电路分析基础

总复习

2010年12月9日

第一部分

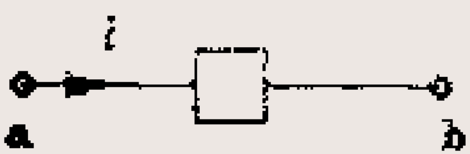
总论和电阻电路分析

第一章
集总电路中电压、电流的约束关系

- 基本理想元件有三种：只表示消耗能量的电阻元件，只表示贮存电场能量的电容元件和只表示贮存磁场能量的电感元件。
- 电源元件：电压源、电流源、受控源元件。
- 理想元件称为“集总参数元件”。由理想元件即集总元件组成的电路图称为电路模型。
- 用集总元件表征电路，要求器件和电路的尺寸远小于正常工作频率所对应的波长，否则要用分布参数来表征。

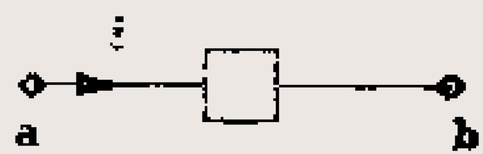
电流、电压、功率及参考方向

- 支路电流：单位时间通过支路的电荷量叫做支路电流，其大小为：$i=dq/dt$，规定电流方向为正电荷运动的方向。
- 电流参考方向：预先假定的正方向，用箭头表示。 参考方向可以任意假设，在分析电路时，按假定的参考方向计算，如果算出的电流为正，说明真实方向与参考方向相同，为负，说明实际方向与参考方向相反。



$i>0$

(a)

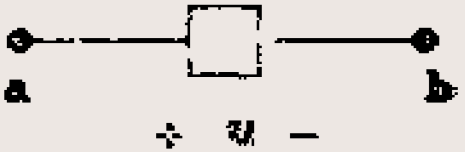


$i<0$

(b)

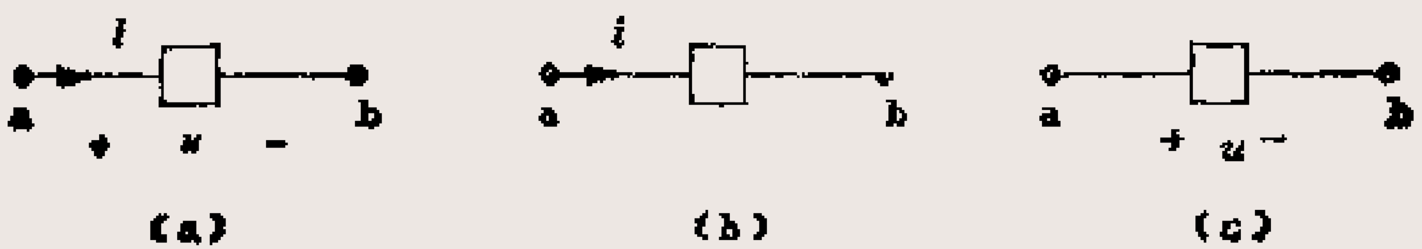
电流、电压、功率及参考方向

- 支路电压：支路两端的电位差称为支路电压，其大小为单位正电荷由支路的一端a移动到另一端b所获得或失去的能量。$u=dw/dq$。
- 电压的参考极性(参考方向)用“+”、 “-”号表示，“+”号表示高电位， “-”号表示低电位。
- 电压u为正时，表示真实极性与参考极性相同，即a点电位高，b点电位低。为负时，真实极性与参考极性相反，即a点电位低，b点电位高。



电流、电压、功率及参考方向

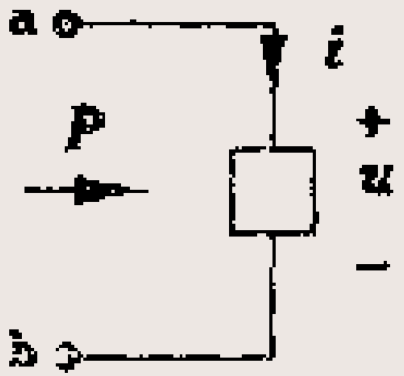
- 关联参考方向：电流参考方向与电压参考极性相一致的方向。规定电流参考方向由电压参考极性的“+”端流向“-”端。
- 如果采用关联参考方向，在图上只需标出电流参考方向，或只标出电压参考极件。



电流、电压、功率及参考方向

- 功率：单位时间内吸收的电能，能量的变化率为功率

$$p(t)=\frac{dw}{dt}=\frac{udq}{dt}=ui$$



- 电流、电压取一致的参考方向，功率取进入电路部分为参考方向，$p(t)>0$，说明真实方向与参考方向一致，即吸收功率。$p(t)<0$，说明真实方向与参考方向相反，即放出功率。

基尔霍夫电流定律

❖ 基尔霍夫电流定律KCL：对任一集总电路中的任一节点，在任一时刻，流出(或流入)该节点的所有支路电流的代数和为零。即

$$\sum_{k=1}^{K} i_k = 0 \qquad \text{节点电流方程}$$

(1)遵循电荷守恒法则，是电流连续性的体现。

(2)与元件性质无关，是对支路电流所加的约束。

(3)不仅适合节点，也适合闭合面。

基尔霍夫电压定律

❖ 基尔霍夫电压定律 **KVL**：对于任一集总电路中的任一回路，在任一时刻，沿回路的所有支路电压降的代数和为零。即

$$\sum_{k=1}^{K} u_k = 0 \quad \text{回路电压方程}$$

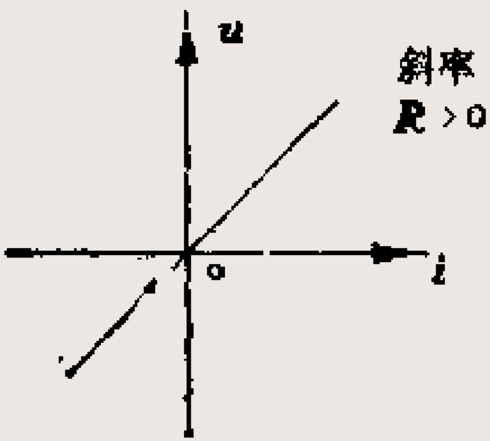
(1) 遵循能量守恒法则，单位正电荷由回路的某点出发，绕行一周又回到该点，获得或失去的总能量为零。

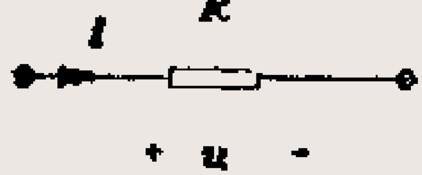
(2) 与元件性质无关，是对支路电压所加的约束。

VAR-电阻元件

- **电阻元件** 任何一个二端元件，如果在任一时刻的电压$u(t)$和电流$i(t)$之间的关系可以由u-i平面上一条曲线所决定，则此二端元件称为电阻元件。
- 如果特性曲线是过原点的一条直线，则为线性电阻，否则称为非线性电阻。如果特性曲线不随时间而变化，称为非时变电阻，否则称为时变电阻。
- 如取关联参考方向，则

$$u(t) = Ri(t)$$





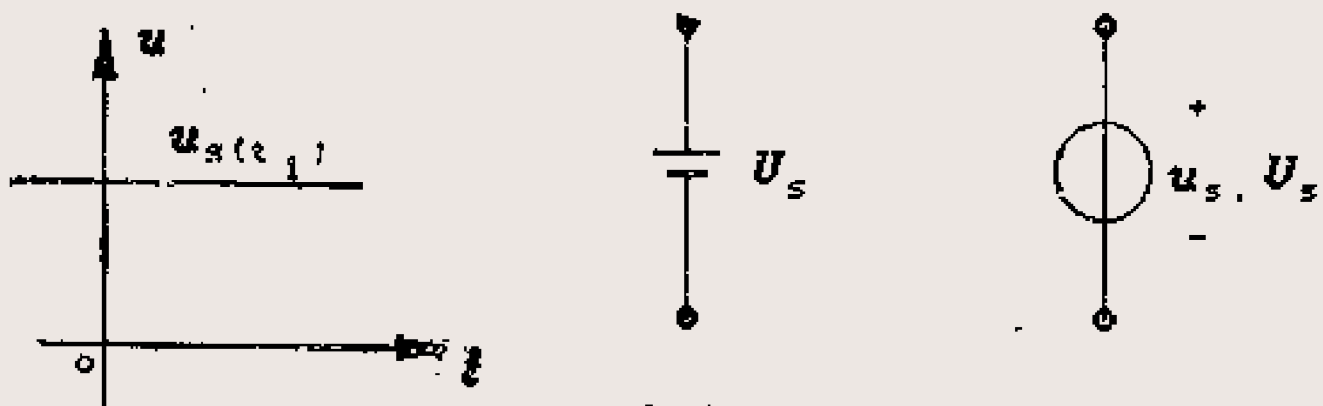
VAR-电压源

❖ 电压源 其两端供出定值电压U_s或是时间函数$u_s(t)$，这样的元件称为理想电压源，简称电压源。

❖ 两个基本性质：

1) 两端供出定值的电压U_s或是时间函数$u_s(t)$

2) 流过电压源的电流为不定值，其大小由外电路决定。



(a) (b)

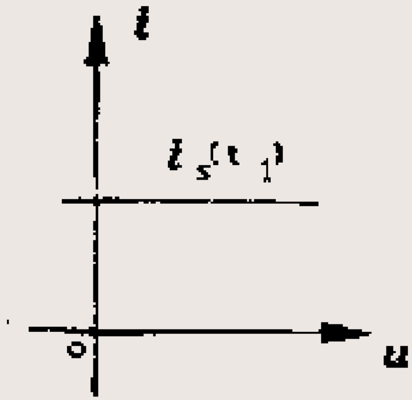
VAR-电流源

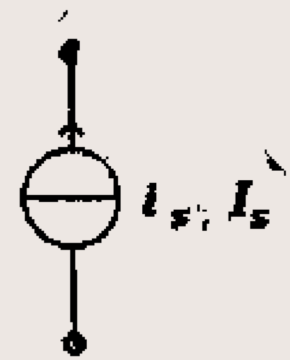
❖ **电流源** 其两端供出定值电流I_s或是时间函数$i_s(t)$，这样的元件称为理想电流源，简称电流源。

❖ 两个基本性质：

1) 两端供出定值电流I_s或是时间函数$i_s(t)$

2) 电流源两端的电压为不定值，其大小由外电路决定。





受控源

- 受电路中由其他支路电压或电流控制的电压源或电流源称为**受控源**。
- 受控源不能作为电路的激励，受控源是四端(双端口)元件，它含有两条支路：一条控制支路，一条受控支路。
- 在求解含受控源电路中的电压、电流时，可先把受控源作为独立源处理，再确定受控量与控制量的关系。在化简电路时，注意不要把**控制量**化掉。

支路电流法与支路电压法

❖ 根据两类约束可以列出求解支路电流和支路电压的独立方程。

$$\left.\begin{array}{lll} \boldsymbol{KCL} & \sum i=0 & \text{节点电压方程} \\ \boldsymbol{KVL} & \sum u=0 & \text{回路电压方程} \end{array}\right\}\text{支路约束}$$

VAR 元件的伏安特性 元件约束

❖由*KCL*列出n-1个独立节点电流方程(n是节点数)。

❖由*KVL*列出b-(n-1)个独立回路电压方程(b是支路数)。

❖由元件的*VAR*的到b条支路的电压电流关系。

线性电路的比例性和叠加定理

- 比例性 在单激励的线性电路中，激励增大多少倍，响应也增大相同的倍数。
- 叠加定理 在任何由线性电阻、线性受控源及独立电源组成的电路中，每一元件的电流和电压可以看成是各个独立电源单独作用于电路时，在该元件上所产生的电流或电压的代数和。

1) 叠加定理只适用于线性电路
2) 独立源可以单独作用，受控源不能单独作用，独立源单独作用时，受控源应和电阻一样予以保留。
3) 叠加定理是指各个电源单独作用时，在元件上产生的电流或电压的代数和，要注意电流的方向和电压的极性。
4) 求元件上的功率不能用叠加。

第二章网孔分析法和节点分析法

- 网孔分析法
- 节点分析法
- 割集分析法
- 回路分析法

网孔分析法

❖ 网孔电流是一组完备的独立电流变量。一个平面电路共有b-(n-1)个网孔，因而有相同数目的网孔电流，它的线性组合可以表示出所有的支路电流。

$$
\begin{aligned}
R_{11} i_{m1} + R_{12} i_{m2} + \cdots + R_{1m} i_{mm} &= u_{s11} \\
R_{21} i_{m1} + R_{22} i_{m2} + \cdots + R_{2m} i_{mm} &= u_{s22} \\
&\cdots\cdots \\
R_{m1} i_{m1} + R_{m2} i_{m2} + \cdots + R_{mm} i_{mm} &= u_{smm}
\end{aligned}
$$

❖ R_{ii}为网孔i自电阻，为网孔i内所有电阻之和。R_{ij}为网孔i与网孔j的互电阻，为两网孔的公共电阻，当两网孔电流的方向相同时为正，反之为负。u_{sii}为网孔i中电压源电压升的代数和。

节点分析法

- 节点电压是一组完备的独立电压变量。各支路电压都能由节点电压表示，代表节点电压的各支路不能构成回路，所以各节点电压不能由*KVL*相联系，因此各节点电压之间又是相互独立的。

$$G_{11}u_{n1}+G_{12}u_{n2}+\cdots+G_{1(n-1)}u_{n(n-1)}=i_{s11}$$

$$G_{21}u_{n1}+G_{22}u_{n2}+\cdots+u_{2(n-1)}u_{n(n-1)}=i_{s22}$$

$$\cdots\cdots$$

$$G_{(n-1)1}u_{n1}+G_{(n-1)2}u_{n2}+\cdots+G_{(n-1)(n-1)}u_{n(n-1)}=i_{s(n-1)(n-1)}$$

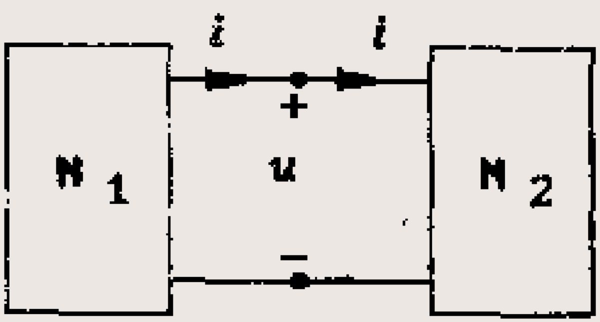
- G_{ii}为节点i的自电导：节点上所有电导的总和。G_{ij}为节点i与节点j的互电导：两节点公共电导的负值。i_{sii}为流入节点i的电流源的代数和。u_{ni}为第i个节点电压变量。

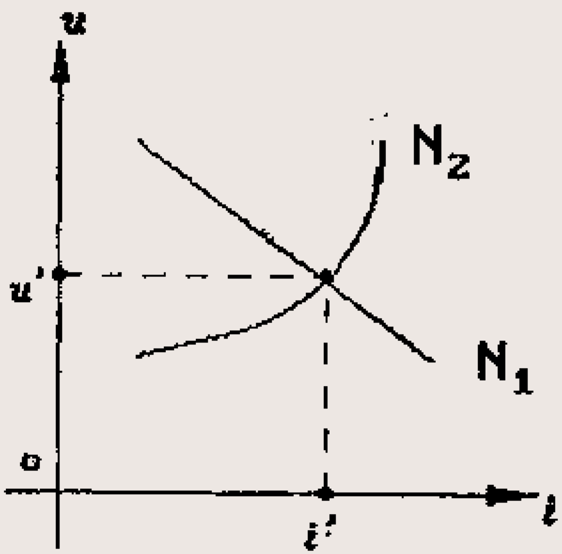
第四章
分解方法及单口网络

- 网络分解分析法
- 求单口网络的伏安关系
- 置换定理
- 单口网络等效电路
- 一些简单的等效变换法则和公式
- 戴维南定理和诺顿定理
- 最大功率传递定理
- T形网络与Π形网络的等效变换

网络分解分析法

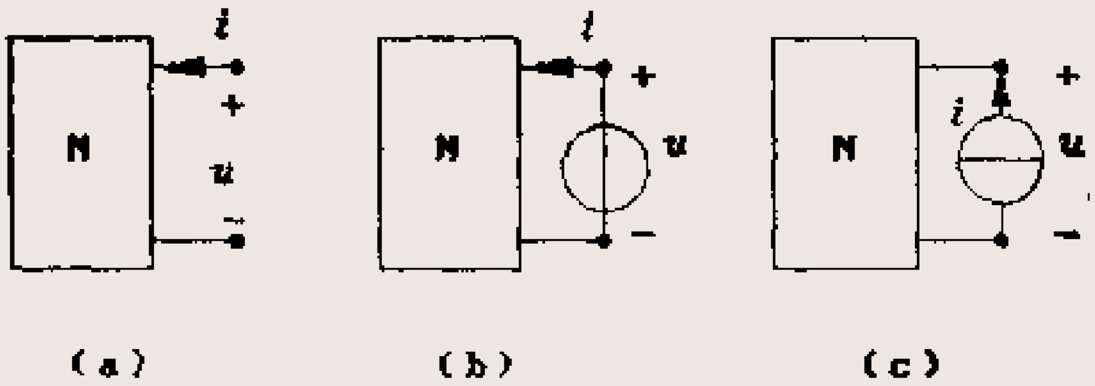
❖ 将一个电路分解为两个相联的单口网络N_1和N_2，按设定的端口电压u和电流i变量，分别求出N_1和N_2的伏安关系。 解联立的两个伏安关系方程，得到端口响应值u'和i'。





求单口网络的伏安关系

- 按设定的参考方向，将单口网络的端口变量电压u和电流i之一设为激励源，联接在端口上，将另一变量设为解变量。



置换定理

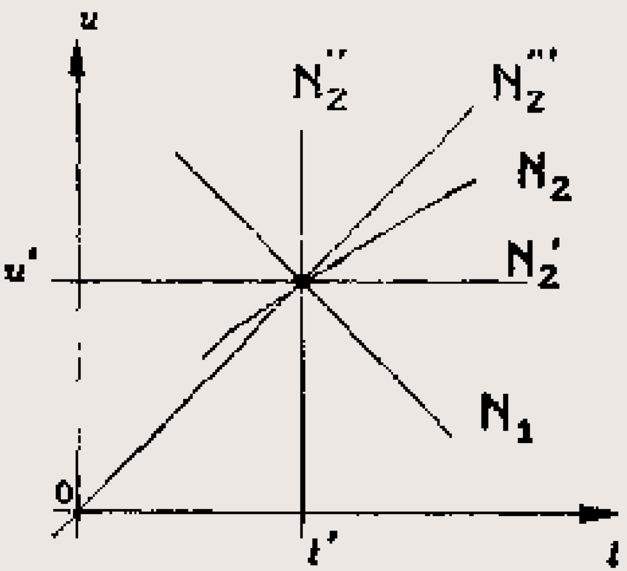
❖ 将一个电路分解为两个相联的单口网络N_1和N_2，设已知端口响应值u'和i'，可将其中一个单口网络(如N_2)置换为一个新的单口网络，只须其伏安关系方程满足此u'和i'响应值。

置换为

N_2'　　电压源

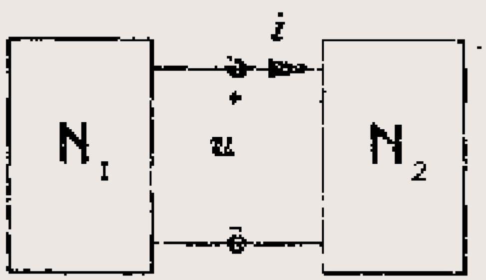
N_2''　　电流源

N_2'''　　电阻

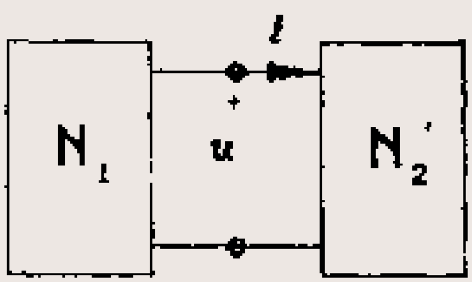


单口网络的等效电路

- 两个结构不同，而伏安关系相同的单口网络互为等效单口网络。
- 将一个电路分解为两个相联的单口网络N_1和N_2， 将其中一个单口网络(N_2)变换为等效的新单口网络N_2'，变换后电路的端口响应以及另一个单口网络(如N_1)中的各响应必须与原电路中对应的响应相同。



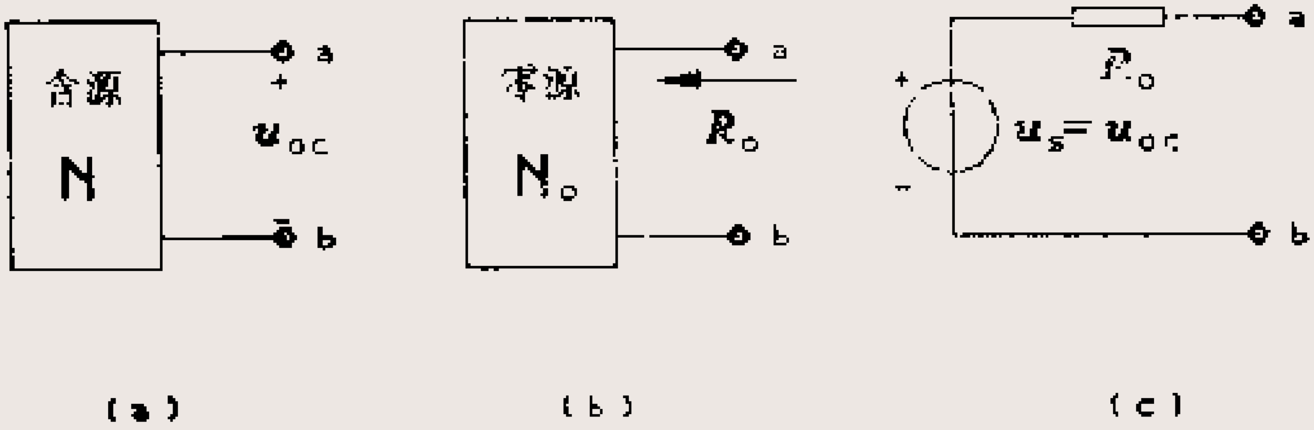
(a)



(b)

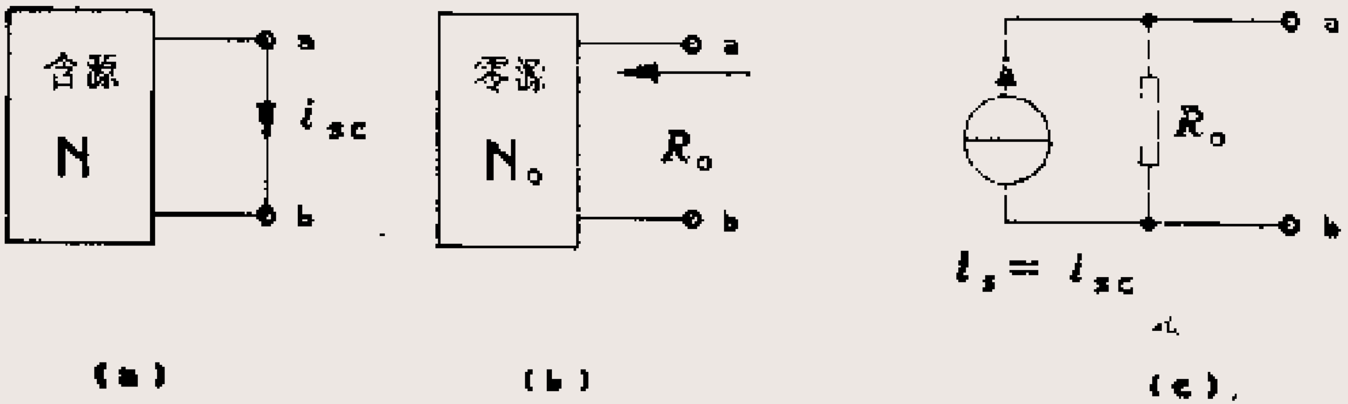
戴维南定理

❖ 戴维南等效: 单口网络可等效为一个电压源串联一个电阻。等效电压源电压u_s取为令原单口网络端口开路时的电压值，且取为与u_{oc}顺向的电压极性。等效电阻R_o取为令原单口网络内部激励源皆为零时的等效电阻值。



诺顿定理

❖ 诺顿等效: 单口网络可等效为一个电流源并联一个电阻。等效电流源电流i_s取为令原单口网络端口短路时的电流值i_{sc}，且取为与i_{sc}顺向的电流绕向。等效电阻R_o取为令原单口网络内部激励源皆置零时的等效电阻值。



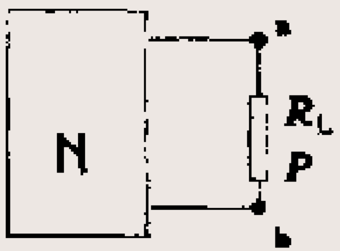
最大功率传递定理

- 当负载电阻满足

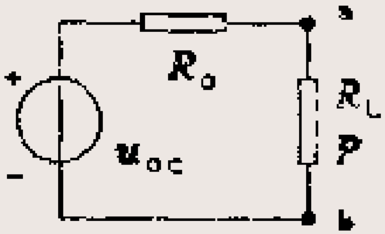
$$R_L = R_o$$

$$p_{\max} = \frac{u_{oc}^2}{4R_o}$$

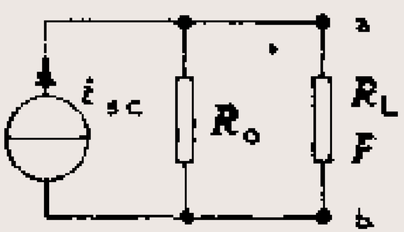
$$= \frac{i_{sc}^2 R}{4}$$



(a)



(b)



(c)

第二部分

动态电路的时域分析

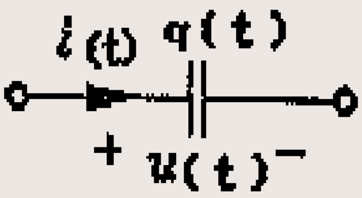
第五章 电容元件与电感元件

❖ 电容元件 一个二端元件，如果在任一时刻t，它的电荷$q(t)$同它的端电压$u(t)$之间的关系可以用u-q平面上的一条曲线来确定，则此二端元件称为电容元件。

$$q(t)=Cu(t)$$

$$i(t)=C\frac{du}{dt}$$

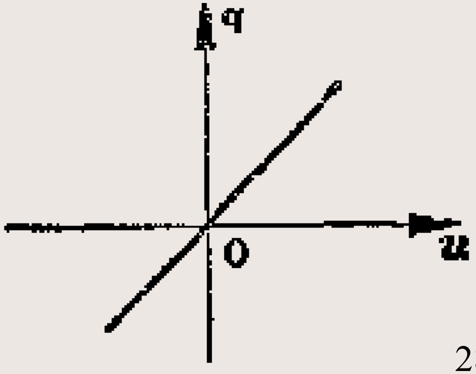
u和i为关联参考方向



$$u(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(\xi)d\xi$$

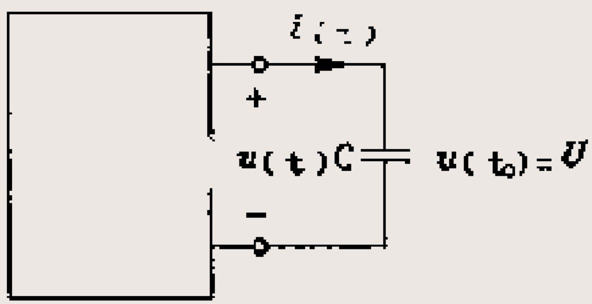
$$p(t)=u(t)i(t)$$

$$w_c(t)=\frac{1}{2}Cu^2(t)$$

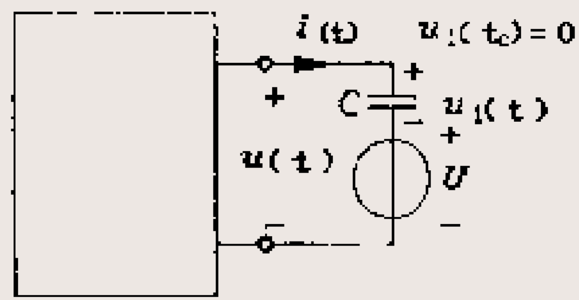


电容电压的性质

- 连续性 若电容电流$i(t)$在闭区间$[t_a,t_b]$内为有界的，则电容电压$u_C(t)$在开区间(t_a,t_b)内为连续的。特别是，对任何时刻t，且$t_a<t<t_b$，$u_C(t_-)=u_C(t_+)$。即，如果电容电流为有限值，电容电压不能跃变。
- 记忆性 电容电压有“记忆”电流的作用，电容是“记忆”元件。电容电压的初始值$u_C(t_0)$反映了t_0以前电容电流的影响。



(a)



(b)

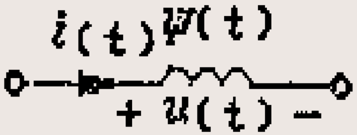
电感元件

❖ 电感元件 一个二端元件，如果在任一时刻t，它的电流$i(t)$同它的磁链$\psi(t)$之间的关系可以用i-$\psi(t)$平面上的一条曲线来确定，则此二端元件称为电感元件。

$$\psi(t) = Li(t)$$

$$u(t) = L\frac{di}{dt}$$

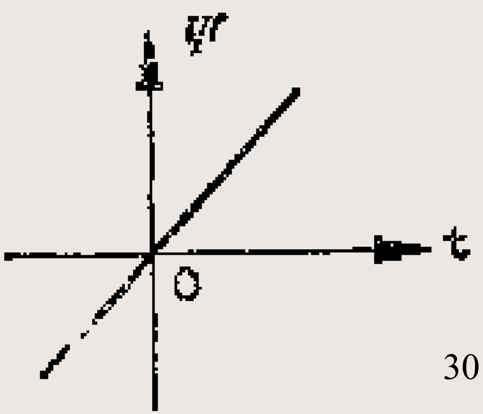
u和i为关联参考方向



$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u(\xi)d\xi$$

$$p(t) = u(t)i(t)$$

$$w_L(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$$

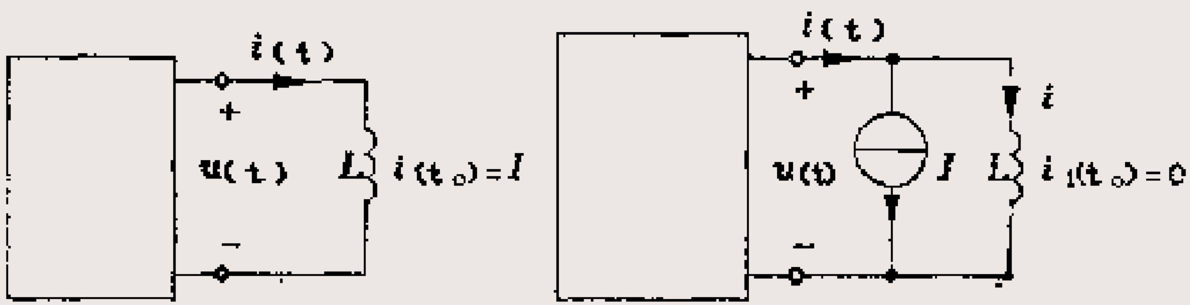


电感电流的性质

❖ 连续性 若电感电压$u(t)$在闭区间$[t_a, t_b]$内为有界的，则电感电流$i_L(t)$在区间(t_a, t_b)内为连续的。特别是，对任何时间t，且$t_a<t<t_b$

$$i_L(t_-)=i_L(t_+)$$

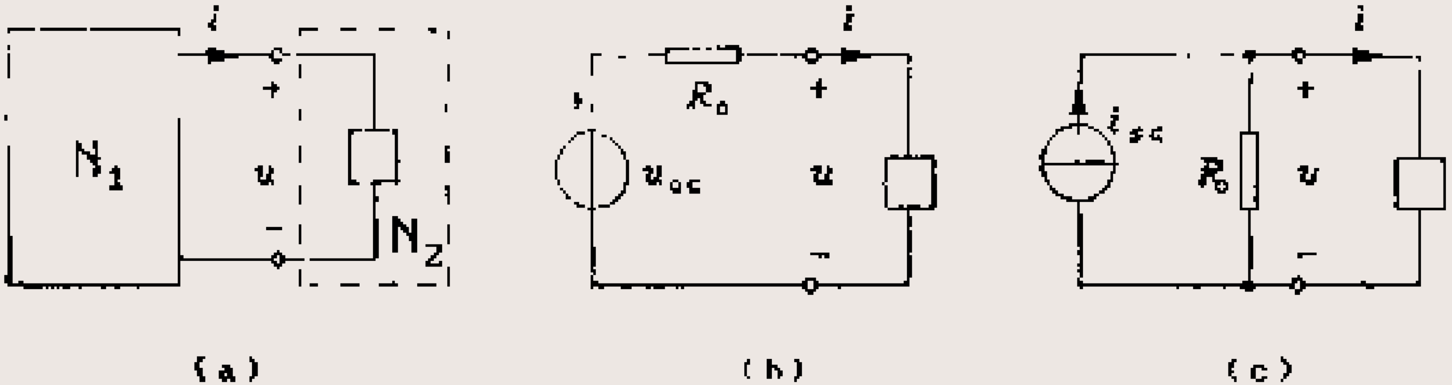
❖ 记忆性 电感电流有“记忆”电流的作用，电感是“记忆”元件。电感电流的初始值$i_L(t_0)$反映了t_0以前电感电压的影响。



(a)　　(b)

第六章 一阶电路

❖ 一阶电路可看成由两个单口网络组成，N_1为含源电阻网络，N_2为动态元件。含源电阻网络部分可用戴维南定理或诺顿定理化简。



$$u_{R_o}(t)+u_C(t)=u_{OC}(t)$$

$$u_{R_o}(t)=R_o i(t),\qquad i(t)=C\frac{du_C}{dt}$$

$$R_o C\frac{du_C}{dt}+u_C=u_{OC}(t)$$

零输入响应

❖ 零输入响应 外加输入为零，由初始状态产生的响应。

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=0 \qquad t\geq 0$$

$$u_C(0)=U_0$$

$$u_C(t)=U_0e^{-\frac{1}{\tau}t} \qquad t\geq 0$$

$$\tau=\frac{1}{RC} \qquad RC\text{电路}$$

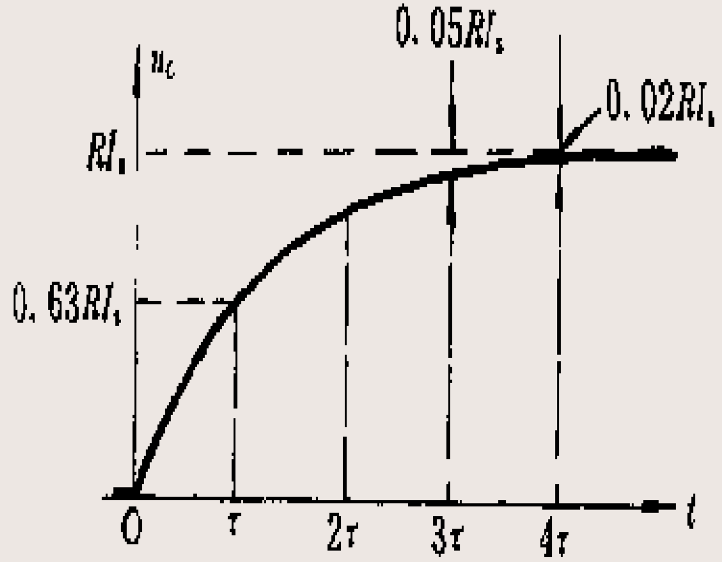
$$\tau=\frac{L}{R} \qquad RL\text{电路}$$

零状态响应

❖ 零状态响应 初始状态为零，由外加于电路的输入产生的响应称为零状态响应。

$$C\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{R}u_C=I_S \qquad t\geq 0$$

$$u_C(0)=0$$



$$u_C(t)=-RI_Se^{-\frac{1}{RC}t}+RI_S$$

$$=RI_S\left(1-e^{-t/RC}\right) \qquad t\geq 0$$

完全响应

完全响应 线性动态电路的完全响应是由电源的输入和初始状态分别作用时所产生的响应的代数和。

完全响应

$$u_C(t) = RI_S + (U_0 - RI_S)e^{-t/\tau} \qquad t \ge 0$$

强制响应
稳态响应

固有响应
暂态响应

$$u_C(t) = U_0 e^{-t/\tau} + RI_S(1 - e^{-t/\tau}) \qquad t \ge 0$$

零输入响应

零状态响应

三要素法

1) 求得任一电压或电流的初始值$u_{jk}(0)$或$i_j(0)$。
2) 用开路代替电容或用短路代替电感，得到$t=\infty$时的等效电路，求得电路中的任一电压或电流的稳态值$u_{jk}(\infty)$或$i_j(\infty)$。
3) 求N_1的戴维南或诺顿等效电路以计算电路的时间常数$\tau=R_o C$或$\tau=L/R_o$
4) 若$0<\tau<\infty$，根据三要素法

$$
\begin{aligned}
f(t) &= f(\infty)+[f(0)-f(\infty)]e^{-t/\tau} \\
&= f(0)+[f(\infty)-f(0)]\left(1-e^{-t/\tau}\right)
\end{aligned}
$$

求初始值$f(0_+)$和$f(\infty)$

(1)求初始值$f(0_+)$

- 在t=0$_-$的等效电路中求$u_C(0_-)$、$i_L(0_-)$。t=0$_-$的等效电路为换路前的稳态，电容相当于开路，电感相当于短路。根据状态不能跃变

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)\text{和 } i_L(0_+)=i_L(0_-)$$

- 作$t=0_+$的等效电路，电容用电压为$u_C(0_+)$的电压源置换的电流源置换，电感用电流为$i_L(0_+)$的电流源置换。
- 在$t=0_+$的等效电路中求所需的初始值。

(2)求稳态值$f(\infty)$

- 作$t=\infty$的等效电路，电容开路，电感短路
- 在$t=\infty$的等效电路中求所需的稳态值。

时间常数τ

(3)求时间常数τ

- 首先求出从动态元件两端看进去的戴维南等效电阻。求R_o的方法:

①独立源为零值，用电阻的串并联公式化简。

②独立源为零值，外加电压u，求入端电流i，等效电阻等于端钮上电压、电流比 $R_o = \dfrac{u}{i}$

③ 开路电压比短路电流(独立源要保留)。 $R_o = \dfrac{u_{oc}}{i_{sc}}$

- 含受控源电路只能用②、③两种方法。
- 电路的时间常数 $\tau = R_o C$或$\tau = L/R_o$

求$f(t)$

(4)将$f(0_+)$和$f(\infty)$、τ代入公式

$$f(t)=f(\infty)+\left[f(0_+)-f(\infty)\right]e^{-t/\tau}$$

$$f(t)=f(0_+)+\left[f(\infty)-f(0_+)\right]\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

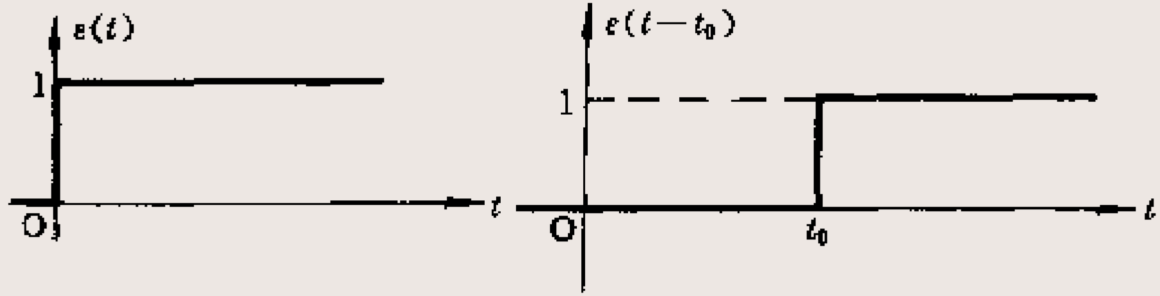
阶跃函数

❖ 单位阶跃函数记为$\varepsilon(t)$，其定义为

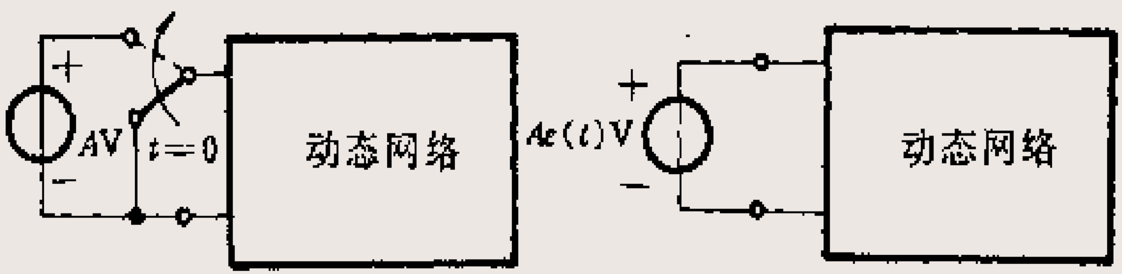
$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

❖ 延时单位阶跃函数

$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 1 & t>t_0\end{cases}$$



(a) (b)



(a) (b)

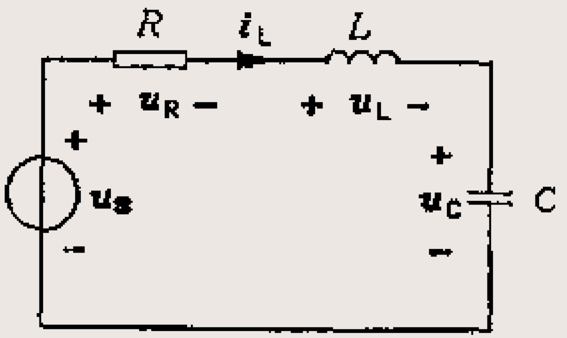
阶跃响应

- 零状态电路对单位阶跃信号的响应称为(单位)阶跃响应，并用$s(t)$表示。
- 如果输入是幅度为A的阶跃信号，则根据零状态比例性可知$As(t)$即为该电路的零状态响应。
- 若单位阶跃信号作用下的响应为$s(t)$，则在延时单位阶跃信号作用下响应为$s(t-t_0)$。
- 根据叠加定理，各阶跃信号分量单独作用于电路的零状态响应之和为该分段常量信号作用下电路的零状态响应。
- 如果电路的初始状态不为零，只需再加上电路的零输入响应，即可求得该电路在分段常量信号作用下的完全响应。

第七章 二阶电路

❖ *RLC*串联电路的方程

$$LC\frac{d^2u_C}{dt}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=u_{oc}(t)$$



RLC电路的零输入响应

- 首先研究*RLC*电路的零输入响应，及$u_{oc}(0)=0$时电路的响应。

$$LC\frac{d^2u_C}{dt}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=0$$

$$\frac{d^2u_C}{dt}+\frac{R}{L}\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{LC}u_C=0$$

- 由微分方程理论可知，齐次方程解答的形式由特征方程根的性质决定。特征方程为

$$s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}=0$$

$$s_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

特征根性质

❖ 特征根即电路的固有频率，它将确定零输入响应的形式。由于*R*、*L*、*C*数值不同，固有频率s_l和s_2可出现三种不同的情况：

(1) $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$ s_l和s_2为不相等的负实数；

(2) $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}$ s_l和s_2为相等的负实数；

(3) $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$ s_l和s_2为共轭复数，实部为负；

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

过阻尼响应

❖ 当 $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$ 即 $R^2 > 4\frac{L}{C}$ 时，固有频率为不相等的负实数，齐次方程的解答可表为

$$u_C(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

其中常数K_1和K_2由初始条件确定:

$$u_C(0) = K_1 + K_2$$

$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_0 = K_1 s_1 + K_2 s_2 = \frac{i_L(0)}{C}$$

$$K_1 = \frac{1}{s_2 - s_1}\left[s_2 u_C(0) - \frac{i_L(0)}{C}\right]$$

$$K_2 = \frac{1}{s_1 - s_2}\left[s_1 u_C(0) - \frac{i_L(0)}{C}\right]$$

方程的解

❖ 由于s_l和s_2是不相等的负实数，故它们可表示为

$$s_1 = -\alpha_1 \qquad s_2 = -\alpha_2$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{R}{2L} \mp \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

可得:

$$u_C(t) = \frac{u_C(0)}{\alpha_2 - \alpha_1}\left(\alpha_2 e^{-\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{-\alpha_2 t}\right) + \frac{i_L(0)}{(\alpha_2 - \alpha_1)C}\left(e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}\right)$$

$$i_L(t) = C\frac{du_C}{dt}$$

$$= \frac{u_C(0)\alpha_1\alpha_2 C}{\alpha_2 - \alpha_1}\left(e^{-\alpha_2 t} - e^{-\alpha_1 t}\right) + \frac{i_L(0)}{\alpha_2 - \alpha_1}\left(\alpha_2 e^{-\alpha_2 t} - \alpha_1 e^{-\alpha_1 t}\right)$$

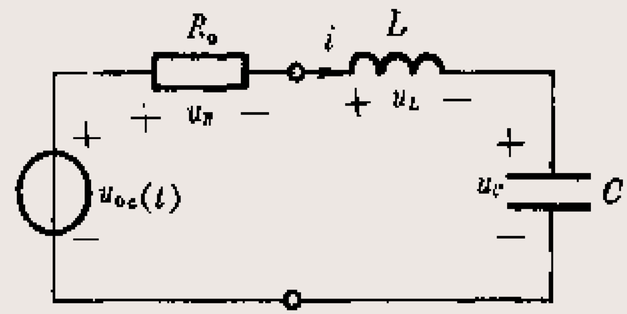
❖ 为随时间衰减的指数函数，表明电路响应是非振荡的。

临界阻尼情况

❖ 当 $\left(\frac{R}{2L}\right)^2=\frac{1}{LC}$ 即 $R^2=4\frac{L}{C}$ 时，固有频率为相等的负实数，齐次方程的解答可表为

$$u_C(t)=K_1e^{s_1t}+K_2te^{s_2t}$$

$$s_1=s_2=-\frac{R}{2L}=-\alpha$$



(b)

❖ 常数K_1和K_2可由初始条件确定

$$u_C(0)=K_1$$

$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_0=K_1s_1+K_2=\frac{i_L(0)}{C}$$

$$K_2=\frac{i_L(0)}{C}+\alpha u_C(0)$$

方程的解

- ❖ s_1和s_2是相等的负实数，故方程的解可表示为

$$u_C(t)=u_C(0)(1-\alpha t)e^{-\alpha t}+\frac{i_L(0)}{C}te^{-\alpha t}$$

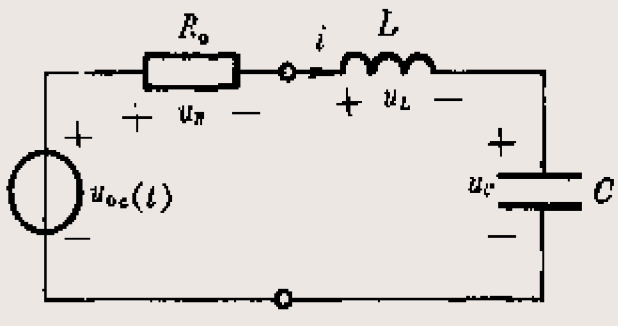
$$i_L(t)=C\frac{du_C}{dt}$$

$$=-u_C(0)\alpha^2Cte^{-\alpha t}+i_L(0)(1-\alpha t)e^{-\alpha t}$$

- ❖ 电路的响应仍然是非振荡性的，响应处于临近振荡的状态，称为临界阻尼情况。

欠阻尼响应

- 当 $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$ 即 $R^2 < 4\frac{L}{C}$ 时，固有频率为共轭复数。



(b)

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm j\omega_d$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} \qquad \omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- 齐次方程的解答可表为

$$u_C(t) = e^{-\alpha t}\left(K_1 \cos \omega_d t + K_2 \sin \omega_d t\right)$$

常数K_1和K_2的确定

❖ 常数K_1和K_2可由初始条件确定如下

$$u_C(0) = K_1$$

$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_0 = -\alpha K_1 + \omega_d K_2 = \frac{i_L(0)}{C}$$

$$K_2 = \frac{1}{\omega_d}\left[\alpha u_C(0) + \frac{i_L(0)}{C}\right]$$

❖ 解$u_C(t)$可写成

$$u_C(t) = e^{-\alpha t}\sqrt{K_1^2 + K_2^2}\left(\frac{K_1}{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}}\cos\omega_d t + \frac{K_2}{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}}\sin\omega_d t\right)$$

$$= Ke^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \theta)$$

$$K = \sqrt{K_1^2 + K_2^2} \qquad \theta = -Arctg\frac{K_2}{K_1}$$

解表达式

❖ 将K_1和K_2代入得

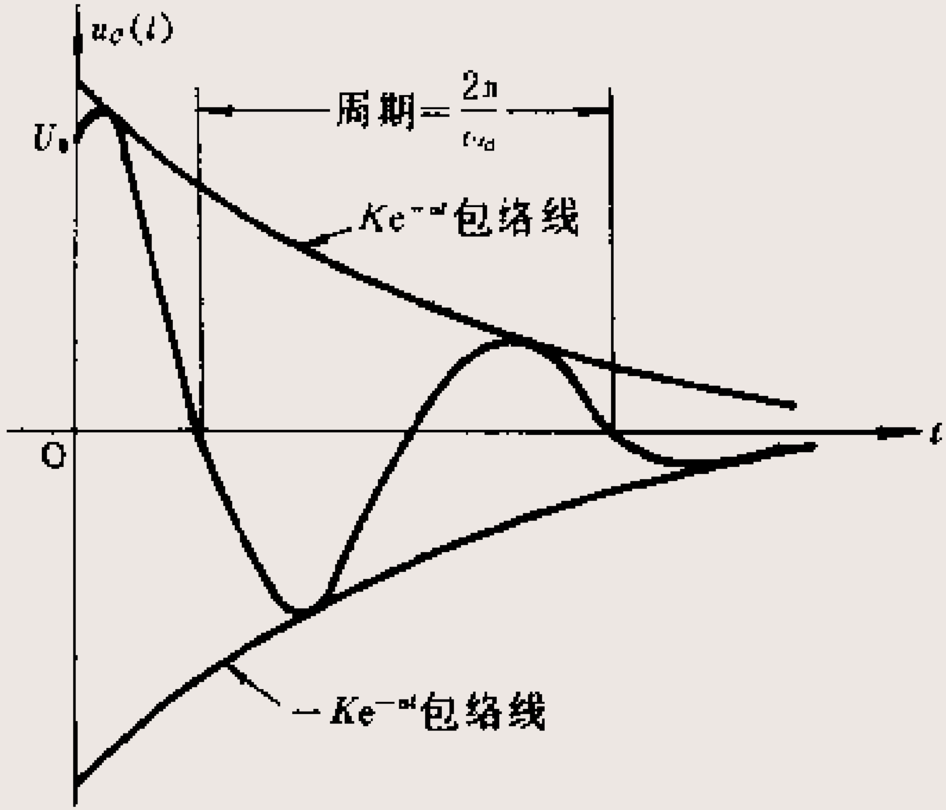
$$u_C(t)=u_C(0)\frac{\omega_0}{\omega_d}e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t-\theta)+\frac{i_L(0)}{\omega_d C}e^{-\alpha t}\sin\omega_d t$$

$$i_L(t)=-u_C(0)\frac{\omega_0^2 C}{\omega_d}e^{-\alpha t}\sin\omega_d t+i_L(0)\frac{\omega_0}{\omega_d}e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t+\theta)$$

$$\omega_0=\sqrt{\alpha^2+\omega_d^2}\qquad \theta=Arctg\frac{\alpha}{\omega_d}=Arc\sin\frac{\alpha}{\omega_0}$$

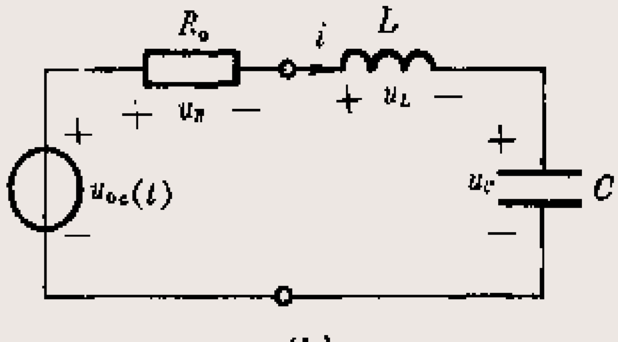
振荡波形

❖ 振荡性响应$u_C(0)=U_0$



RLC串联电路的强制响应和完全响应

❖ 当$u_{oc}(t)=U_s$，$(t\geq 0)$



$$LC\frac{d^2u_C}{dt}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=U_S$$

❖ 其特征方程同前，根据固有频率的三种不同情况，齐次方程解答形式同前，但常数K_1和K_2需在求得特解后，由非齐次方程式的通解确定。

❖ 特解与激励相同

$$u_{Cp}=U_s \qquad (t\geq 0)$$

$$u_C(t)=K_1e^{s_1t}+K_2e^{s_2t}+U_s \qquad t\geq 0$$

确定K_1和K_2

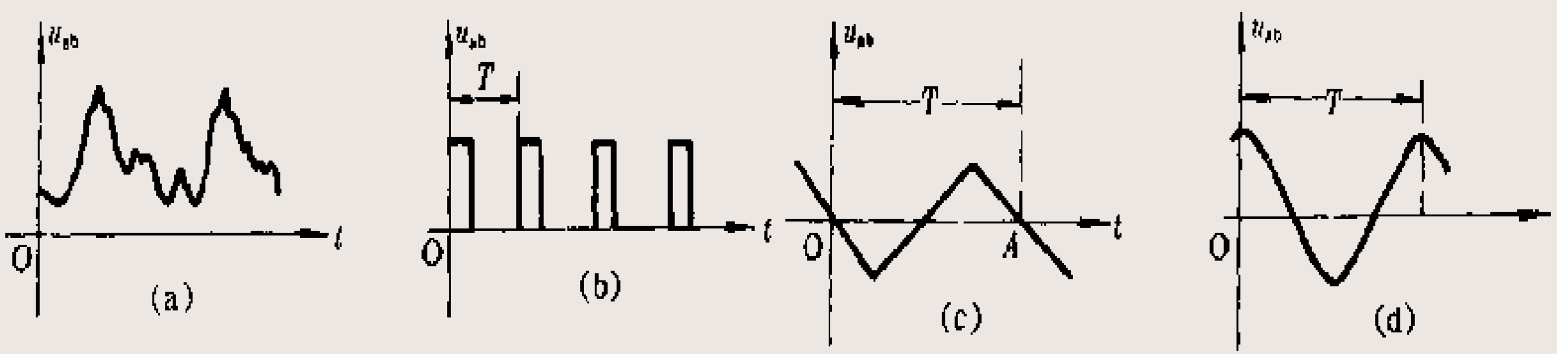
❖ 根据初始条件可求得

$$K_1 = \frac{1}{s_2 - s_1}\left\{s_2\left[u_C(0) - U_s\right] - \frac{i_L(0)}{C}\right\}$$

$$K_2 = \frac{1}{s_1 - s_2}\left\{s_1\left[u_C(0) - U_s\right] - \frac{i_L(0)}{C}\right\}$$

§8-1 周期电压和电流

- 随时间变化的电压和电流称为时变电压和电流，如果给出参考方向，在任一时刻t，电压或电流的数值便可由函数$u(t)$或$i(t)$确定。
- 时变电压和电流在任一时刻的数值，称为它们的瞬时值。
- 根据电压或电流瞬时值的正负号结合参考方向，可确定电压降或电流的真实方向。电压u的双下标即表明电压降的参考方向。



周期电压和周期电流

- 如果时变电压和电流的每个值在经过相等的时间后重复出现，称为周期电压和周期电流。应满足：

$$u(t) = u(t + kT)$$

k为任何整数。T称为周期，它是波形再次重复出现所需的最短时间间隔，单位为秒。

- 单位时间内的循环(周期)数称为频率。以f表示频率，显然

$$f = \frac{1}{T}$$

频率的单位为赫兹(赫或Hz)。

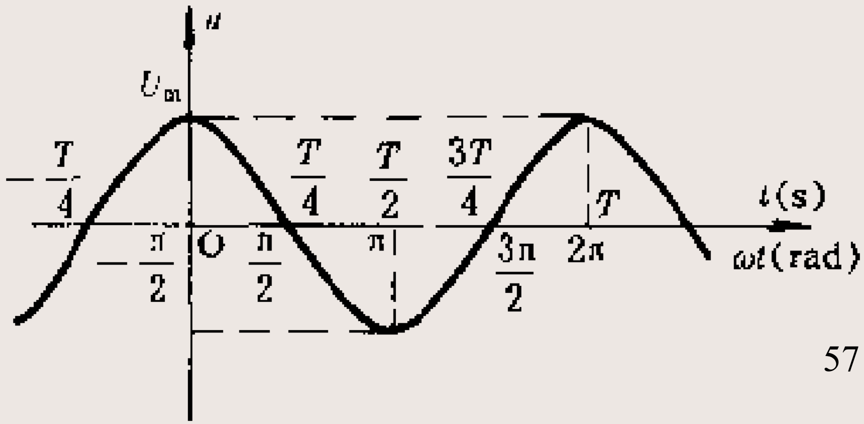
正弦电压和电流

- 随时间按正弦规律变化的电压和电流称为正弦电压和正弦电流，它们属正弦波，正弦波是周期波形的基本形式。
- 正弦规律即简谐规律，采用cos函数。

$$u(t) = U_m \cos \omega t$$

- 其中U_m为电压的振幅，它是一个常量，ωt是一个随时间变化的角度，ω则是一个与频率f有关的常量。为角频率，单位为弧度/秒。

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$



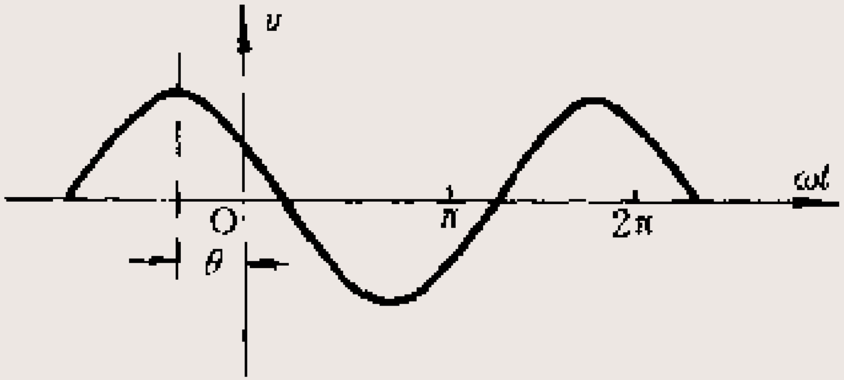
初相角

- 在一般情况下，时间的起点不一定恰好选在正弦波为正最大值的瞬间。
- 以角度来计量，时间起点选在离正弦波正最大值瞬间之后角θ处，即当ωt=-θ时，才有u=U_m。 因此，该正弦电压应表示为

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta)$$

- θ称为初相角，简称初相。它反映了正弦波初始值的大小，即

$$u(0) = U_m \cos(\theta)$$



相位

- 正弦波的表示式中的$(\omega t+\theta)$称为相位角，简称相位。不同的相位对应着不同的瞬时值。因此，相位表示了正弦波变化的进程。
- 正弦波的一般表示式可写成

$$
\begin{aligned}
u(t) &= U_m \cos(\omega t + \theta) \\
&= U_m \cos(2\pi f t + \theta) \\
&= U_m \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \theta\right)
\end{aligned}
$$

- 一个正弦波可由三个参数完全确定，这三个参数是：振幅、频率和初相，这三者称为正弦波的三要素。

相 量

- 从*RC*电路在正弦激励下响应的求解过程可知，求微分方程的特解是比较麻烦的。需要有一种简便的办法，用以求解右端为正弦时间因数的线性常系数微分方程的特解，这一方法就是相量法。
- 相量法是建立在用复数来表示正弦波的基础上的，也就是建立在欧拉恒等式的基础上的。

欧拉恒等式

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$\theta = \omega t$$

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$$

相量表示法

❖ 正弦电压可表示为

$$\cos \omega t = \mathrm{Re}\left[e^{j\omega t}\right]$$

$$\sin \omega t = \mathrm{Im}\left[e^{j\omega t}\right]$$

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta)$$

$$= \mathrm{Re}\left[U_m e^{j(\omega t+\theta)}\right] = \mathrm{Re}\left[U_m e^{j\theta} e^{j\omega t}\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[\dot{U}_m e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\dot{U}_m \angle \omega t\right]$$

❖电压振幅相量 $\dot{U}_m = U_m e^{j\theta} = U_m \angle \theta$

模为该正弦电压的振幅，辐角为该正弦电压的初相。

❖电流振幅相量记为 $\dot{I}_m$

正弦稳态分析

- 在正弦激励的动态电路中，若各电压、电流均为与激励同频率的正弦波，称为正弦稳态电路。
- 由于各个电压、电流响应与激励均为同频率的正弦波，因而它们都可以用相量来表示。正弦时间函数的分析问题可以简化为对相量的分析问题。
- 利用相量可以使微分方程的求解问题简化为复数方程的求解问题。正弦稳态分析就是运用相量的概念对正弦稳态电路进行分析。
- 引入阻抗和导纳这两个重要的概念，不仅能把电阻电路的分析方法推广应用于分析正弦稳态电路，还能表征元件和电路在正弦稳态时的性能。

有效值

❖ 设有两个相同的电阻R，分别通以周期电流i和直流电流I。当周期电流i流过电阻R时，该电阻在一个周期T内所消耗的电能为

$$\int_0^T p(t)dt = \int_0^T i^2 R dt = R\int_0^T i^2 dt$$

❖ 当直流电流I流过电阻R时，在相同的时间T内所消耗的电能为

$$PT = RI^2 T$$

❖ 令两式相等，可得到周期电流i的有效值的定义式：

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}$$

❖ 同理电压有效值

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2 dt}$$

正弦电流、电压的有效值

❖ 把有效值的定义式运用于正弦电流

$$i = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \cos^2(\omega t + \theta_i) dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \frac{I_m^2}{2}\left[\cos(2\omega t + 2\theta_i) + 1\right] dt}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} I_m = 0.707\, I_m$$

❖ 把有效值的定义式运用于正弦电压

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} U_m = 0.707 U_m$$

§8-2基尔霍夫定律的相量形式

❖ 设线性非时变电路在单一频率ω的正弦激励下(正弦电源可以有多个，但频率必须相同)进入稳态，各处的电压、电流都将为同频率的正弦波。在所有时刻，对任一节点KCL可表示为

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\left(\dot{I}_{km} e^{j\omega t}\right) = 0$$

其中 $\dot{I}_{km} = I_{km} e^{j\theta_k}$ 为第k条支路电流i_k的振幅相量。

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{I}_{km} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=1}^{n} \dot{I}_{k} = 0$$

基尔霍夫定律电压定律

❖ KVL可表示为

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{U}_{km} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=1}^{n} \dot{U}_{k} = 0$$

❖ 在正弦稳态电路中，基尔霍夫定律可直接用电流相量和电压相量写出，也可直接用电流振幅相量和电压振幅相量写出。

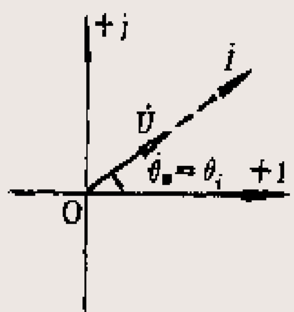
基本元件的v-i相量形式

- 在关联参考方向下，线性非时变电阻、电容及电感元件的伏安关系分别为

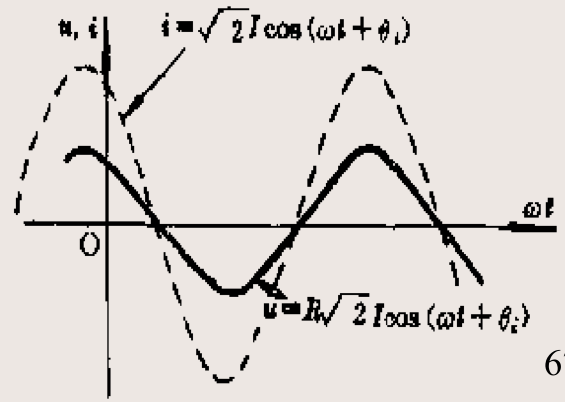
$$u = Ri \qquad i = C\frac{du}{dt} \qquad u = L\frac{di}{dt}$$

- 在正弦稳态电路中，这些元件的电压、电流都是同频率的正弦波。
- 电阻伏安关系为 $\sqrt{2}U\cos(\omega t + \theta_u) = R \times \sqrt{2}I\cos(\omega t + \theta_i)$

由于R是常数，该式子表明电阻两端的正弦电压和流过的正弦电流是同相的。



(b)



电阻的相量关系式

❖ 电阻的相量关系式

$$\mathrm{Re}\left(\sqrt{2}\,\dot{U}\,e^{j\omega t}\right) = R\,\mathrm{Re}\left(\sqrt{2}\,\dot{I}\,e^{j\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(\sqrt{2}R\,\dot{I}\,e^{j\omega t}\right)$$

$$\sqrt{2}\,\dot{U} = \sqrt{2}R\,\dot{I} \qquad \dot{U} = R\,\dot{I} \qquad U\angle\theta_u = RI\angle\theta_i$$

$$U = RI \qquad \theta_u = \theta_i$$

电容的相量关系式

❖ 电容的相量关系式

$$\mathrm{Re}\left(\sqrt{2}\,\dot{I}\,e^{j\omega t}\right)=C\frac{d}{dt}\left[\mathrm{Re}\left(\sqrt{2}\,\dot{U}\,e^{j\omega t}\right)\right]=C\,\mathrm{Re}\left[\frac{d}{dt}\sqrt{2}\,\dot{U}\,e^{j\omega t}\right]$$

$$=C\,\mathrm{Re}\left[j\omega\sqrt{2}\,\dot{U}\,e^{j\omega t}\right]=\mathrm{Re}\left[j\omega C\sqrt{2}\,\dot{U}\,e^{j\omega t}\right]$$

$$\sqrt{2}\,\dot{I}=j\omega C\sqrt{2}\,\dot{U} \qquad \dot{I}=j\omega C\,\dot{U}$$

❖ 这个式子包含了电容电压、电流时域关系的特征，它是正弦稳态分析的一个基本公式。

$$I\angle\theta_i=j\omega CU\angle\theta_u=\omega CU\angle\theta_u+90°$$

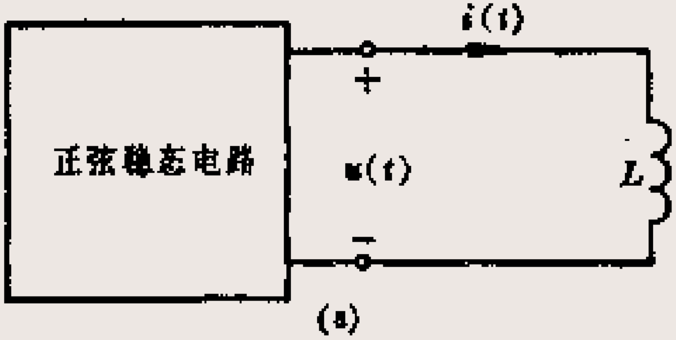
$$I=\omega CU \qquad \theta_i=\theta_u+90°$$

即电压、电流有效值的关系与C有关和角频率ω有关。

电感的相量关系式

❖ 由于电容和电感存在对偶关系，可根据电容*VAR*相量形式直接得到电感*VAR*相量形式

$$\dot{U} = j\omega L \dot{I}$$



$$U\angle\theta_u = j\omega LI\angle\theta_u = \omega LI\angle\theta_i + 90°$$

$$U = \omega LI \qquad\qquad \theta_u = \theta_i + 90°$$

阻抗和导纳 相量模型

- 三种基本元件*VAR*的相量形式，在关联参考方向时：

$$\dot{U}=R\dot{I} \qquad \dot{U}=\frac{1}{j\omega C}\dot{I} \qquad \dot{U}=j\omega L\dot{I}$$

- 如果我们把元件在正弦稳态时电压相量与电流相量之比定义为该元件的阻抗，记为*Z*，则

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}} \qquad \dot{U}=Z\dot{I}$$

欧姆定律的相量形式

$$Z_R=R$$

$$Z_C=\frac{1}{j\omega C}=-j\frac{1}{\omega C}$$

$$Z_L=j\omega L$$

祝大家考出好成绩

时间:12月26日上午9:45—11:20
地点:在2210、2211教室