C2}(0_+) = u_C(0_+), \quad C = C_1 + C_2$$

解答

- ❖ 电容电压发生跃变，就必须要有冲激电流流过电容。在电路中流过电阻 R 的电流不可能含有冲激电流。冲激电流只可能在电容回路中流动。
- ❖ 按图中所设电容电流方向，由KCL可得 $u_C(0_+)$

$$C_1[u_{C1}(0_+) - U_s]\delta(t) + C_2[u_{C2}(0_+) - u_{C2}(0_-)]\delta(t) = 0$$

$$C_1[u_{C1}(0_+) - U_s] + C_2 u_{C2}(0_+) = 0$$

$$u_C(0_+) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U_s = \frac{C_1}{C} U_s$$

$$u_C(\infty) = U_s, \quad \tau = RC$$

$$u_C(t) = u_C(0_+) + [u_C(\infty) - u_C(0_+)](1 - e^{-t/\tau})$$

$$= U_s(1 - e^{-t/\tau}) + \frac{C_1}{C} e^{-t/\tau}$$

解答

❖ 各电流为

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_S}{R} e^{-t/\tau} - \frac{C_1 U_S}{RC} e^{-t/\tau} = \frac{C_2 U_S}{RC} e^{-t/\tau} \quad t > 0$$

$$i_{C1}(t) = C_1 \frac{du_C}{dt} = \frac{C_1}{C} \times C \frac{du_C}{dt} = \frac{C_1}{C} i(t) \quad t > 0$$

$$i_{C2}(t) = C_2 \frac{du_C}{dt} = \frac{C_2}{C} \times C \frac{du_C}{dt} = \frac{C_2}{C} i(t) \quad t > 0$$

在 0_- 至 0_+ 期间, $i_{C1}(t)$ 及 $i_{C2}(t)$ 中含有冲激电流, 故得

$$i_{C1}(t) = \frac{C_1}{C} i(t) \varepsilon(t) + C_1 [u_C(0_+) - U_S] \delta(t) = \frac{C_1}{C} i(t) \varepsilon(t) - \frac{C_1 C_2}{C} U_S \delta(t)$$

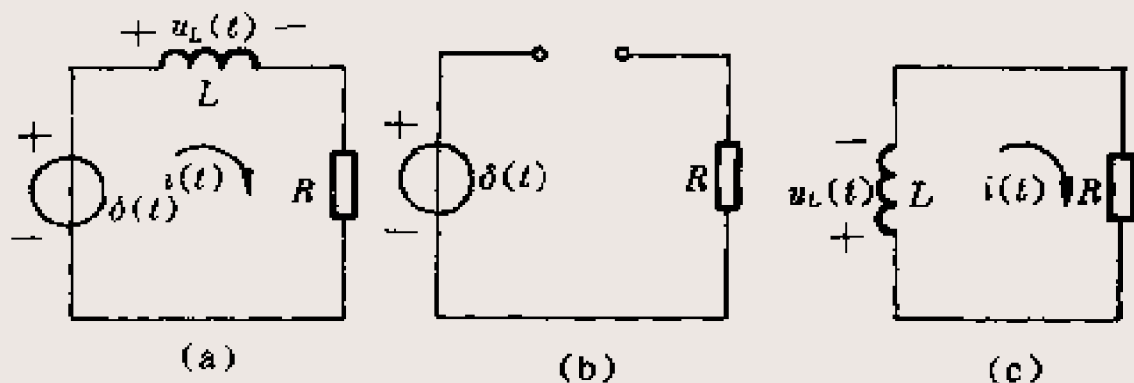
$$i_{C2}(t) = \frac{C_2}{C} i(t) \varepsilon(t) + C_2 [u_C(0_+) - u_{C2}(0_-)] \delta(t) = \frac{C_2}{C} i(t) \varepsilon(t) + \frac{C_1 C_2}{C} U_S \delta(t)$$

§ 13-4 冲激响应

- ❖ 零状态电路对单位冲激信号的响应称为(单位)冲激响应，用 $h(t)$ 表示。
- ❖ 可以认为冲激信号作用于零状态的电路时，立即在电路中建立了初始状态， $t=0$ 后电路的响应即由该初始状态产生。对于 $t > 0$ ，冲激响应 $h(t)$ 是零输入响应，它与由任何其他方式产生的同一初始状态所形成的零输入响应没有区别。
- ❖ 计算冲激响应时，先计算由 $\delta(t)$ 产生的在 $t=0_+$ 时的初始状态，然后求解由这一初始状态所产生的零输入响应。此即为 $t > 0$ 时的冲激响应 $h(t)$ 。

例13-8

试求电路中电流及电感电压的冲激响应。



解 把电感看作开路，作出 $t=0$ 时的等效电路(b)。来自冲激电源的冲激电压全部出现于电感两端。

关于冲激电压全部出现于电感可理解如下：如果冲激电压出现于电阻，则在电阻中将产生冲激电流，因而电感中也将有冲激电流，这样，电感电压将为冲激偶电压，无法满足KVL。

解答

确定电感电压为 $\delta(t)$ 后, 可得

$$i(0_+) = \frac{1}{L}$$

零输入响应

$$i_L(t) = h_i(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \varepsilon(t)$$

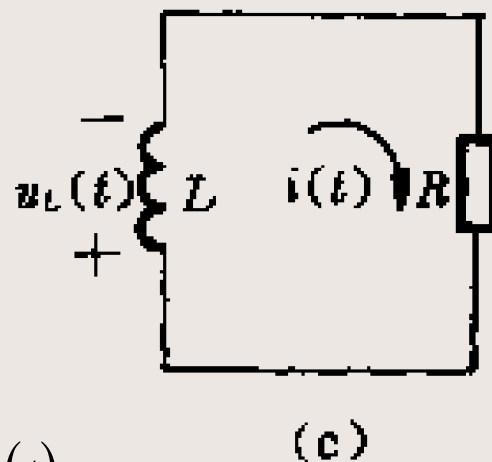
$t > 0$ 时电感电压

$$h_u(t) = -R h_i(t) = -\frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \varepsilon(t)$$

$t = 0$ 时电感电压

$$h_u(t) = \delta(t) - \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \varepsilon(t)$$

$t = 0$ 时, 有冲激电压出现



§ 13-5 由阶跃响应求冲激响应

❖ 线性非时变电路有一个重要的性质：如果激励 x 产生响应 y ，那末，

激励 $\frac{dx}{dt}$ 将产生响应为 $\frac{dy}{dt}$ ；

激励 $\int x dt$ 将产生响应为 $\int y dt + K$ K 为积分常数。

❖ 线性非时变电路的冲激响应是它的阶跃响应的导数，即

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

例

求 RC 并联电路在冲激电流源 $\delta(t)$ 作用下电压 $u(t)$ 的冲激响应。

解 电路中电压 u 的阶跃响应为

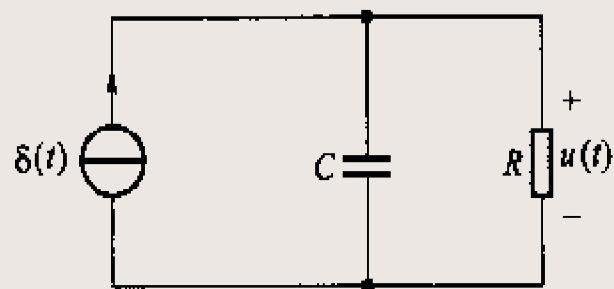
$$s(t) = R \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t} \right) \bullet \varepsilon(t)$$

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = R \frac{d}{dt} \left[\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t} \right) \bullet \varepsilon(t) \right]$$

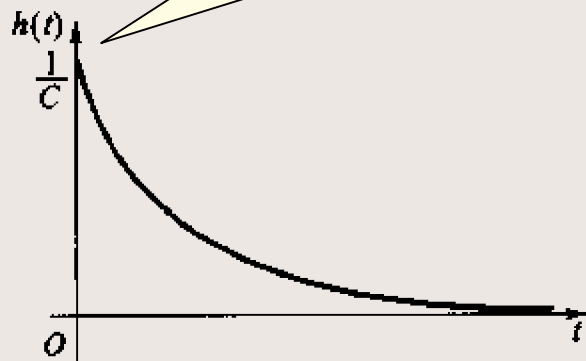
$$= R \left[\delta(t) - \delta(t)e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{1}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t} \varepsilon(t) \right]$$

$$= R \left[\delta(t) - \delta(t) + \frac{1}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t} \varepsilon(t) \right]$$

$$= \frac{1}{C} e^{-\frac{1}{RC}t} \varepsilon(t)$$



电容电压发生了 $1/C$ 的跃变

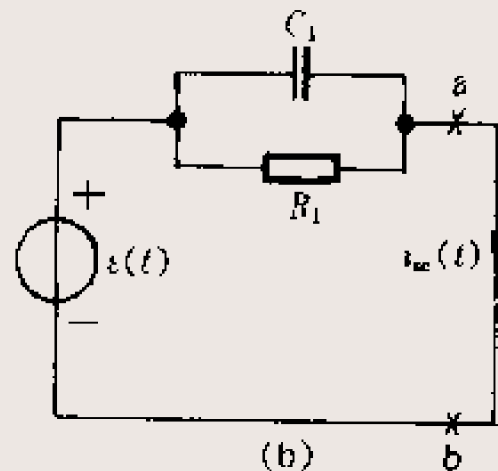
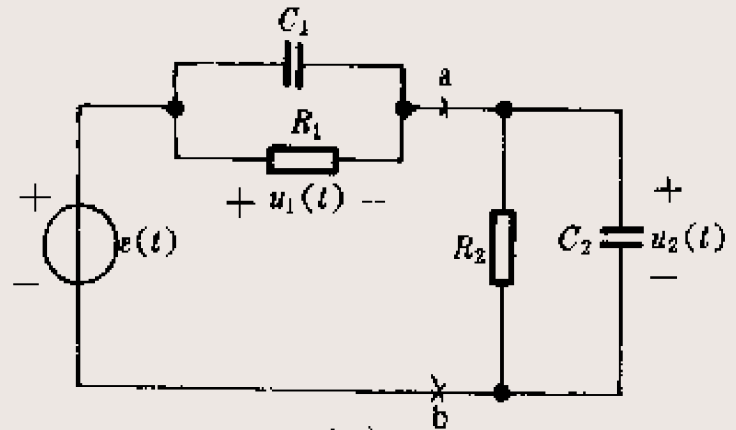


例13-12

试用诺顿定理求解补偿分压器的输出压 $u_2(t)$ 。

解 诺顿定理能用于线性动态电路。ab的左边部分可以用一个诺顿等效电路代替，即可以用一个电流源与 N_0 的并联组合代替。

等效电流源的电流 $i_s(t)$ 等于原电路中ab端的短路电流，见图(b)。



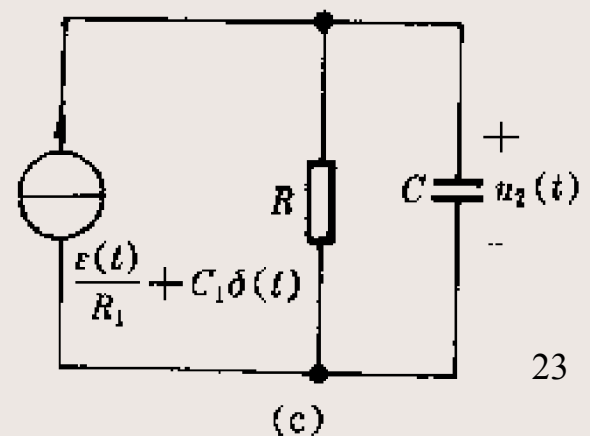
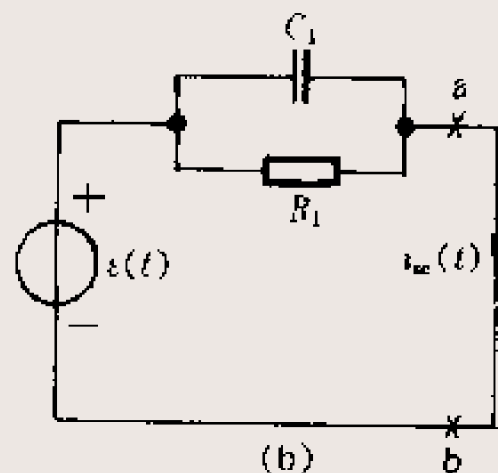
解答

N_0 为ab左边部分各独立源及初始条件置零后的网络，即 R_1 与 C_1 的并联组合。

由图(b)求短路电流时，电流可看成是电阻支路电流和电容支路电流之和。

电阻支路的电流为 $\varepsilon(t)/R_1$ 。阶跃电压 $\varepsilon(t)$ 作用于电容，意味着电容电压发生跃变，因而电容支路的电流为 $C_1\delta(t)$ 。

$$i_s(t) = \frac{\varepsilon(t)}{R_1} + C_1\delta(t)$$
$$\tau = (R_1 // R_2)(C_1 + C_2)$$



解答

运用叠加定理，阶跃电流作用于电路时， $u_2(t)$ 的分量 $u_{21}(t)$ 为

$$u_{21}(t) = \frac{\varepsilon(t)}{R_1} R (1 - e^{-t/\tau})$$

冲激电流产生 $u_2(t)$ 的分量 $u_{22}(t)$ 。由于 $u_{21}(t)$ 与 R_1 的乘积即为该电路的单位阶跃响应，其导数为冲激响应

$$\begin{aligned} u_{22}(t) &= C_1 \left\{ \frac{d}{dt} [R(1 - e^{-t/\tau}) \varepsilon(t)] \right\} \\ &= C_1 R \left[\delta(t) - e^{-t/\tau} \delta(t) + \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \varepsilon(t) \right] = \frac{C_1}{C} e^{-t/\tau} \varepsilon(t) \\ u_2(t) &= u_{21} + u_{22} = \left[\frac{R}{R_1} (1 - e^{-t/\tau}) + \frac{C_1}{C} e^{-t/\tau} \right] \varepsilon(t) \end{aligned}$$

§ 13-6 线性非时变电路对任意输入的响应

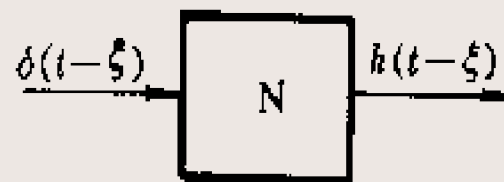
- ❖ 电路的冲激响应和该电路的零输入响应相同，而电路的零输入响应的形式只与电路本身的性质有关，与激励的形式无关。
- ❖ 冲激响应是电路本身固有性质的反映，是表明电路特征的一种方式。
- ❖ 一旦有了电路的冲激响应就可以得到该电路在任意输入作用下的响应，毋需知道描述该电路的微分方程。
- ❖ 设网络N为零状态，在输入 $x(t)$ 的作用下，网络某处的响应为 $y(t)$ ，如何用 $x(t)$ 来表示 $y(t)$ 呢？

任意输入响应

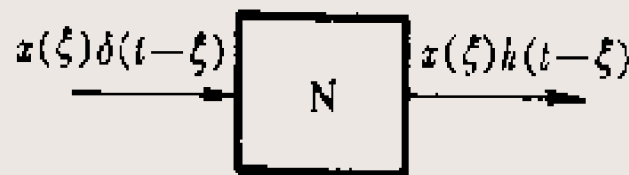
- ❖ 设网络N的冲激响应为 $h(t)$ 。由于不同的网络对同样的冲激激励，N的响应不同，网络N可用它的冲激响应表征。
- ❖ $h(t)$ 是冲激在 $t=0$ 时作用所产生的响应，由于网络是非时变的，对于在 $t=\xi$ 时作用的冲激，其响应必为 $h(t-\xi)$ ，图(b)。
- ❖ 如果作用于N的冲激是强度为 $x(\xi)$ 的冲激，那末，由于网络是线性的，其响应必为 $x(\xi)h(t-\xi)$ ，图(c)。



a



b

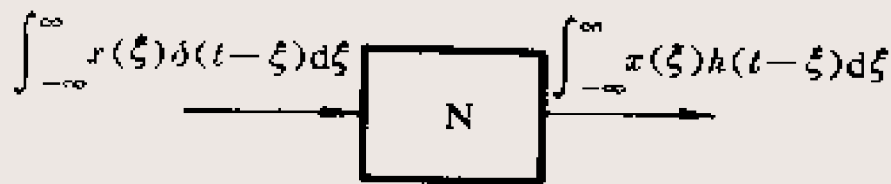


c

响应是激励与冲激响应的卷积

❖ ξ 可以有不同的数值，如果把对应于所有 ξ 值的上述激励之和作为N的输入，则根据叠加定理，输出就应该是上述响应之和。

❖ 把激励的积分作为输入，则响应的积分便是输出，即



$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\xi) \delta(t - \xi) d\xi \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\xi) h(t - \xi) d\xi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\xi) \delta(t - \xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x(\xi) \delta(\xi - t) d\xi = x(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\xi) h(t - \xi) d\xi = x(t) * h(t)$$

响应是激励与
冲激响应的卷
积

卷积性质

- ❖ 在卷积积分中冲激响应 $h(t)$ 和输入 $x(t)$ 可以交换。

$$\begin{aligned}y(t) &= x(t) * h(t) \\&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\xi) h(t - \xi) d\xi \\&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \xi) h(\xi) d\xi\end{aligned}$$

- ❖ 对于物理上可实现的网络，响应(输出)不能先于激励(输入)。冲激响应 $h(t)$ 是对冲激激励 $\delta(t)$ 的响应，当 $t < 0$ 时， $\delta(t) = 0$ ，因而冲激响应 $h(t) = 0$ 。

$$\begin{aligned}y(t) &= x(t) * h(t) \\&= \int_{-\infty}^t x(\xi) h(t - \xi) d\xi && \because \xi > t \quad h(t - \xi) = 0 \\&= \int_0^{\infty} x(t - \xi) h(\xi) d\xi && \because \xi < 0 \quad h(t) = 0\end{aligned}$$

卷积性质

- ❖ 如果只限于讨论输入在 $t=0$ 时作用到网络的情况，亦即

$$x(t) = 0 \quad t < 0$$

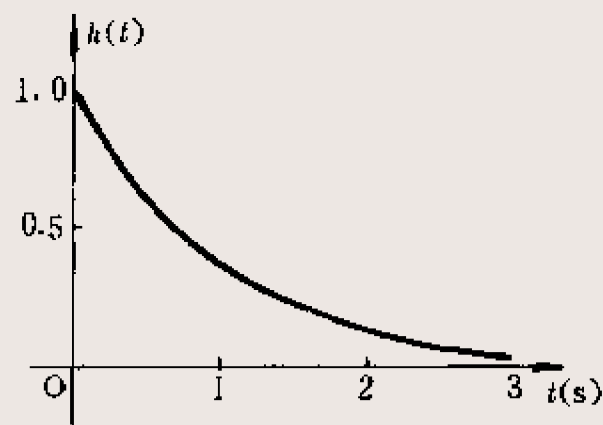
$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \int_0^t x(\xi) h(t - \xi) d\xi \\ &= \int_0^t x(t - \xi) h(\xi) d\xi \end{aligned}$$

例13-13

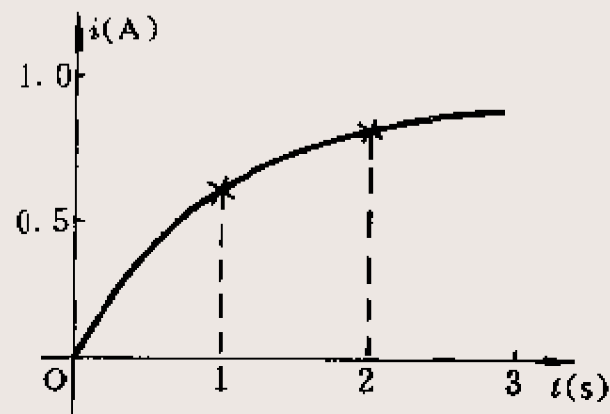
已知 RL 串联电路电流的冲激响应 $h(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$ ，试求该电路在阶跃电压 $\varepsilon(t)$ 作用下的响应 $i(t)$ 。

解 RL 串联电路中，如果该电路电流的冲激响应 $h(t)$ ，利用卷积积分即可求得在任何输入作用下的响应 $i(t)$ 。

$$\begin{aligned} i(t) &= h(t) * u_S(t) \\ &= \int_0^t h(t-\xi) u_S(\xi) d\xi = \int_0^t e^{-(t-\xi)} \varepsilon(\xi) d\xi \\ &= e^{-t} \int_0^t e^{\xi} d\xi = (1 - e^{-t}) \bullet \varepsilon(t) \end{aligned}$$

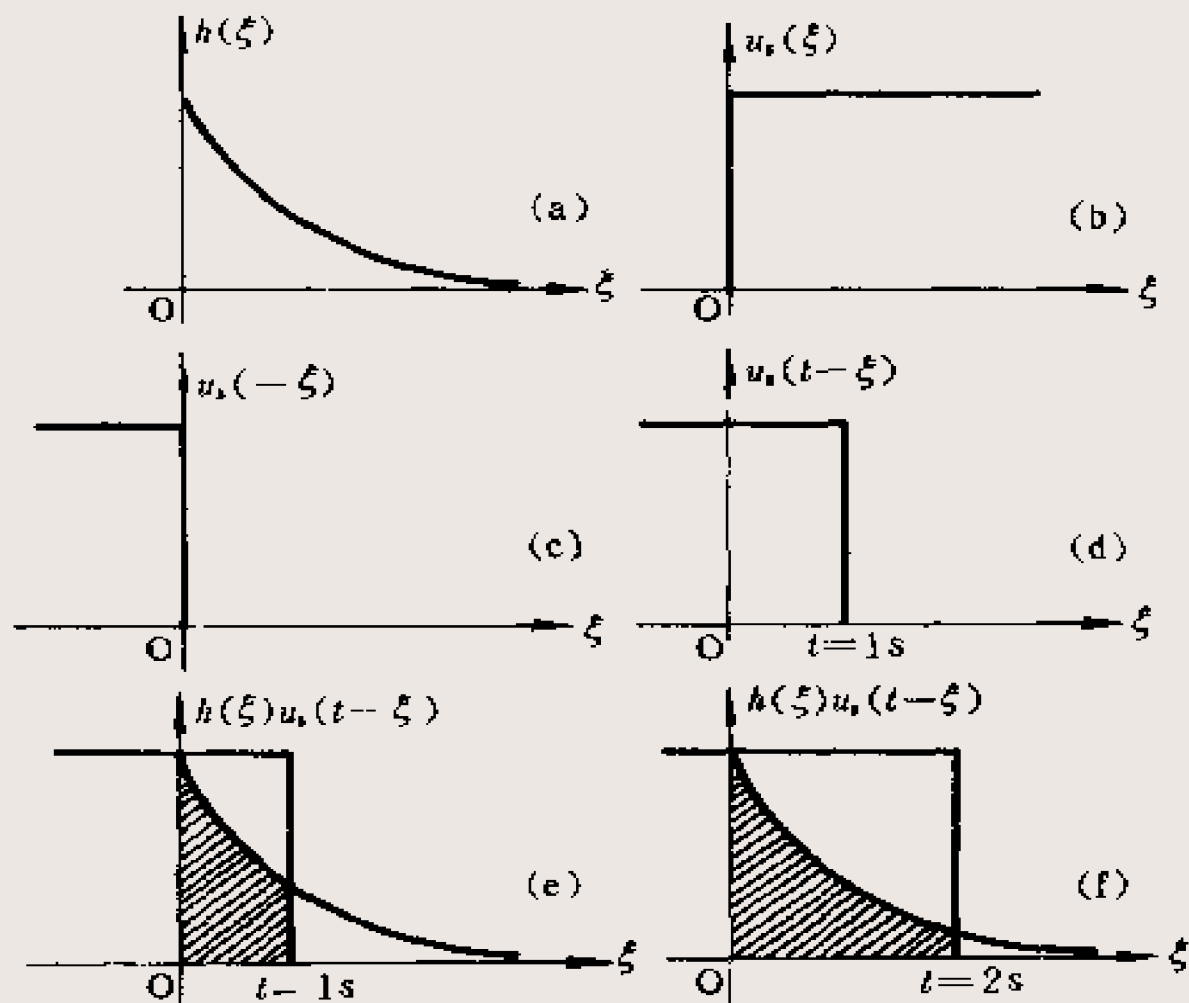


(a)



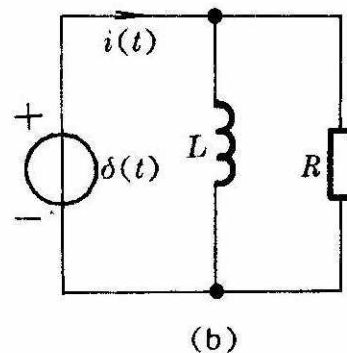
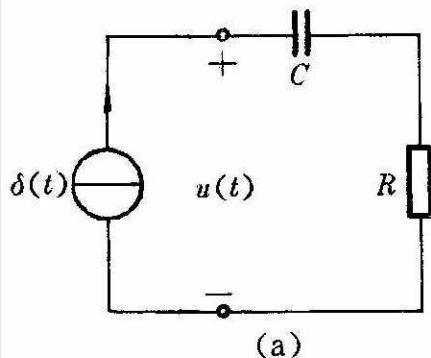
(b)

卷积图示说明



习题13-15

- (1) 求图(a)所示电路中电压 $u(t)$ 的冲激响应。
 (2) 求图(b)所示电路中电流 $i(t)$ 的冲激响应。



解 (1) 已知 $u_C(0_-)=0$ 。在 $0_- < t < 0_+$ 期间，冲激电流 $\delta(t)$ 在电阻上产生冲激电压：

$$u_R(t) = R\delta(t)$$

冲激电流使电容电压发生跃变： $u_C(0_+) = \frac{1}{C}$

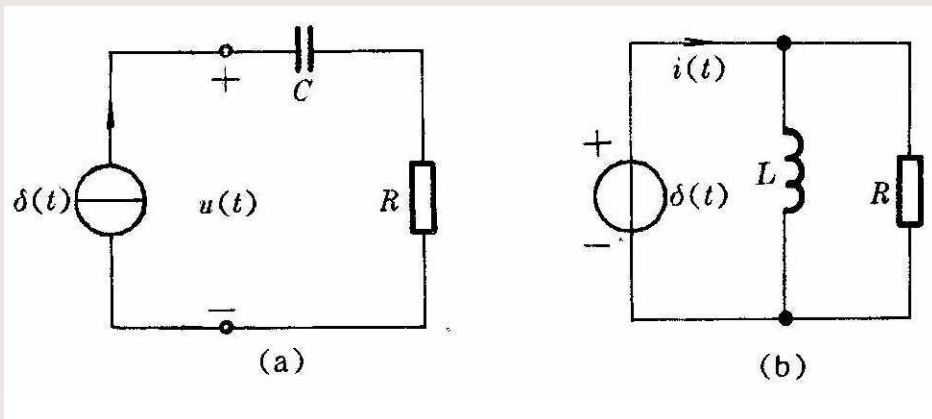
$t > 0$ 时，冲激电流消失，电流源相当于开路。这时，电阻上没有电压，电容电压保持不变。得到 $u(t)$ 的单位冲激响应为

$$h(t) = u_R(t) + u_C(t) = R\delta(t) + \frac{1}{C}\varepsilon(t)$$

解答

(2) (b)电路与(a)电路是互为对偶的。可以按对偶关系直接变换出 $i(t)$ 的单位冲激响应为

$$h(t) = i_R(t) + i_L(t) = \frac{1}{R} \delta(t) + \frac{1}{L} \varepsilon(t)$$



习题13-21

电路如图，以 $i_2(t)$ 为所求响应。

- (1)求冲激响应；
- (2)利用卷积积分和(1)的结果求阶跃响应；
- (3)求图(b)输入作用下的响应 $i_2(t)$ 。

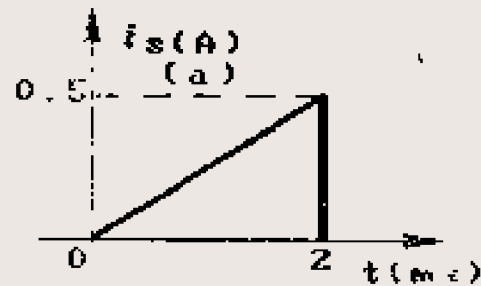
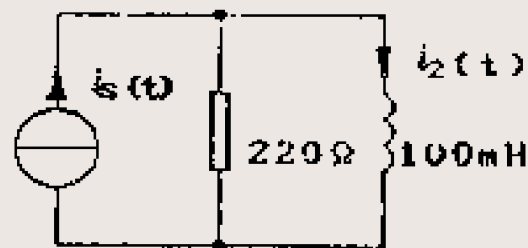
解 (1)已知 $i_2(0)=0$ 。作 $t=0$ 时的等效电路如图。电感两端的冲激电压为

$$u_L(t) = 220\delta(t)V$$

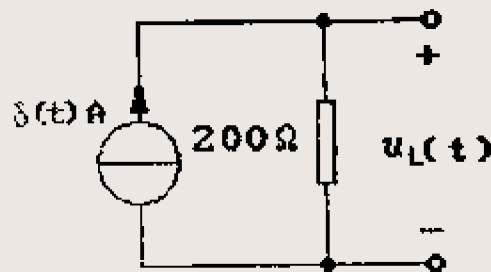
$$i_2(0_+) = i_2(0_-) + \frac{1}{L} \int_{0_-}^{0_+} u dt = \frac{220}{0.1} = 2200A$$

$$\tau = \frac{R}{L} = 2200s$$

$$t > 0 \text{ 时, 零输入响应: } h(t) = 2200e^{-2200t}\varepsilon(t)$$



(b)



解答

(2) $i_s(t) = \varepsilon(t)A$, 用卷积分析法求 i_2 的单位阶跃响应, 得到

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t i_s(\xi) h(t-\xi) d\xi = \int_0^t h(t-\xi) d\xi \\ &= 2200 \int_0^t e^{2200(t-\xi)} d\xi = (1 - e^{-2200t}) \varepsilon(t) A \end{aligned}$$

(3) 用卷积分析法求 i_2 的零状态响应

$$i_s(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 250t & 0 < t < 2 \times 10^{-3} S \\ 0 & t > 2 \times 10^{-3} S \end{cases}$$

$$\begin{aligned} i_2(t) &= \int_0^t i_s(\xi) h(t-\xi) d\xi = 250 \times 2200 \int_0^t \xi e^{2200(\xi-t)} d\xi \\ &= 250t - \frac{5}{44} (1 - e^{-2200t}) A \quad 0 < t < 2 \times 10^{-3} S \end{aligned}$$

作业

预习第八章