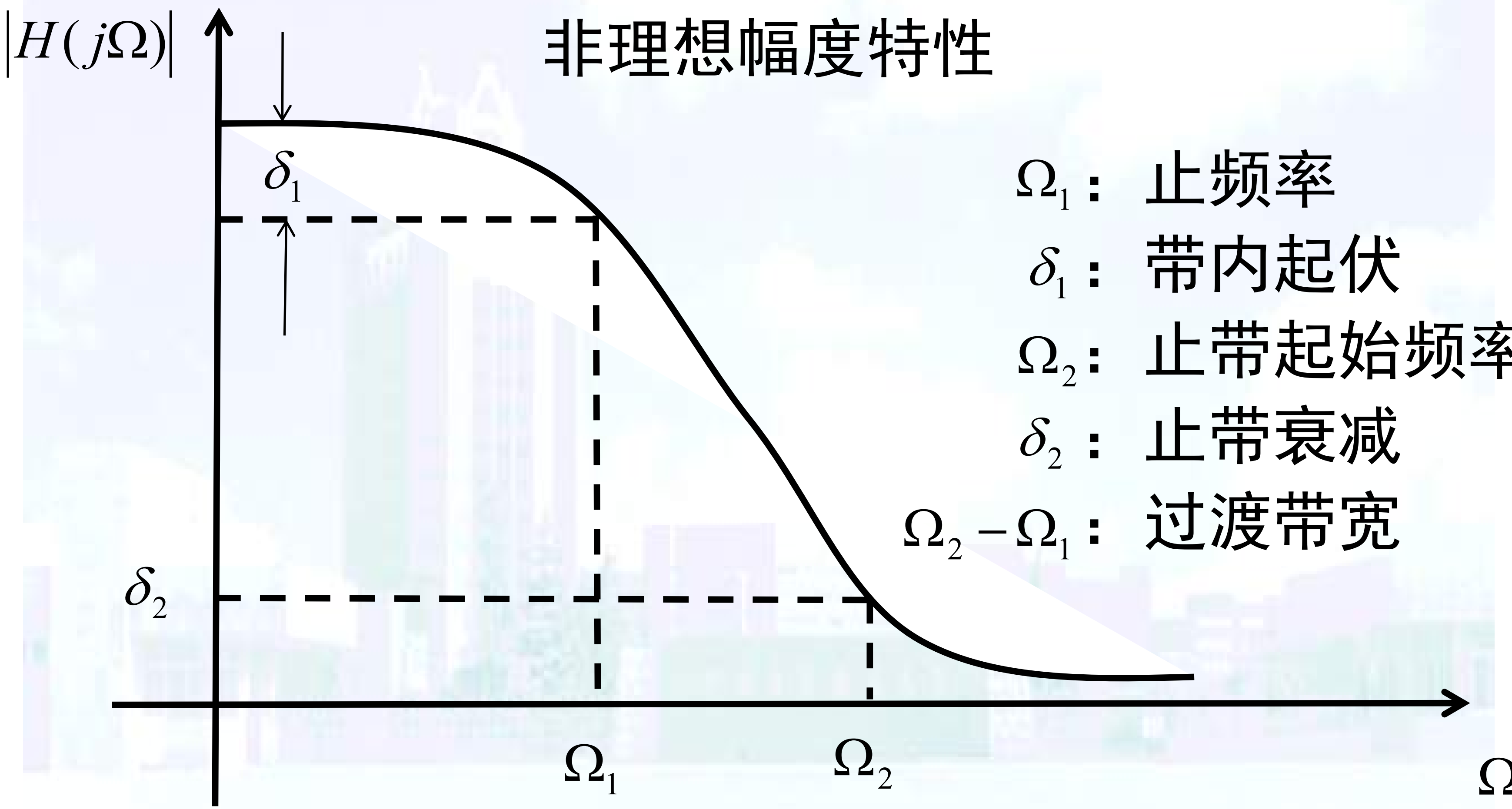
5 IIR数字滤波器设计



Ω_1：止频率

δ_1：带内起伏

Ω_2：止带起始频率

δ_2：止带衰减

$\Omega_2-\Omega_1$：过渡带宽

一般设计原则：构造满足要求的$H(z)$

IIR滤波器的基本设计思路：

1）间接设计：模拟滤波器 ⇨ 数字滤波器

2）直接设计：时域逼近，频域逼近

间接设计：模拟滤波器方式

a）选定模拟滤波器模型

Butterworth，Chebyshev

b）滤波器频域参数 → 滤波器模型参数

幅度平方函数 $A^2(\Omega)=\left|H_a(j\Omega)\right|^2$

得到系统函数 $H_a(s)$

c）变换 $H_a(s)\rightarrow H(z)$

1）冲激响应不变法

2）阶跃响应不变法

3）双线性变换法

5.2　模拟滤波器模型

一、Butterworth模型：幅度平方函数

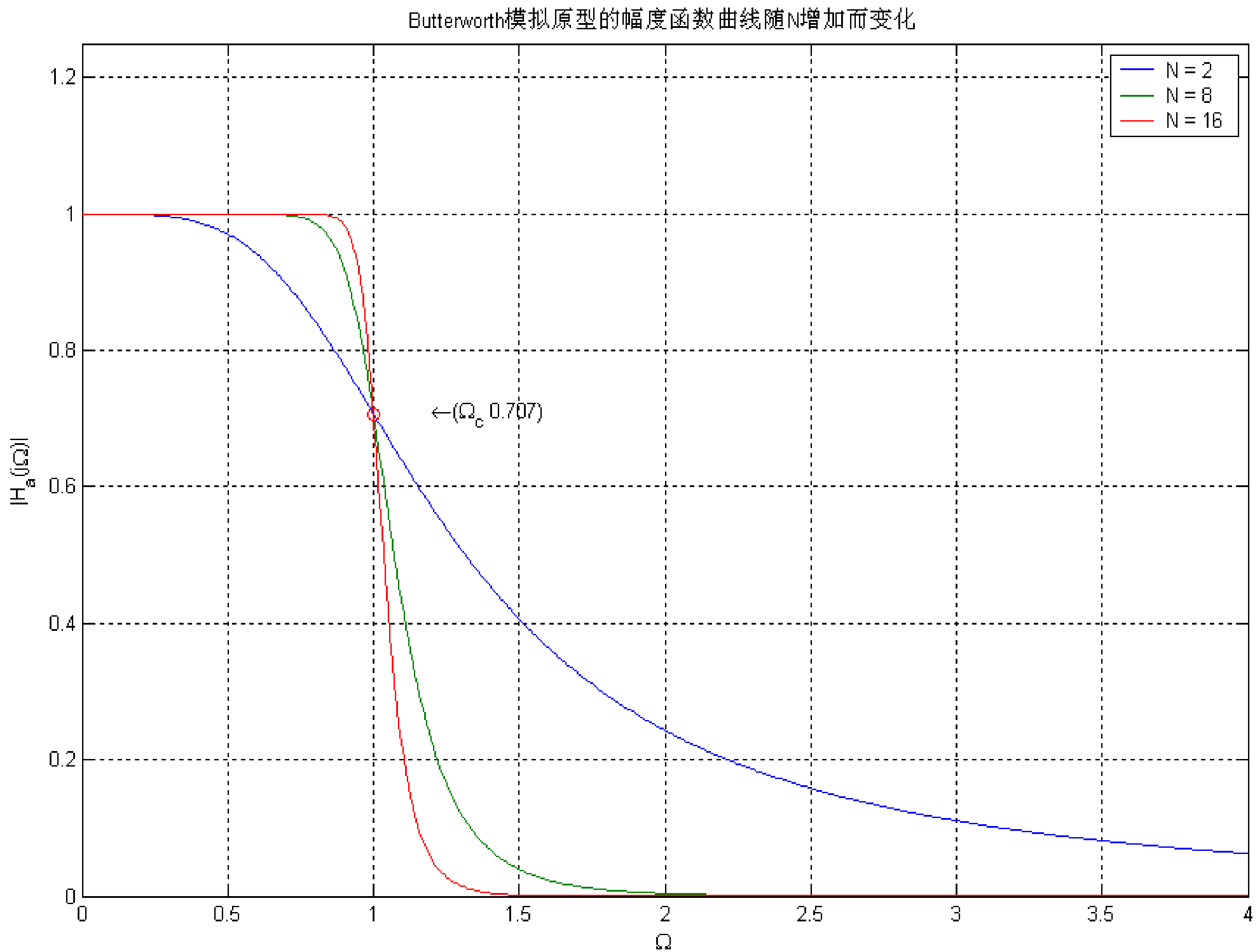
$$A^2(\Omega)=\frac{1}{1+\left(\dfrac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

参数： 系统阶数 N

截止频率Ωc，3dB带宽

$$A^2(\Omega_c)=\frac{1}{2}\text{，或}\ \left|H_a(j\Omega_c)\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$10\lg\left|H_a(j\Omega_c)\right|^2=10\lg\frac{1}{2}=-3.01\,\mathrm{dB}$$



1）通带、止带内均为单调衰减，通带内平坦特性较好

2）N较大，逼近理想的矩形频率特性

根据幅度平方模型，设计系统函数$H_a(s)$

$$\left|H_a(j\Omega)\right|^2 = A^2(\Omega) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

满足条件的系统函数$H(s)$应有

$$H_a(s)H_a^*(s)\Big|_{s=j\Omega} = \frac{1}{1+(s/j\Omega_c)^{2N}}\Bigg|_{s=j\Omega}$$

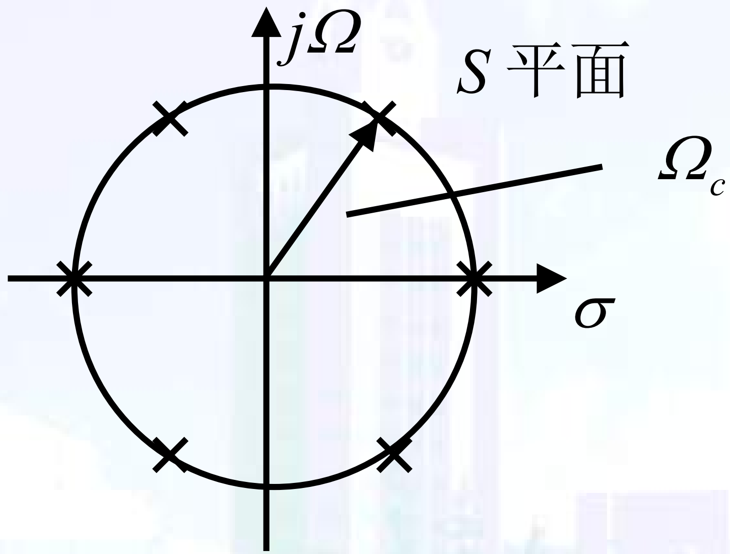
这里，$\dfrac{1}{1+(s/j\Omega_c)^{2N}}$ 共有$2N$个极点：

$$s_k = \Omega_c e^{j(\frac{1}{2}+\frac{2k-1}{2N})\pi}, \quad k = 1, 2, \ldots\ 2N$$

即，$H_a(s)$应满足

$$H_a(s)H_a^*(s)\Big|_{s=j\Omega} = \prod_{k=1}^{2N} \frac{1}{s-s_k}\Bigg|_{s=j\Omega}$$

极点族s_k的分布特征：



$$s_k = \Omega_c e^{j\left(\frac{1}{2}+\frac{2k-1}{2N}\right)\pi}$$

$$k = 1, 2, \ \ldots \ 2N$$

1）在Butterworth圆上，等圆周角分布；

2）在左右平面各分布N个极点，关于虚轴对称，且在虚轴上没有极点；

3）关于实轴对称。

为保证系统因果稳定，取前N个极点构成$H_a(s)$

$$H_a(s)=\prod_{k=1}^{N}\frac{1}{s-s_k}\text{，}\quad s_k=\Omega_c e^{j\left(\frac{1}{2}+\frac{2k-1}{2N}\right)\pi}$$

极点均位于左半平面，虚轴上无极点

考查$H_a(s)$的幅度平方特性

$$\left|H_a(j\Omega)\right|^2 = H_a(s)H_a^*(s)\Big|_{s=j\Omega}$$

极点关于实轴对称，$h(t)$为实函数，则

$$H_a^*(s) = H_a(s^*)$$

$$\therefore \quad \left|H_a(j\Omega)\right|^2 = H_a(s)H_a(s^*)\Big|_{s=j\Omega}$$

$$\left|H_a(j\Omega)\right|^2 = H_a(s)H_a(s^*)\Big|_{s=j\Omega}$$

$$= H_a(j\Omega)H_a(-j\Omega)$$

$$= \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{j\Omega - s_k} \cdot \frac{1}{-j\Omega - s_k}, \quad s_k = \Omega_c e^{j\left(\frac{1}{2}+\frac{2k-1}{2N}\right)\pi}$$

$$= \frac{1}{1+(\Omega / j\Omega_c)^{2N}} = A^2(\Omega)$$

如此构造的$H(s)$ 幅度特性服从Butterworth模型。

模型参数：N，Ω_c

① 系统阶数N

通带截止频率Ω_1以及对应的起伏δ_1

止带起始频率Ω_2以及对应的衰减δ_2

$$N=\frac{1}{2}\cdot\frac{\lg\dfrac{10^{\delta_2/10}-1}{10^{\delta_1/10}-1}}{\lg\dfrac{\Omega_2}{\Omega_1}}$$

② 3dB衰减点Ω_c（不是通带截止频率Ω_1）

$$\Omega_c = \frac{\Omega}{(10^{\delta/10}-1)^{1/2N}}$$

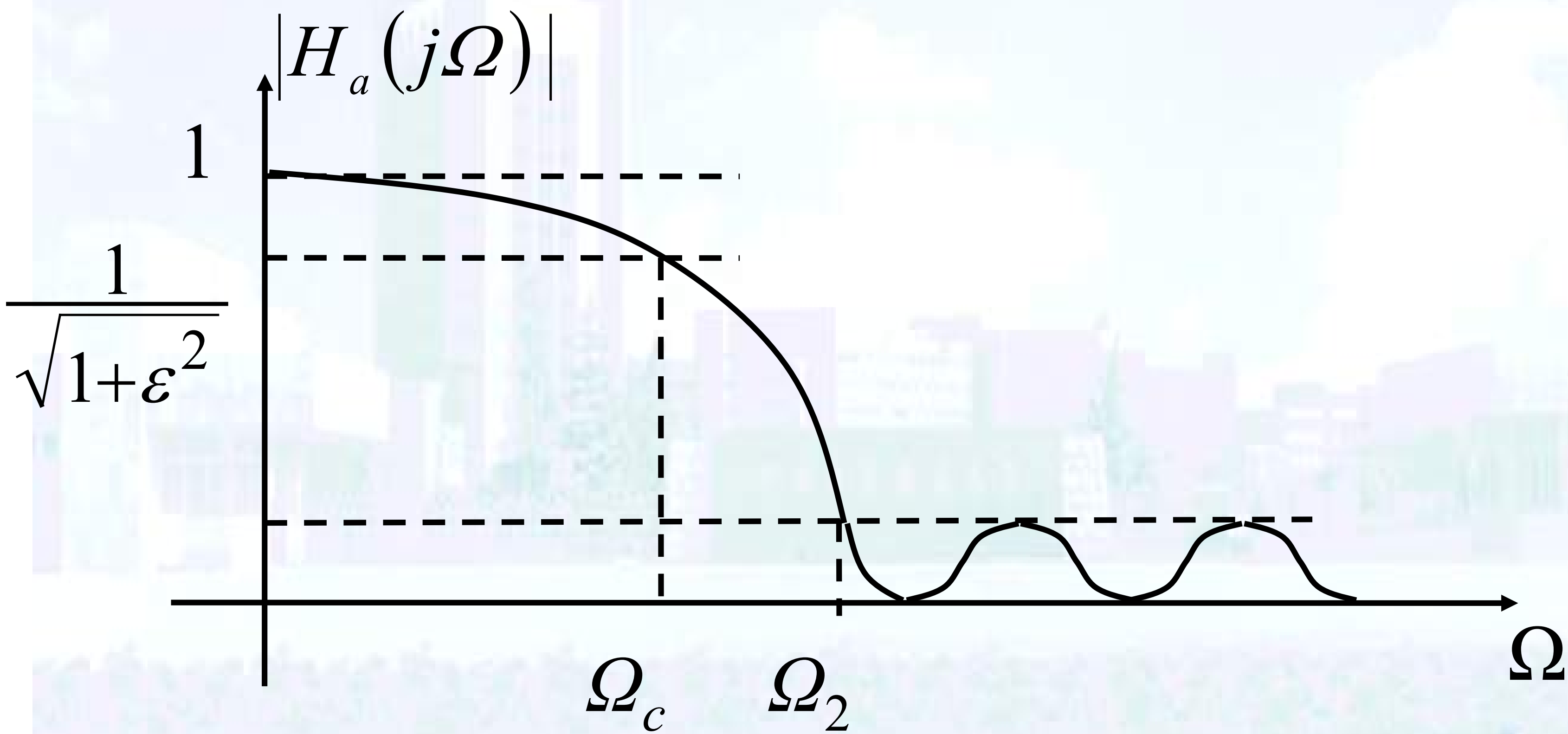
式中Ω是衰减δ所对应的频率点，可以由通带Ω_1/δ_1或止带Ω_2/δ_2分别确定。

当N的计算值带有小数并取整，会得到两个不同的Ω_c值，通常可以折中选取。

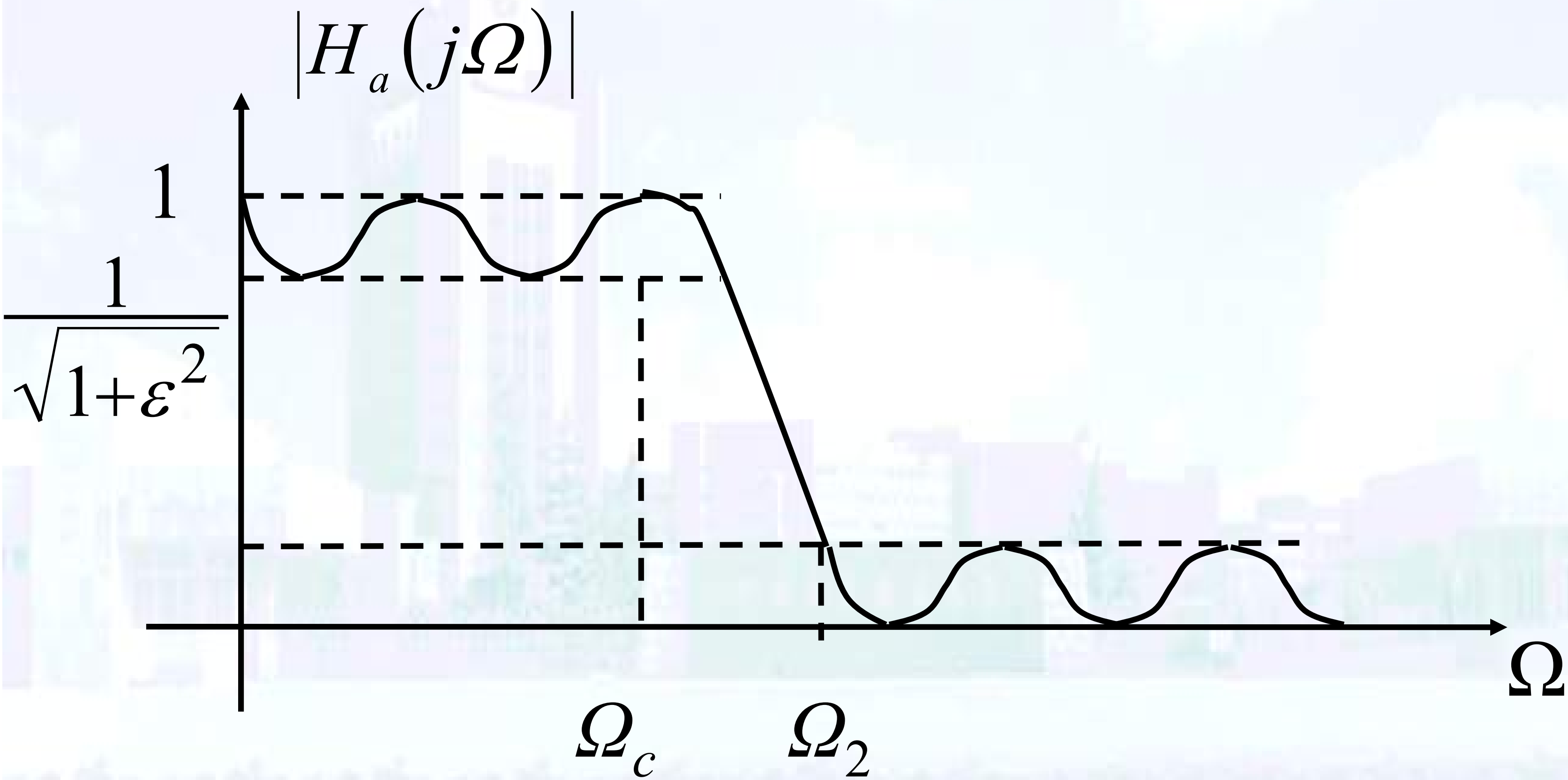
wei@ustc.edu.cn

二、Chebyshev滤波器

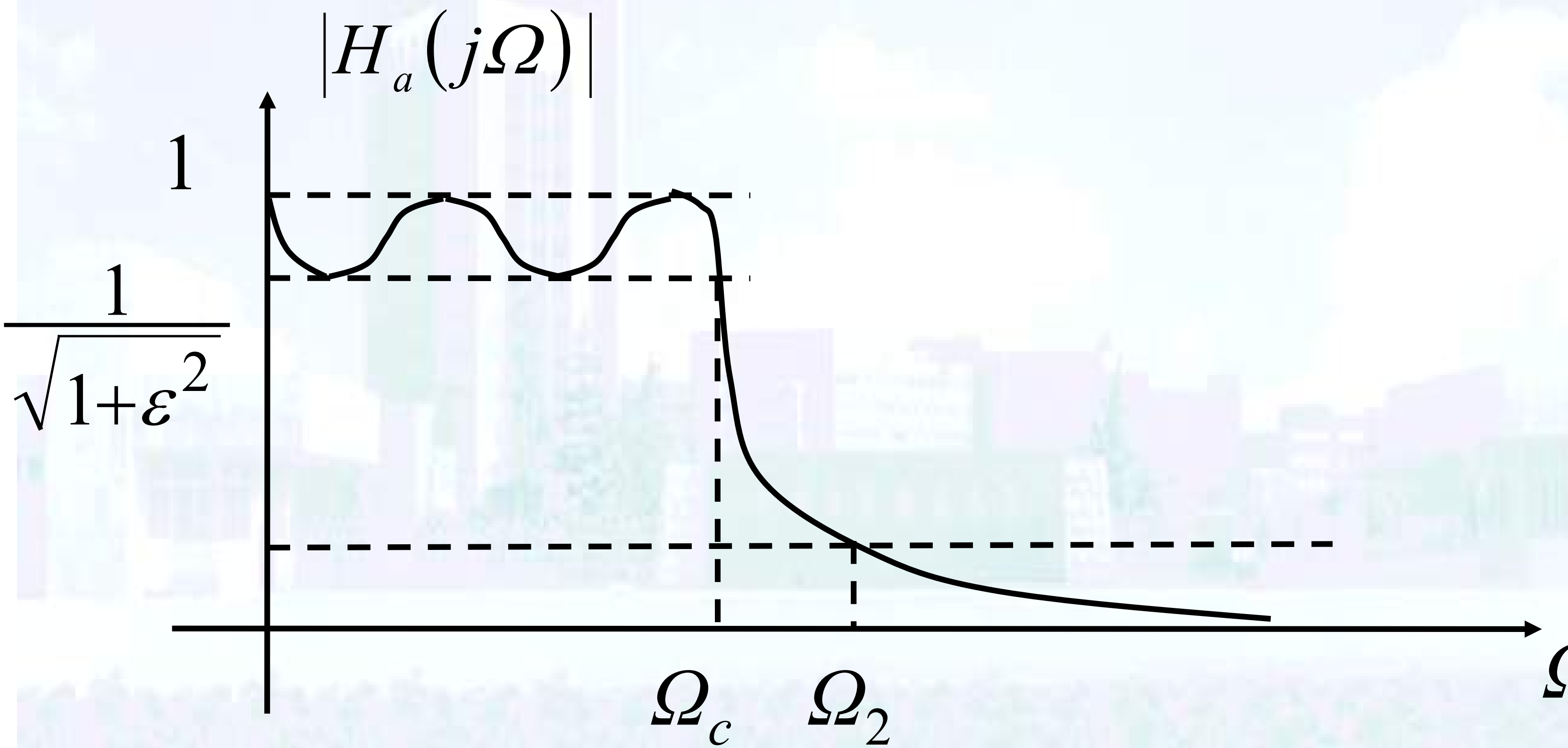
II型：通带内单调衰减，止带等波纹波动



椭圆滤波器：通带、止带均等波纹



I型：通带内等波纹波动，止带单调衰减



幅度平方函数 $A^2(\Omega)=\dfrac{1}{1+\varepsilon^2 C_N^2(\dfrac{\Omega}{\Omega_c})}$

$C_N(x)$，N 阶Chebyshev多项式：

$$C_N(x)=\begin{cases}\cos(N\cos^{-1}x) & 0<x<1\\ \mathrm{ch}(Nch^{-1}x) & x\geq 1\end{cases}$$

递推表达，$C_0(x)=1$

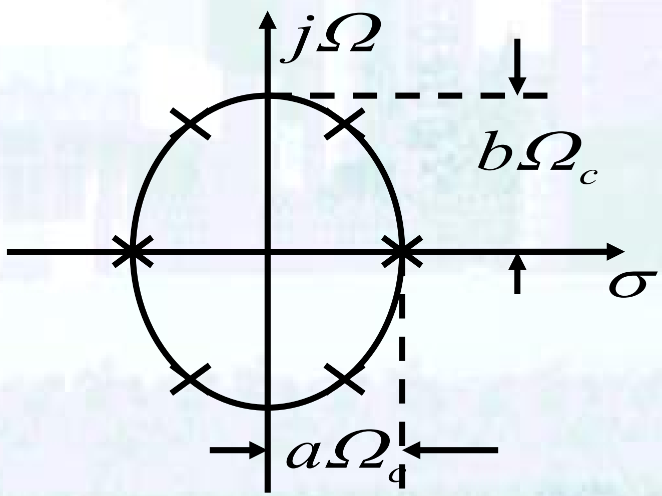
$C_1(x)=x$

$C_{N+1}(x)=2xC_N(x)-C_{N-1}(x)$

根据Chebyshev模型，设计系统函数$H_a(s)$

$$\left|H_a(j\Omega)\right|^2 = A^2(\Omega) = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)}\Bigg|_{s=j\Omega}$$

极点分布：共$2N$个极点，关于实轴σ和虚轴$j\Omega$对称分布。



$$a = \frac{1}{2}\left(\alpha^{\frac{1}{N}} - \alpha^{-\frac{1}{N}}\right)$$

$$b = \frac{1}{2}\left(\alpha^{\frac{1}{N}} + \alpha^{-\frac{1}{N}}\right)$$

$$\alpha = \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1}$$

取左半平面的N个极点，构成$H_a(s)$

$$H_a(s)=\prod_{k=1}^{N}\frac{1}{s-s_k}$$

$$S_k=(-a\sin\theta_k+jb\cos\theta_k)\,\Omega_c$$

$$\theta_k=\frac{2k-1}{2N}\pi \qquad k=1,2,\ldots,N$$

系统稳定、因果

模型参数：ε， Ω_c， N

①根据通带波纹δ_1计算 ε

$$\delta = 20\lg\frac{\left|H_a(j\Omega)\right|_{\max}}{\left|H_a(j\Omega)\right|_{\min}} = 10\lg(1+\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = (10^{\delta/10} - 1)^{1/2}$$

②根据设计要求指定通带截止频率$\Omega_c = \Omega_1$

与Butterworth不同， Ω_c所对应的衰减点，不一定是3 dB点

③根据止带衰减 δ_2 和止带起始频率 Ω_2 计算 N

$$N=\frac{\mathrm{ch}^{-1}\left[\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{A^2(\Omega_2)}-1}\right]}{\mathrm{ch}^{-1}(\frac{\Omega_2}{\Omega_1})}$$

试算法：Ω_2，Ω_1，ε为固定值，取不同的N值进行试算，直到满足止带衰减条件

$$-20\lg\left|H_a(j\Omega_2)\right|\geq\delta_2$$

$$20\lg\left|H_a(j\Omega_2)\right|\approx-20\lg\varepsilon-20\lg\mathrm{C}_N\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)$$

5.3　基本变换方法

一、冲激响应不变法

定义：$H_a(s)$ 模拟滤波器系统函数

$h_a(t)$ 模拟滤波器冲激响应

准则：$$h(n) = h_a(t)\big|_{t=nT}$$

$$H(z) = Z[h(n)] = Z\left[h_a(t)\big|_{t=nT}\right]$$

思路：$H_a(s) \rightarrow h_a(t) \rightarrow h(n) \rightarrow H(z)$

将 $H_a(s)$ 用部分分式表示：

$$H_a(s)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{s-s_k}$$

根据拉氏变换的性质，得到相应的冲激响应为：

$$h_a(t)=\sum_{k=1}^{N}A_k e^{s_k t}u(t)$$

则 $h(n)=h_a(nT)$

$$=\sum_{k=1}^{N}A_k\left(e^{s_kT}\right)^n u(n)$$

$$\therefore \quad H(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N}A_k\left(e^{s_kT}z^{-1}\right)^n$$

$$=\sum_{k=1}^{N}A_k\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{s_kT}z^{-1}\right)^n$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-e^{s_kT}z^{-1}}$$

$H(z)$所有参数用$H_a(s)$参数表达

$$H_a(s) \rightarrow \quad H(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-e^{s_kT}z^{-1}}$$

$H_a(s)$ 到 $H(z)$ 的映射关系：

① $H_a(s)$的极点S_k， $H(z)$的对应极点 $z_k=e^{s_kT}$

② 若$H_a(s)$是稳定的，则$H(Z)$也是稳定的

位于S左半平面的极点映射到Z平面单位圆内

③ $H_a(s)$ 的零点与 $H(z)$的零点没有明显的对应关系

$H(z)$与 $H_a(s)$之间的频率响应关系

$$\because \quad h(n) = h_a(t)\big|_{t=nT}$$

$$\therefore \quad H\left(e^{j\Omega T}\right) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} H_a\left[j\left(\Omega - m\Omega_s\right)\right]$$

若$H_a(s)$频带没有限制，存在混叠现象

当$H_a(s)$具有锐截止特性，且取样率足够高，混叠现象可以忽略：

$$H\left(e^{j\Omega T}\right)\approx\frac{1}{T}H_a\left(j\Omega\right)\qquad\qquad|\Omega|\le\frac{\pi}{T}$$

1）频域为线性变换关系

2）适用于低通和带通滤波器

基本流程

频域参数

↓ Butterworth Chebyshev，……

$H_a(s)$

↓ 拉氏变换

$h_a(t)$

↓ 取样t=nT

$h(n)$

↓ Z变换

$H(z)$ ← 用$H_a(s)$的部分分式和的参数表达

❑ Z变换与拉氏变换

$$z = e^{sT} \quad 或 \quad s = \frac{1}{T}\ln z$$

$$H(s) \Longleftrightarrow ? \Longleftrightarrow H(z)$$

$$s = \frac{1}{T}\ln z$$

5.3 基本变换方法

$$H(s) \overset{\text{抽样}}{\Longleftrightarrow} H_s(s) \overset{L\text{变换}}{\Longleftrightarrow} h_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\delta(t-nT) \overset{Z\text{变换}}{\Longleftrightarrow} H(z)$$

$$z=e^{sT}$$

$$H(s) \overset{L\text{变换}}{\Longleftrightarrow} h(t) \overset{Z\text{变换}}{\not\Longleftrightarrow} H(z)$$

$$z\neq e^{sT}$$

wei@ustc.edu.cn

$$H(s) \longrightarrow H_s(s) \longrightarrow H(z)$$

$$\uparrow \text{抽样} \qquad\qquad \uparrow z = e^{sT}$$

结论：对一般的$H(s)$，不存在这样的变换关系

$z = e^{sT}$ 使得 $H(s) \to H(z)$

wei@ustc.edu.cn

二、阶跃响应不变法

定义：$y_s(n)$，数字滤波器的单位阶跃响应

$y_{sa}(t)$，模拟滤波器的单位阶跃响应

准则：$$y_s(n)=y_{sa}(t)\big|_{t=nT}$$

$$Z[y_s(n)]=H(z)\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}, \qquad \frac{1}{1-z^{-1}}=Z[u(n)]$$

$$H(z)=\left(1-z^{-1}\right)Z[y_s(n)]$$

思路：$H_a(s)\rightarrow y_{sa}(t)\rightarrow y_s(n)\rightarrow Y_s(z)\rightarrow H(z)$

$$Y_{sa}(s)=L[y_{sa}(t)]=H_a(s)\cdot\frac{1}{s}\qquad \frac{1}{s}=L[u(t)]$$

设$H_a(s)$可以表达为部分分式和 $H_a(s)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{s-s_k}$

则 $$\frac{1}{s}H_a(s)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{s(s-s_k)}$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{s_k}\left(\frac{1}{s-s_k}-\frac{1}{s}\right)$$

由拉氏变换的性质：

$$y_{sa}(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s}H_a(s)\right]=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{s_k}\left(e^{s_k t}-1\right)u(t)$$

$$Z\left[y_{sa}(t)\big|_{t=nT}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{s_k}\left(e^{S_k nT}-1\right)z^{-n}$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{s_k}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{S_k nT}\cdot z^{-n}-z^{-n}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{s_k}\left(\frac{1}{1-e^{S_k T}\cdot z^{-1}}-\frac{1}{1-z^{-1}}\right)$$

$$Y_s(z) = Z[y_s(n)] = H(z) \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$\therefore \quad H(z) = \left(1 - z^{-1}\right) Z[y_s(n)]$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s_k} \cdot \frac{e^{S_k T} - 1}{z - e^{S_k T}}$$

系统函数极点分布与冲激响应不变法相似

频率响应：

$$H\left(e^{j\Omega T}\right)=\left(1-e^{-j\Omega T}\right)\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{j\left(\Omega-m\Omega_{s}\right)}H_{a}\left[j\left(\Omega-m\Omega_{s}\right)\right]$$

阶跃响应不变法仍有频谱混叠问题，但幅度响应随Ω的增加，有 6dB/倍频程的衰减。

若$H_a(j\Omega)$ 是带限的，则

$$H\left(e^{j\Omega T}\right)=\frac{1-e^{-j\Omega T}}{j\Omega T}H_a\left(j\Omega\right)$$

与原型滤波器相比，频率响应有畸变

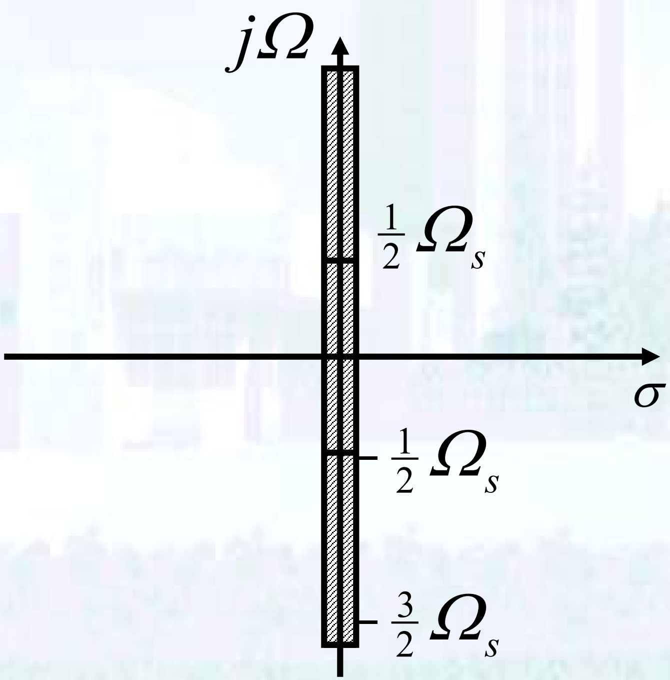
当$\Omega T<<1$ 时，

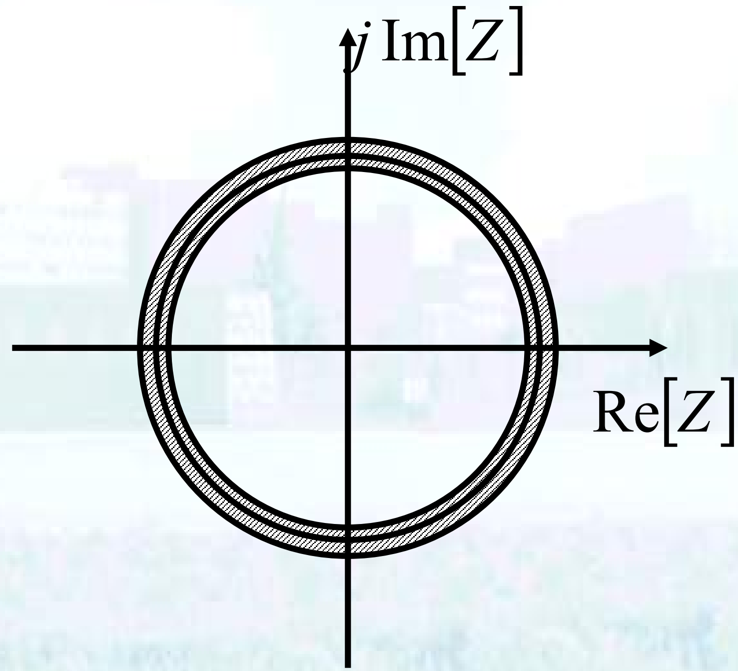
$$H\left(e^{j\Omega T}\right)\approx H_a\left(j\Omega\right)$$

在低频端有较好地近似

频谱混叠现象：冲激响应不变法和阶跃响应不变法均建立在时域取样基础上

原因：经过取样，S平面的虚轴被周期性地分段映射到Z平面的单位圆上

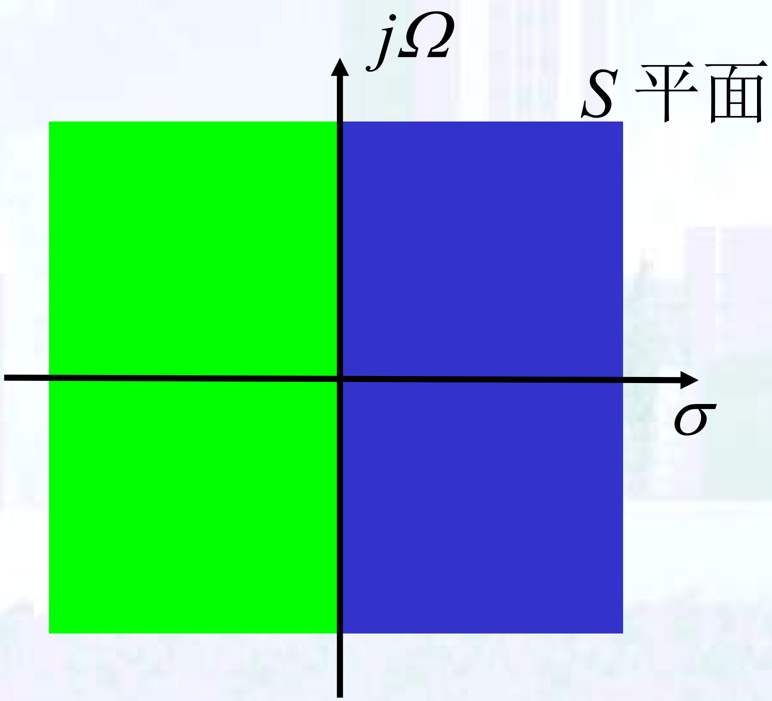


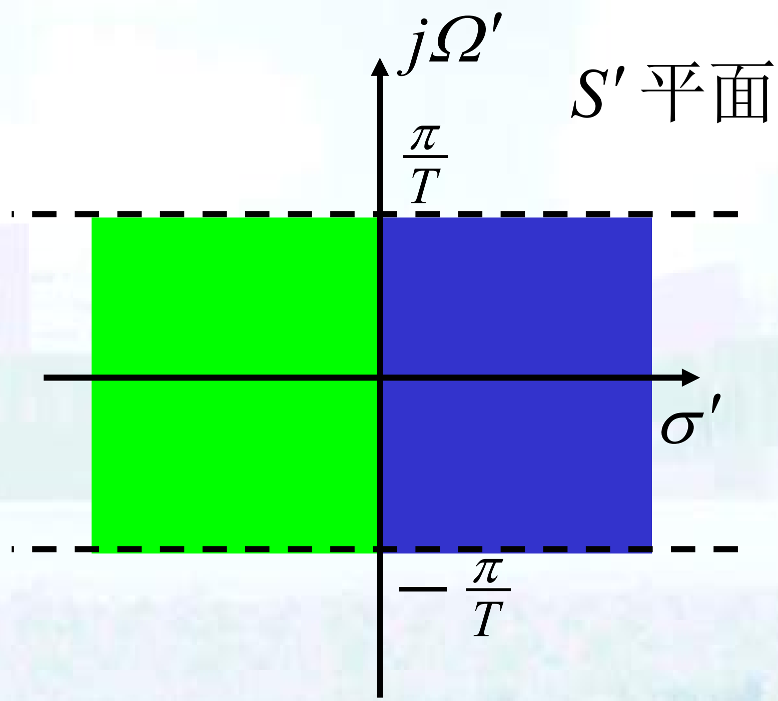


三、双线性变换法

避免变换引起的频谱混迭

S平面全部 → S'平面有限区域 → Z平面





完成S平面 → S'平面的一种映射关系：

$$s = C\frac{1-e^{-s'T}}{1+e^{-s'T}} \qquad C\text{为任意常数}$$

$$\Omega = C \cdot tg\frac{\Omega' T}{2}$$

S 左半平面 $\longleftrightarrow$ S' 左半平面

S 右半平面 $\longleftrightarrow$ S' 右半平面

$$-\infty < \Omega < +\infty \longleftrightarrow -\frac{\pi}{T} < \Omega' < \frac{\pi}{T}$$

S’平面映射到 Z 平面

$$z = e^{s'T}$$

S’平面上的窄区间 $-\frac{\pi}{T} < \Omega' < \frac{\pi}{T}$ 被映射到整个Z平面上

则，原S平面与Z平面最终的映射关系为：

$$s = C\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad \text{或} \quad z = \frac{C+s}{C-s}$$

以 $s=\sigma+j\Omega$ 代入变换关系：

$$|z|=\sqrt{\frac{(C+\sigma)^2+\Omega^2}{(C-\sigma)^2+\Omega^2}}\quad,\qquad \Omega=C\cdot tg\frac{\omega}{2}$$

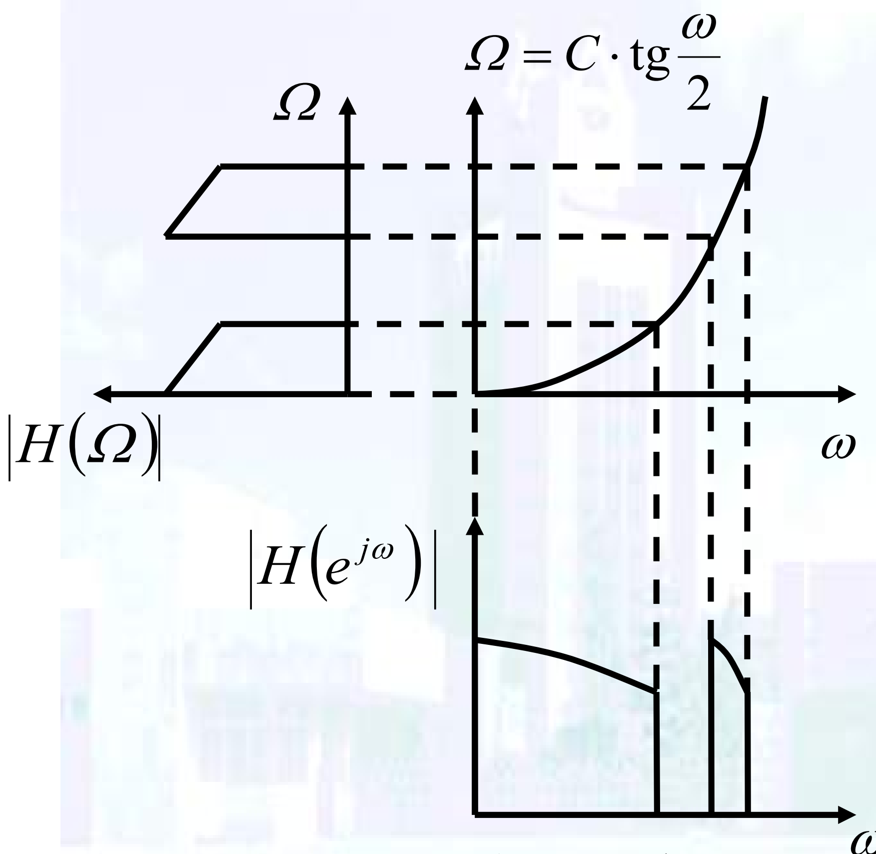
1) $\sigma=0$，$|z|=1$： $j\Omega\rightarrow$ Z平面单位圆上

2) $\sigma<0$，$|z|<1$： S左半平面 $\rightarrow$ Z平面单位圆内

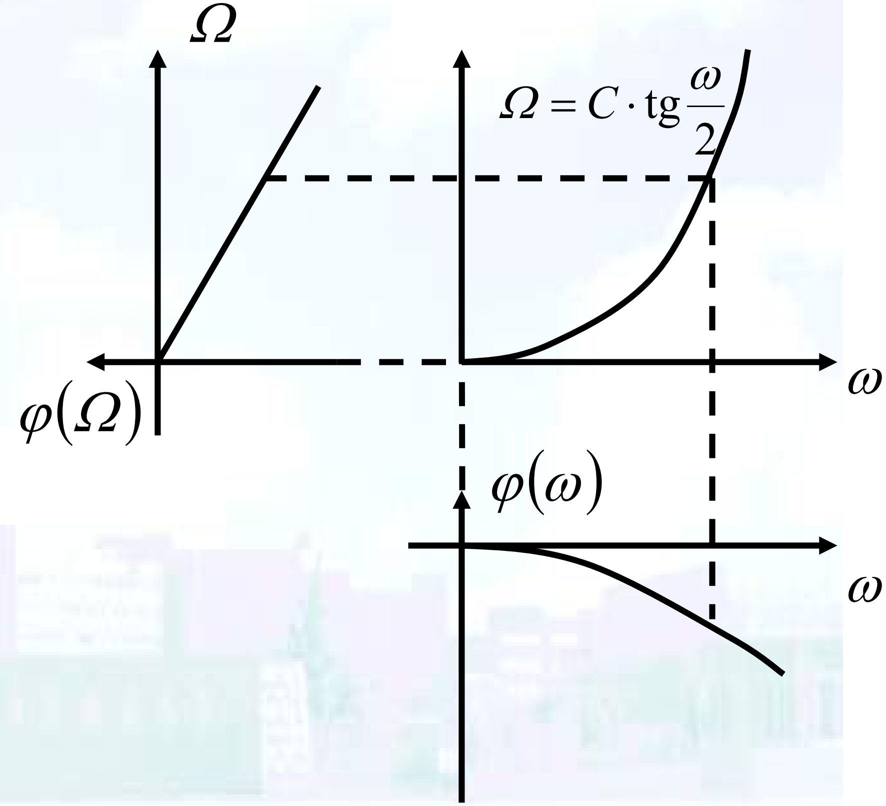
3) $\sigma>0$，$|z|>1$： S右半平面 $\rightarrow$ Z平面单位圆外

双线性变换的性质

- 单值映射
- 模拟滤波器 → 唯一的数字滤波器
- 极点数目不变
- 消除频谱混叠
- 幅度响应与相位响应非线性畸变


$\Omega = C \cdot \mathrm{tg}\frac{\omega}{2}$
Ω
$|H(\Omega)|$
ω
$|H(e^{j\omega})|$
ω

幅度畸变


Ω
$\Omega = C \cdot \mathrm{tg}\frac{\omega}{2}$
ω
$\varphi(\Omega)$
$\varphi(\omega)$
ω

相位畸变

5.4 设计实例

一、Butterworth滤波器

滤波器模型： Butterworth

变换方法：冲激响应不变法

通带截止频率 f_1=1.5kHz， 带内起伏δ_1=1dB

止带起始频率 f_2=4kHz， 带内衰减δ_2=15dB

取样频率 f_s=20kHz， T=5x10^{-5} s

通带截止频率Ω_1不是Butterworth截止频率 Ω_c，Ω_c为3 dB带宽

解：1）确定模拟滤波器指标

按要求，数字滤波器的频率响应满足，

通带 $$20\lg\frac{\left|H\left(e^{j0}\right)\right|}{\left|H\left(e^{j\Omega_1 T}\right)\right|}\le\delta_1$$

止带 $$20\lg\frac{\left|H\left(e^{j0}\right)\right|}{\left|H\left(e^{j\Omega_2 T}\right)\right|}\ge\delta_2$$

当 $|\Omega|<\frac{\pi}{T}$ 时有（忽略频谱混叠的影响）

$$H\left(e^{j\Omega T}\right)\approx\frac{1}{T}H_a(j\Omega)$$

代入上式，得模拟滤波器应满足的指标，

$$20\lg\frac{|H_a(j0)|}{|H_a(j\Omega_1)|}\le\delta_1 \qquad \Omega_1=2\pi f_1$$

$$20\lg\frac{|H_a(j0)|}{|H_a(j\Omega_2)|}\ge\delta_2 \qquad \Omega_2=2\pi f_2$$

2）计算模型参数（Butterworth）

$$\left|H_a(j\Omega)\right| = \left[\frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \left|H_a(j0)\right| = 1$$

$$\therefore \quad 20\lg\frac{\left|H_a(j0)\right|}{\left|H_a(j\Omega_1)\right|} = 10\lg\left[1+\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_c}\right)^{2N}\right] \le \delta_1$$

$$\therefore \quad 20\lg\frac{\left|H_a(j0)\right|}{\left|H_a(j\Omega_2)\right|} = 10\lg\left[1+\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_c}\right)^{2N}\right] \ge \delta_2$$

对不等式取等号以求解参数N，Ω_c

$$10\lg\left[1+\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_c}\right)^{2N}\right]=\delta_1 \qquad 10\lg\left[1+\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_c}\right)^{2N}\right]=\delta_2$$

解得 $$N=\frac{1}{2}\cdot\frac{\lg\dfrac{10^{\delta_2/10}-1}{10^{\delta_1/10}-1}}{\lg\dfrac{\Omega_2}{\Omega_1}}$$

数值计算：

$\delta_1=1$，$\delta_2=15$，$\Omega_1=2\pi\times1.5\times10^3$，$\Omega_2=2\pi\times4\times10^3$

得$N=2.43$，取$N=3$

确定Ω_c： 可分别按通带要求或止带要求，如果取N＝2.43，则两种计算结果相同

① 按通带，$10\lg\left[1+\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_c}\right)^{4.86}\right]=1$

解得 $\Omega_c=1.98\,k\cdot 2\pi$

② 按止带，$10\lg\left[1+\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_c}\right)^{4.86}\right]=15$

解得$\Omega_c=1.98\,k\cdot 2\pi$

如果取$N=3$，则两种计算结果不同：

① 按通带，$10\lg\left[1+\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_c}\right)^6\right]=1$ 解得 $\Omega_c=1.879\,k\cdot 2\pi$

在止带起始处：$10\lg\left[1+\left(\frac{4}{1.879}\right)^6\right]=19.73>15$

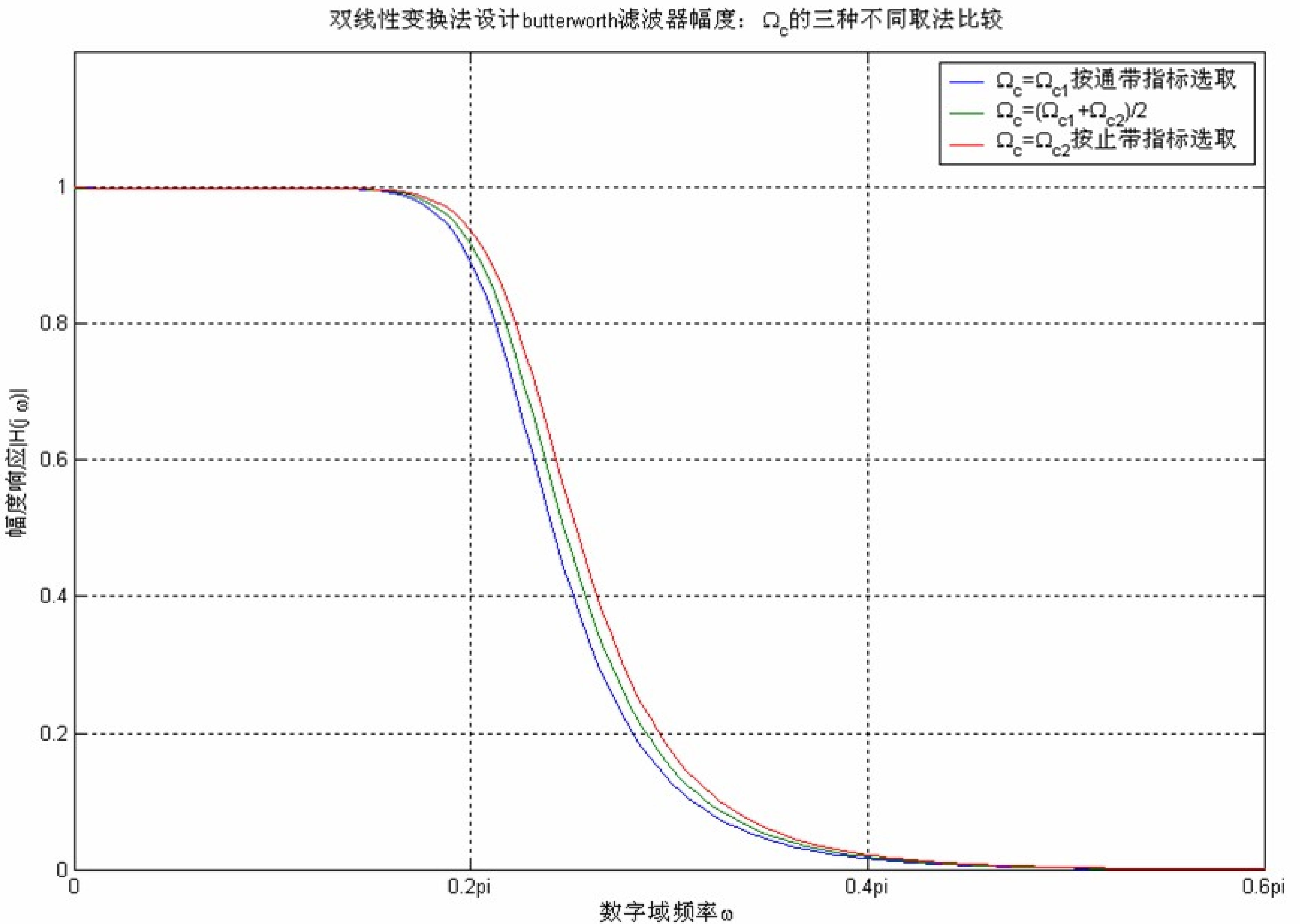
② 按止带，$10\lg\left[1+\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_c}\right)^6\right]=15$ 解得 $\Omega_c=2.26\,k\cdot 2\pi$

在通带截止频率处：$10\lg\left[1+\left(\frac{1.5}{2.26}\right)^6\right]=0.355<1$

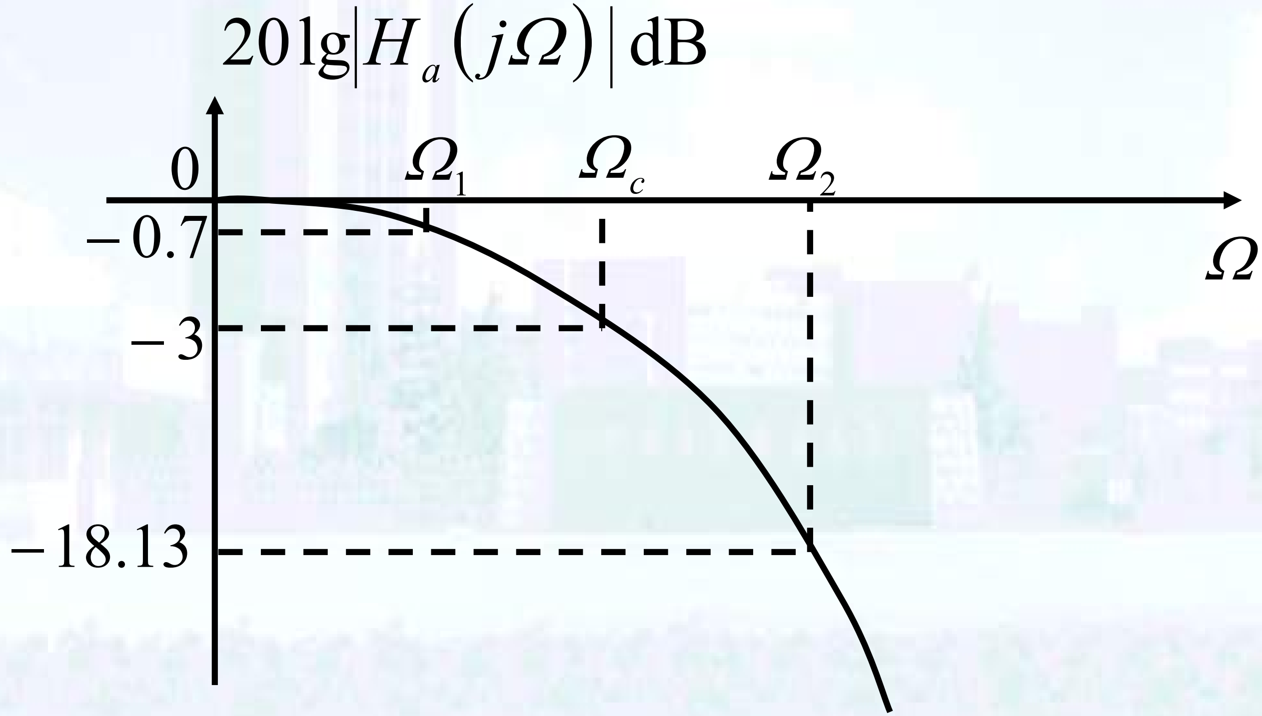
为使两边均有裕量，取中间值，$\Omega_c = 2k \cdot 2\pi$

则，通带 $10\lg\left[1+\left(\frac{1.5}{2}\right)^6\right] = 0.711 < 1$

止带 $10\lg\left[1+\left(\frac{4}{2}\right)^6\right] = 18.13 > 15$


双线性变换法设计butterworth滤波器幅度：Ωc的三种不同取法比较
Ωc=Ωc1按通带指标选取
Ωc=(Ωc1+Ωc2)/2
Ωc=Ωc2按止带指标选取
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
幅度响应|H(j ω)|
0
0.2pi
0.4pi
0.6pi
数字域频率ω

最后确定：
$$\begin{cases} N = 3 \\ \Omega_c = 2k \cdot 2\pi \end{cases}$$



3）求模拟系统函数 $H_a(s)$

$$s_1 = \Omega_c e^{j\frac{2}{3}\pi}，\ s_2 = -\Omega_c，\ s_3 = \Omega_c e^{-j\frac{2}{3}\pi}$$

$$H_a(s) = K_0 \cdot \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)}$$

$$|H_a(0)| = 1 \quad 得 \quad K_0 = \Omega_c^3$$

$$\therefore \quad H_a(s) = \frac{\Omega_c^3}{(s-\Omega_c e^{j\frac{2}{3}\pi})(s-\Omega_c e^{-j\frac{2}{3}\pi})(s+\Omega_c)}$$

将 $H_a(s)$ 作部分分式展开，

一般情况 $\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{s-s_i}=\sum_{i=1}^{N}\frac{c_i}{s-s_i}$， $c_i=\prod_{j\neq i}\frac{1}{s_i-s_j}$

得：

$$H_a(s)=$$

$$\Omega_c\cdot\left[\frac{1}{s+\Omega_c}+\frac{\frac{1}{-\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}}}{s-\Omega_c(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2})}+\frac{\frac{1}{-\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}}}{s-\Omega_c(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2})}\right]$$

4）进行脉冲响应不变的变换，$H(z)=$

$$\Omega_c\cdot\left[\frac{1}{1-z^{-1}e^{-\Omega_c T}}+\frac{\frac{1}{-\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}}}{1-z^{-1}e^{(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2})\Omega_c T}}+\frac{\frac{1}{-\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}}}{1-z^{-1}e^{(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2})\Omega_c T}}\right]$$

将$\Omega_c T=\frac{2}{20}\cdot 2\pi=0.6283$代入，经过整理，得，

$$H(z)=\Omega_c\left[\frac{1}{1-0.533z^{-1}}-\frac{1-0.843z^{-1}}{1-1.252z^{-1}+0.533z^{-2}}\right]$$

5）对数字滤波器进行验算，$fs=20kHz$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\Omega_c\cdot\left[\frac{1}{1-0.533e^{-j\omega}}-\frac{1-0.843e^{-j\omega}}{1-1.25e^{-j\omega}+0.533e^{-j\omega}}\right]$$

通带 $\omega_1=\frac{1.5}{20}\cdot 2\pi$ $\quad 20\lg\frac{\left|H\left(e^{j0}\right)\right|}{\left|H\left(e^{j\omega_1}\right)\right|}=0.70\,\mathrm{dB}<1\,\mathrm{dB}$

止带 $\omega_2=\frac{4}{20}\cdot 2\pi$ $\quad 20\lg\frac{\left|H\left(e^{j0}\right)\right|}{\left|H\left(e^{j\omega_2}\right)\right|}=18.2\,\mathrm{dB}>15\,\mathrm{dB}$

二、Chebyshev滤波器

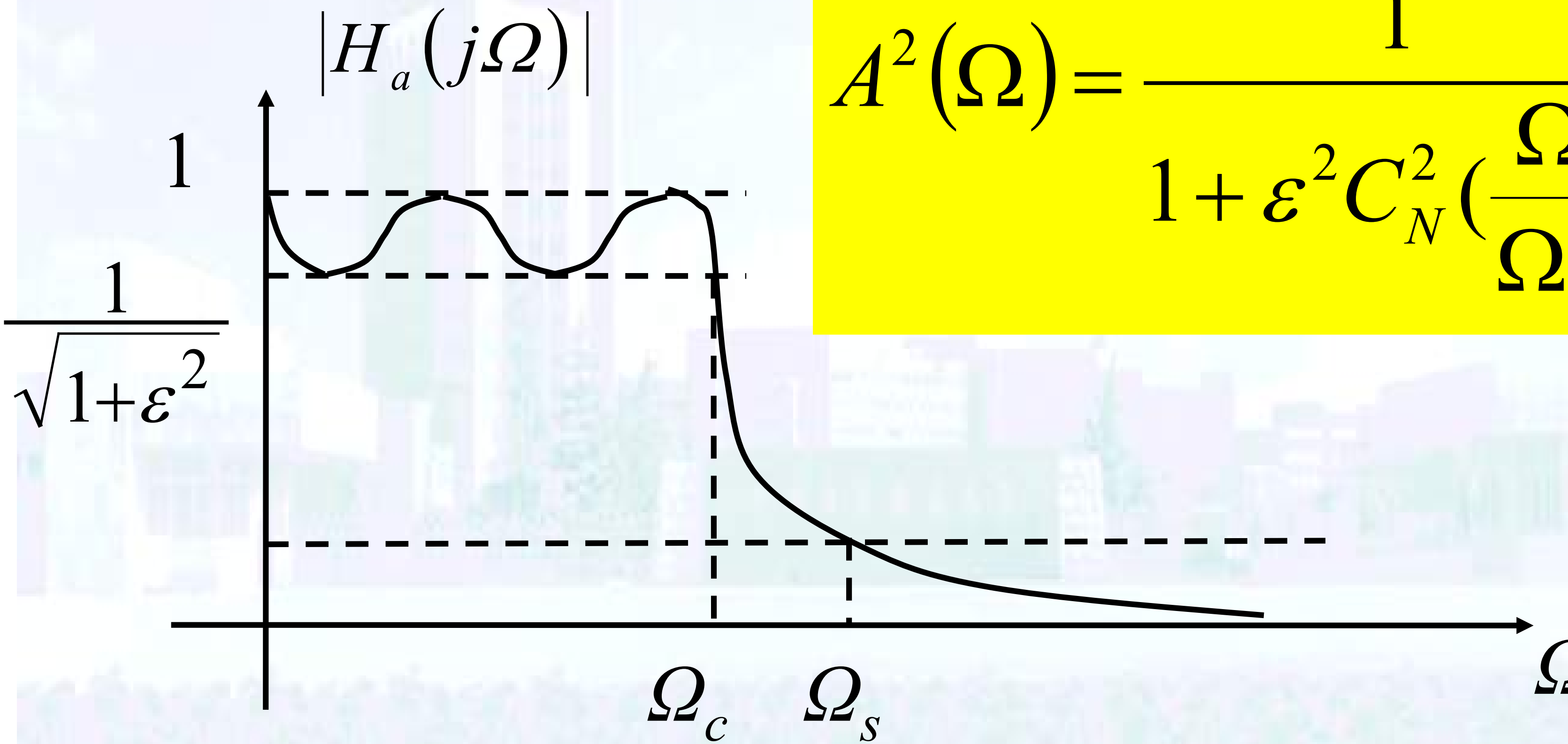
用双线性变换设计 Chebyshev 滤波器，指标同前：

$$f_1 = 1.5\,\text{kHz}\,, \qquad \delta_1 \le 1\,\text{dB}$$

$$f_2 = 4\ \ \text{kHz}\,, \qquad \delta_2 \ge 15\,\text{dB}$$

$$f_s = 20\,\text{kHz}$$

I型：通带内等波纹波动，止带单调衰减



$$A^2(\Omega)=\frac{1}{1+\varepsilon^2 C_N^2(\frac{\Omega}{\Omega_c})}$$

解：1）频率指标预畸

$$\Omega = c \cdot \mathrm{tg}\frac{\omega}{2} \quad ，\quad 取 \quad c=1$$

$$\Omega_1 = \mathrm{tg}\frac{\omega_1}{2} \qquad \omega_1 = \frac{f_1}{f_s}\cdot 2\pi = 0.15\pi$$

$$\Omega_2 = \mathrm{tg}\frac{\omega_2}{2} \qquad \omega_2 = \frac{f_2}{f_s}\cdot 2\pi = 0.4\pi$$

2）确定模型参数

① $\varepsilon = (10^{\delta_1/10} - 1)^{1/2} = 0.5088$

② $\Omega_c = \Omega_1 = \mathrm{tg}\dfrac{\omega_1}{2}$

③ 试算法确定滤波器阶数 N

$$10\lg\left[1+\varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_c}\right)\right]\geq\delta_2$$

当取 N=2 时，

$$10\lg\left[1+\varepsilon^2 C_2^2\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_c}\right)\right]=19\text{ dB}>15\text{ dB}$$

满足设计要求

故，模型参数为，
$$\begin{cases}\varepsilon=0.5088\\ \Omega_c=0.240\\ N=2\end{cases}$$

3）极点与系统函数

$$\alpha = \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1}$$

$$a = \frac{1}{2}\left(\alpha^{\frac{1}{2}} - \alpha^{-\frac{1}{2}}\right) \qquad b = \frac{1}{2}\left(\alpha^{\frac{1}{2}} + \alpha^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4} \ , \qquad \theta_2 = \frac{3\pi}{4}$$

$$S_{1,2} = \left(-a\sin\theta_1 \pm jb\cos\theta_1\right)\Omega_c$$

模拟滤波器$H_a(s)$系统函数

$$H_a(s)=\frac{K}{(s-s_1)(s-s_2)}$$

$$=\frac{K}{s^2+2a\Omega_c\sin\theta_1 s+(a^2\sin^2\theta_1+b^2\cos^2\theta_1)\Omega_c}$$

$$=\frac{K}{s^2+\sqrt{2}a\Omega_c s+\frac{1}{4}(\alpha+\alpha^{-1})\Omega_c^2}$$

4）确定归一化常数K

N为偶数，$|H_a(j0)|$在Ω=0 取得最小值 $\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$

$$\left|H_a(j0)\right| = \frac{K}{\frac{1}{4}(\alpha+\alpha^{-1})\Omega_c^2} = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

$$K = \frac{(\alpha+\alpha^{-1})\Omega_c^2}{4\sqrt{1+\varepsilon^2}} = 0.0566$$

$$H_a(s) = \frac{0.0566}{s^2+0.2636s+0.06355}$$

5）进行双线性变换 $s = c \cdot \dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

取 $c=1$，查表得：

$$H(z) = \frac{0.04268\ (1+2z^{-1}+z^{-2})}{1-1.411\,z^{-1}+0.6028\,z^{-2}}$$

6）验算

$\omega_1 = 0.15\pi$ 处， $-20\lg\left|H\left(e^{j\omega_1}\right)\right| = 1\,\mathrm{dB}$

$\omega_2 = 0.4\pi$ 处， $-20\lg\left|H\left(e^{j\omega_2}\right)\right| = 19\,\mathrm{dB}$

5.5 IIR滤波器频域变换法

数字高通，带通，带阻滤波器设计

基本方法:

1）*模拟低通⇨数字低通，高通，带通，带阻*

2）模拟低通⇨数字低通⇨数字高通，带通，带阻

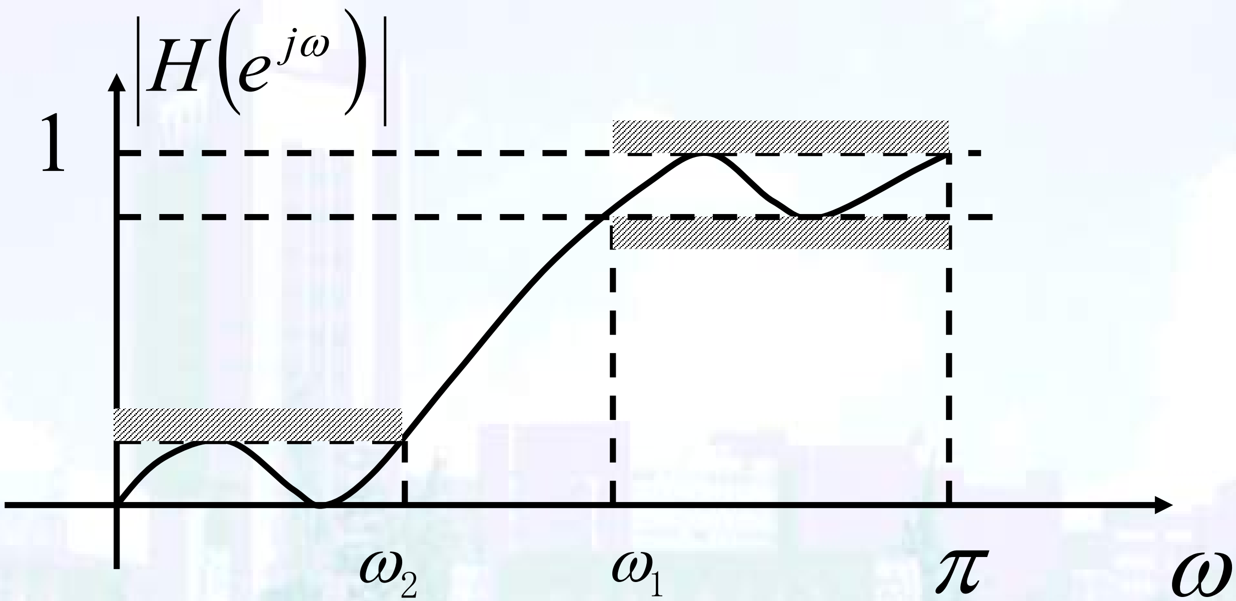
3）模拟低通⇨模拟低通，高通，带通，带阻

⇩ ⇩ ⇩ ⇩

数字低通，高通，带通，带阻

一、IIR数字高通滤波器设计

1）数字高通滤波器的幅度响应与设计规定



阻　带：$0 \sim \omega_2$，起伏δ_2

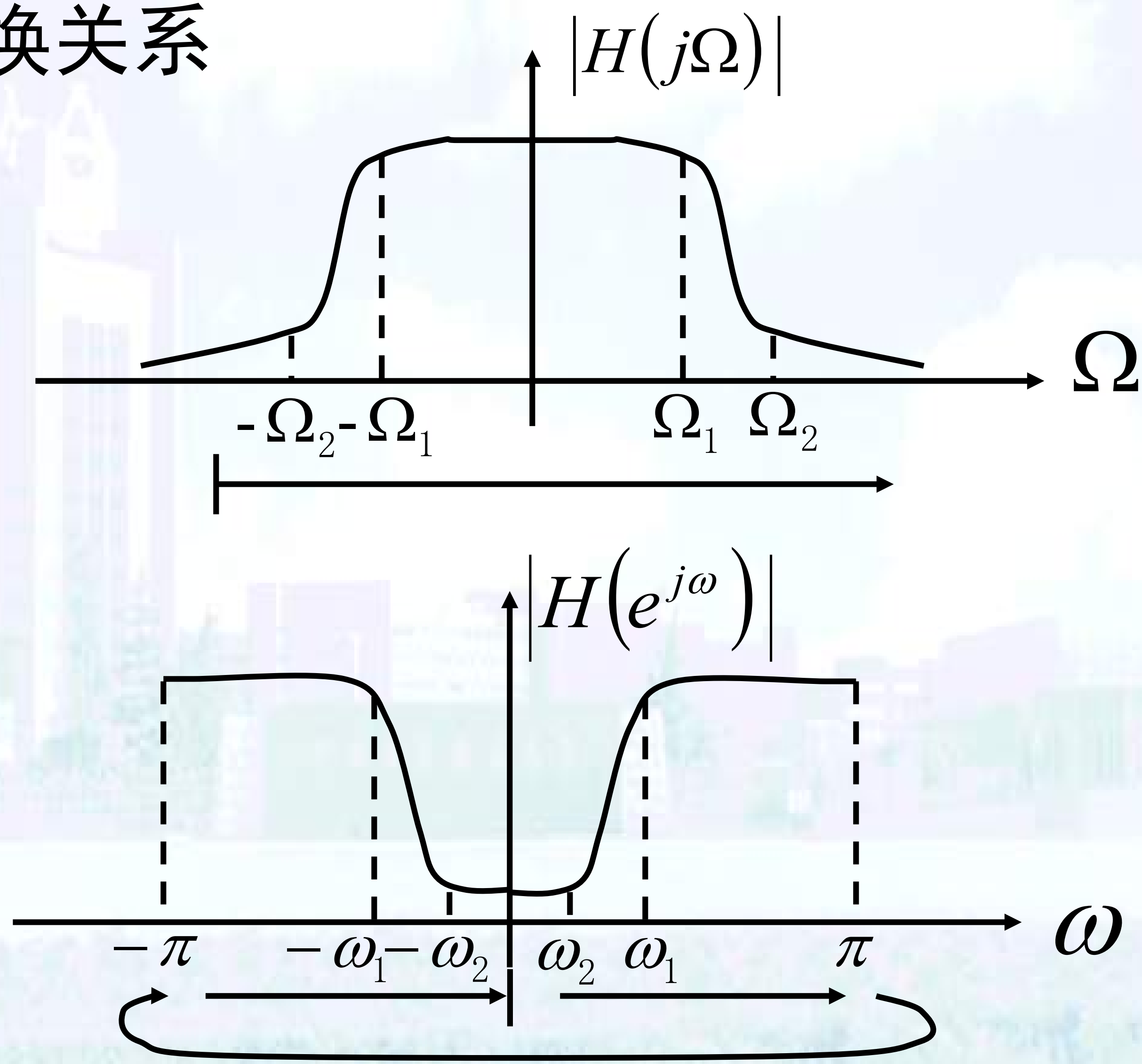
通　带：$\omega_1 \sim \pi$，起伏δ_1

过渡带：$\omega_2 \sim \omega_1$

2）频率变换关系

模拟低通

数字高通



模拟频率 $-\infty \to -\Omega_2 \to -\Omega_1 \to 0 \to \Omega_1 \to \Omega_2 \to \infty$

数字频率 $0 \to \omega_2 \to \omega_1 \to \pi, -\pi \to -\omega_1 \to -\omega_2 \to 0$

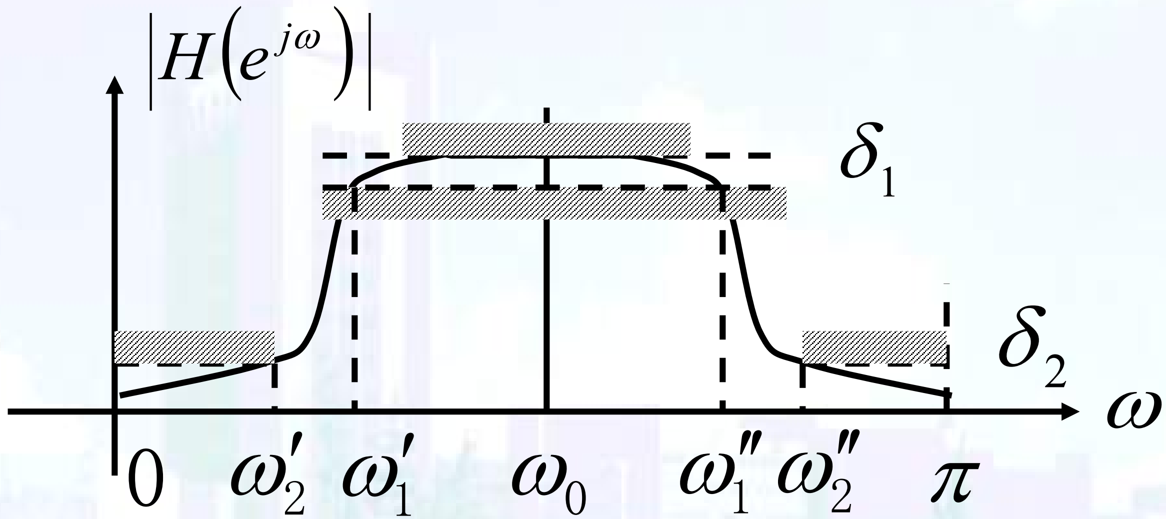
- S 虚轴⇨Z 单位圆
- S 左半平面⇨Z 单位圆内
- S 右半平面⇨Z 单位圆外
- 单值映射

$$\left.\begin{aligned} S &= C\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \\ \Omega &= -C \cdot \mathrm{ctg}\frac{\omega}{2} \end{aligned}\right\}$$

C 为任意正数

二、IIR数字带通滤波器设计

1）数字带通的频率响应与设计规定

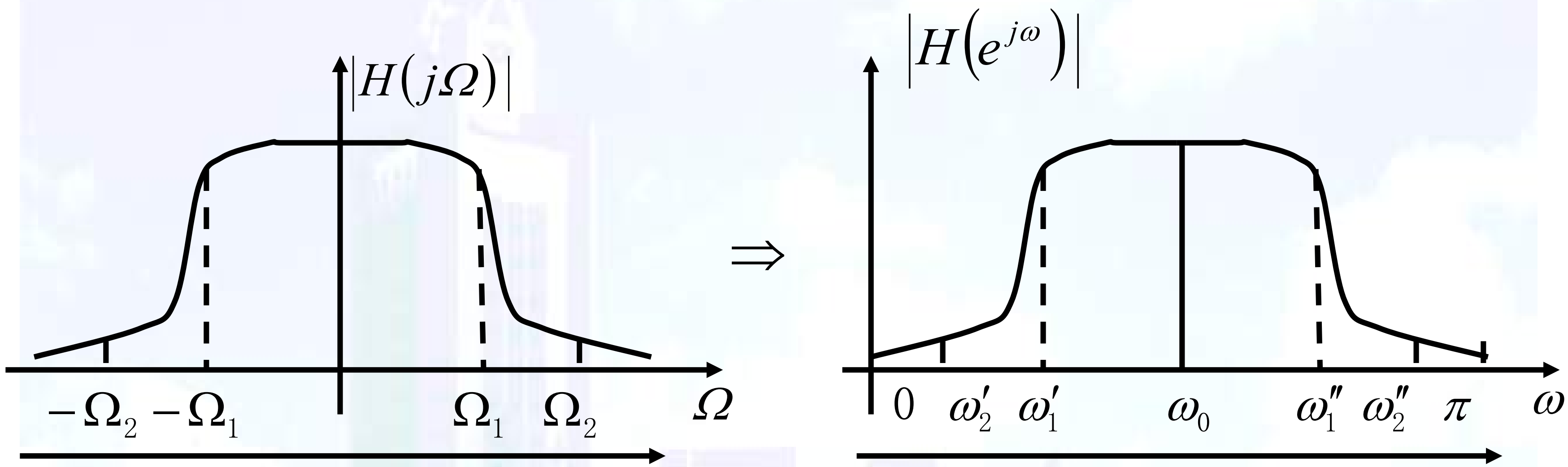


通带 $\omega_1' \sim \omega_1''$ 起伏 δ_1

止带 $0 \sim \omega_2'$，$\omega_2'' \sim \pi$ 起伏 δ_2

中心频率ω_0

2）映射关系



模拟频率Ω：　$-\infty \to -\Omega_2 \to -\Omega_1 \to 0 \to \Omega_1 \to \Omega_2 \to \infty$

数字频率 ω：　$0 \to \omega_2' \to \omega_1' \to \omega_0 \to \omega_1'' \to \omega_2'' \to \pi$

变换关系：

$$s=\alpha\cdot\frac{z^2-2\beta z+1}{z^2-1}$$

$$\Omega=\alpha\cdot\frac{\beta-\cos\omega}{\sin\omega}$$

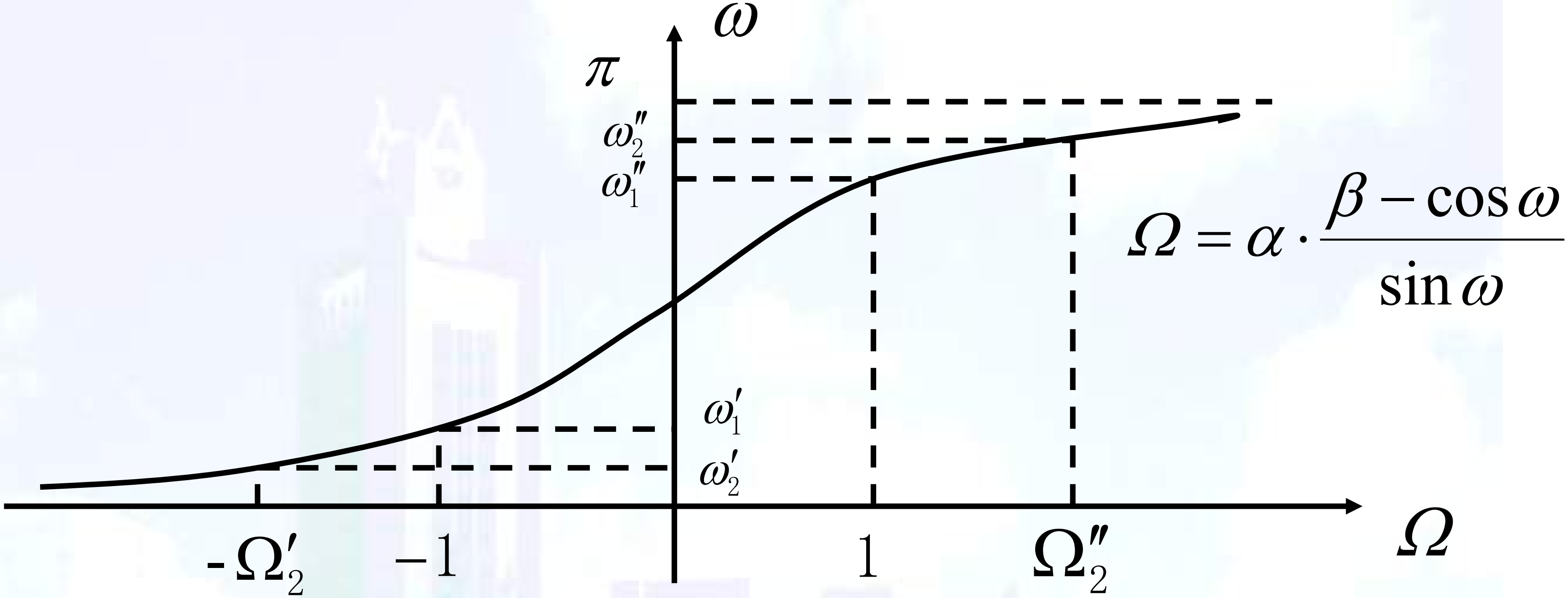
取

$$\alpha=\frac{\sin\omega_1'+\sin\omega_1''}{\cos\omega_1'-\cos\omega_1''},\quad \beta=\frac{\sin(\omega_1'+\omega_1'')}{\sin\omega_1'+\sin\omega_1''}$$

则

$$\omega_1'\longrightarrow -1,\quad \omega_1''\longrightarrow 1,\ \text{即}\ \Omega_1=1\text{。}$$

即模拟低通的带宽为1



这样

$$-\Omega_2' = \frac{\alpha(\beta - \cos\omega_2')}{\sin\omega_2'} \qquad \Omega_2'' = \frac{\alpha(\beta - \cos\omega_2'')}{\sin\omega_2''}$$

$$\Omega_2' \neq \Omega_2''$$

3）设计步骤

① 数字带通指标，

通带：$\omega_1' \sim \omega_1''$，起伏$\delta_1$

止带：$0 \sim \omega_2'$，$\omega_2'' \sim \pi$，起伏 δ_2

② 转换为模拟低通指标，

$$\alpha = \frac{\sin\omega_1' + \sin\omega_1''}{\cos\omega_1' - \cos\omega_1''}, \quad \beta = \frac{\sin(\omega_1' + \omega_1'')}{\sin\omega_1' + \sin\omega_1''}$$

$$\Omega_2 = \min\left\{ -\frac{\alpha(\beta - \cos\omega_2')}{\sin\omega_2'}, \frac{\alpha(\beta - \cos\omega_2'')}{\sin\omega_2''} \right\}$$

$$\Omega_1 = 1$$

则 通带 $0 \sim 1$ ， δ_1 ，

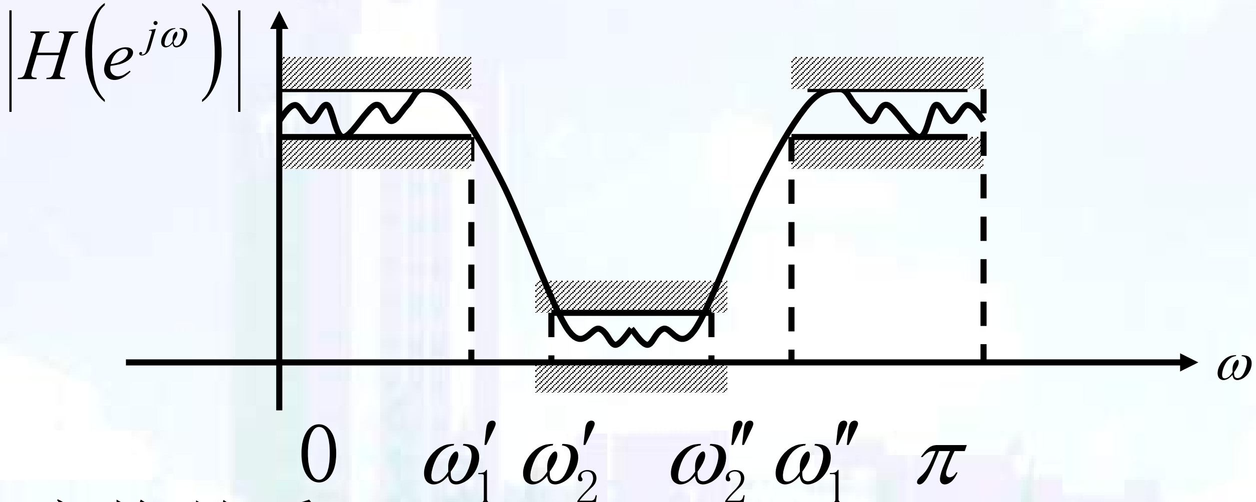
止带 $\Omega_2 \sim \infty$ ， δ_2 。

③ 设计 $H_a(s)$， Butterworth， Chebyshev，…

④ 变换 $$H(z) = H_a(s)\Big|_{s=\alpha \cdot \frac{z^2 - 2\beta z + 1}{z^2 - 1}}$$

三、IIR数字带阻滤波器设计

1）数字带阻的设计规定



2）变换关系

映射关系类似带通，频率走向不同

$$s=\frac{z^2-1}{\alpha(z^2-2\beta z+1)} \qquad \Omega=\frac{\sin\omega}{\alpha(\beta-\cos\omega)}$$

取 $\alpha = \dfrac{\sin\omega_1' + \sin\omega_1''}{\cos\omega_1' - \cos\omega_1''}$， $\beta = \dfrac{\sin(\omega_1' + \omega_1'')}{\sin\omega_1' + \sin\omega_1''}$

此时， $\Omega_1 = 1$

$$\Omega_2 = \min\left\{ -\frac{\sin\omega_2'}{\alpha(\beta - \cos\omega_2')}, \frac{\sin\omega_2''}{\alpha(\beta - \cos\omega_2'')} \right\}$$

3）设计步骤

同数字带通

5.6 IIR滤波器的直接设计

●时域逼近：采用数值计算方法构造系统函数，使$h(n)$接近要求

●频域逼近：采用数值计算方法构造系统函数，使幅频或相频特性接近要求

●选择零极点位置构造系统函数，使幅频特性接近要求

一、时域逼近法（Pada逼近法）

给定一个有限长冲激响应序列，

$$h_d(n)\ ,\quad n=0,1,\ldots,L-1$$

设计的IIR滤波器，冲激响应$\{h(n)\}$与之均方误差最小

$$F=\sum_{n=0}^{L-1}\left[h(n)-h_d(n)\right]^2\quad\rightarrow\quad\min$$

对因果系统 $$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h(n)z^{-n}=\frac{\sum_{r=0}^{M}b_r z^{-r}}{1-\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}$$

用系统函数 $H(z)$ 的参数表达 $h(n)$,

$$h(n)=f\left(a_1,\ldots,a_N,b_0,\ldots,b_M,n\right)$$

上述误差函数表达为:

$$F=\sum_{n=0}^{L-1}\left\{f\left(a_1,\ldots,a_N,b_0,\ldots,b_M,n\right)-h_d(n)\right\}^2$$

滤波器设计：关于函数F的最小值问题

最小值求解：近似解法

把$h(n)$当作有限长处理，并取

$$h(n)=\begin{cases} h_d(n) & 0\le n\le L-1 \\ 0 & n>L \end{cases}$$

即

$$\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \approx \sum_{n=0}^{L-1} h_d(n) z^{-n}$$

$$\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r} = \left(\sum_{n=0}^{L-1} h_d(n) z^{-n}\right)\left(1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\right)$$

比较系数，取前L个方程

$$h_d(n) = b_n + \sum_{k=1}^{N} a_k h_d(n-k) \qquad 0 \le n \le M$$

$$h_d(n) = \sum_{k=1}^{N} a_k h_d(n-k) \qquad M+1 \le n \le L-1$$

后一方程组有L-M-1个方程，L 一般总能满足

$$L \geq M + N + 1$$

$\therefore \quad L - M - 1 \geq N$ ，超定方程组，

最小二乘法求解，

$$E = \sum_{n=M+1}^{L-1} \left[h_d(n) - \sum_{k=1}^{N} a_k h_d(n-k) \right]^2 \Rightarrow \min$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_k} = 0, \qquad k = 1, \ldots, N$$

解线性方程组，得 $\left\{\hat{a}_k\,,\ \ k=1,2,\ldots,N\right\}$

代入第一方程组，求出 $\left\{\hat{b}_r\,,\ \ r=0,1,\ldots,M\right\}$

则确定

$$H(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M}\hat{b}_r z^{-r}}{1-\sum_{k=1}^{N}\hat{a}_k z^{-k}}$$

近似分析：无限长冲激响应滤波器用有限长冲激响应序列来表示

二、频域逼近（最小 P 误差法）

给定一组希望的幅度响应值

$$\left\{\left|H_d\left(e^{j\omega_i}\right)\right|，\ i=1,2,\ldots,M\right\}$$

构造系统函数$H(z)$，使

$$F=\sum_{i=1}^{M}W\left(\omega_i\right)\left[\left|H\left(e^{j\omega_i}\right)\right|-\left|H_d\left(e^{j\omega_i}\right)\right|\right]^{2p}\rightarrow\min$$

$p\geq 1$， $W\left(\omega_i\right)$ 为加权函数

系统函数形式： 2 阶系统的级联

有理形式或极座标形式

$$H(z) = A \cdot \prod_{k=1}^{M} \frac{1 + a_k z^{-1} + b_k z^{-2}}{1 + c_k z^{-1} + d_k z^{-2}}$$

或

$$H(z) = A \cdot \prod_{k=1}^{M} \frac{(z - r_{ok} e^{j\theta_o k})(z - r_{ok} e^{-j\theta_o k})}{(z - r_{pk} e^{j\theta_p k})(z - r_{pk} e^{-j\theta_p k})}$$

F 是参数 $\{a_k,\ b_k,\ c_k,\ d_k,\ \ k=1,\ldots,M\}$

或 $\{r_{ok},\ \theta_{ok},\ r_{pk},\ \theta_{pk},\ \ k=1,\ldots,M\}$

的多变量非线性函数

目标：调整上述参数使 $F \rightarrow \min$

数值解法：Fletcher – Powell 算法

将4 M 个参数统一表达为

$$\vec{\Phi} = \left[\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{4M}\right]^T$$

求得一组 $\vec{\Phi}^*$，使 $F\left\{\vec{\Phi}^*\right\} \to \min$

算法流程

$$\vec{\Phi}^{(j)}$$

$$\nabla F^{(j)} = \left[\frac{\partial F^{(j)}}{\partial \theta_1}, \frac{\partial F^{(j)}}{\partial \theta_2}, \ldots \frac{\partial F^{(j)}}{\partial \theta_{4M}} \right]^T$$

$$\Delta \vec{\Phi}^{(j)} = -\mu \nabla F^{(j)}$$

$$\vec{\Phi}^{(j+1)} = \vec{\Phi}^{(j)} + \Delta \vec{\Phi}^{(j)}$$

$$F(\vec{\Phi}^{j+1}) \le \varepsilon$$

三、全通滤波器 $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=K$， $0\le\omega\le\pi$ ，

2阶全通， $H(z)=\dfrac{c_2z^2+c_1z+1}{z^2+c_1z+c_2}$

N阶全通， $H(z)=K\cdot\dfrac{z^{-N}Q\left(z^{-1}\right)}{Q(z)}$

$$Q(z)=1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\ldots+a_Nz^{-N}$$

或

$$H(z)=K\prod_{k=1}^{K}\frac{c_{2k}z^2+c_{1k}z+1}{z^2+c_{1k}z+c_{2k}}$$

全通相位补偿

$H_D(z)$为满足幅度特性的滤波器，设计全通相均衡器$H_E(z)$，

则 $H(z)=H_D(z)H_E(z)$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\left|H_D\left(e^{j\omega}\right)\right|\cdot e^{j\varphi_D(\omega)}\cdot\left|H_E\left(e^{j\omega}\right)\right|\cdot e^{j\varphi_E(\omega)}$$

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=\left|H_D\left(e^{j\omega}\right)\right|$$

$$\varphi(\omega)=\varphi_D(\omega)+\varphi_E(\omega)$$

用群延迟表示：$\tau(\omega)=\tau_D(\omega)+\tau_E(\omega)$

群延迟定义：$\tau(\omega)=-\dfrac{\mathrm{d}\varphi(\omega)}{\mathrm{d}\omega}$

$$\tau_D(\omega)=-\frac{\mathrm{d}\varphi_D(\omega)}{\mathrm{d}\omega}，\quad \tau_E(\omega)=-\frac{\mathrm{d}\varphi_E(\omega)}{\mathrm{d}\omega}$$

线性相位系统群延迟为常数τ_0，设计$H_E(z)$使

$$\tau_E(\omega)=\tau_0-\tau_D(\omega)$$

相位特性逼近

给定 $\tau_d(\omega_i)$， $i=1,2,\ldots,M$ ，

定义目标函数

$$F=\sum_{i=1}^{M}W(\omega_i)\left[\tau(\omega_i)-\tau_d(\omega_i)\right]^{2p}\qquad p\geq 1$$

可以证明，

$$\tau(\omega) = -\mathrm{Re}\left[\frac{z}{H(z)} \cdot \frac{dH(z)}{dz}\right]\Bigg|_{z=e^{j\omega}}$$

这样，F 表达为系统参数的函数，

$$F = f(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$$

用 Fletcher – Powell 优化算法求解

四、零极点位置累试法

系统函数用零极点表达，

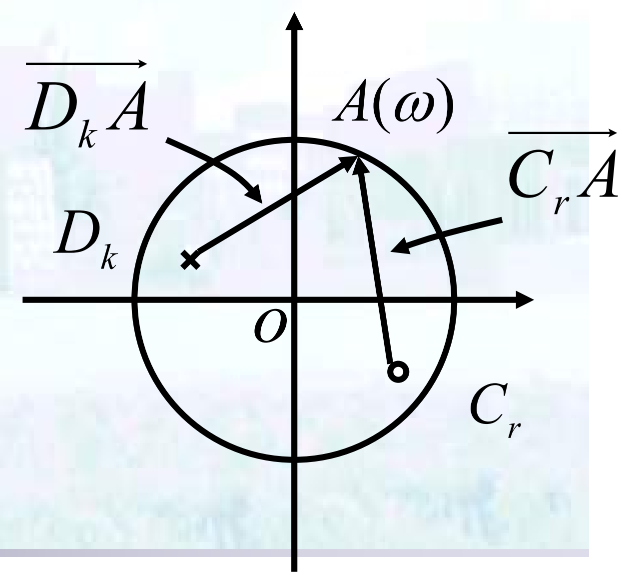
$$H(z)=P\cdot\frac{\prod_{r=1}^{M}(1-c_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})}$$

M个零点：c_r，$r=1,\ldots\ldots,M$

N个极点：d_k，$k=1,\ldots\ldots,N$

幅度响应

$$\left|H(e^{j\omega})\right|=P\cdot\frac{\prod_{r=1}^{M}\left|\overrightarrow{C_r A(\omega)}\right|}{\prod_{k=1}^{N}\left|\overrightarrow{D_k A(\omega)}\right|}$$



零极点安排的基本原则

- 极点靠近单位圆：输出大，衰耗小
- 零点靠近单位圆：输出小，衰耗大
- 极点在单位圆内，零点一般不受限制
- 所有复数极点和零点分别构成各自的共轭对

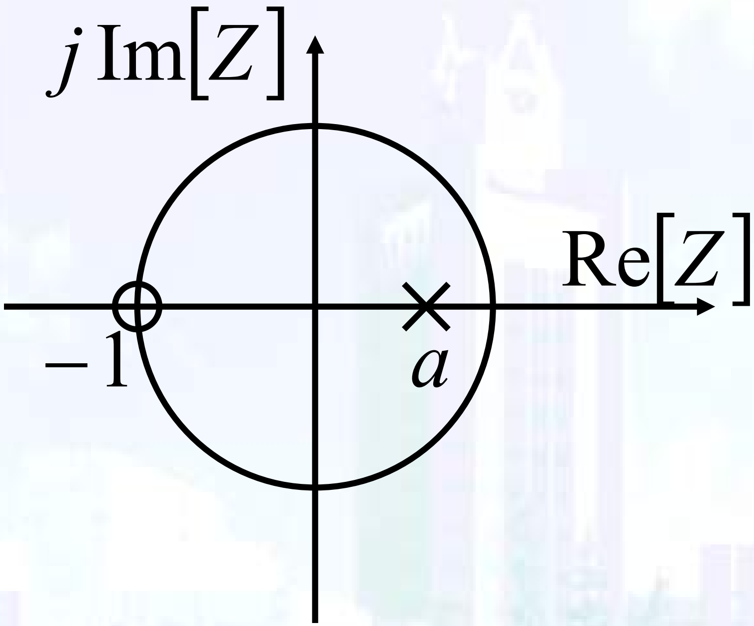
单极点低通

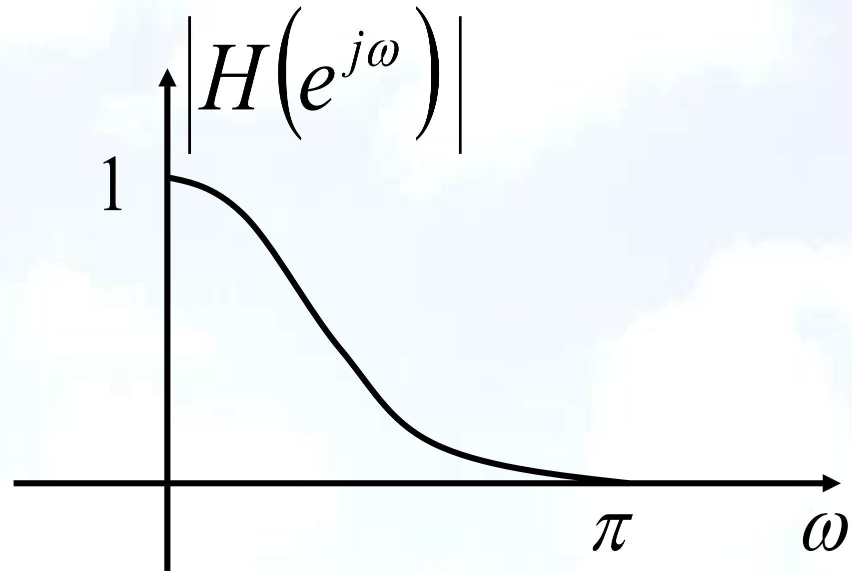
极点：低频(ω=0)，靠近单位圆 z=a

零点：高频(ω=π)，单位圆上 z= -1

$$H(z) = G \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-az^{-1}} \qquad 0 < a < 1$$

5.6 IIR滤波器的直接设计





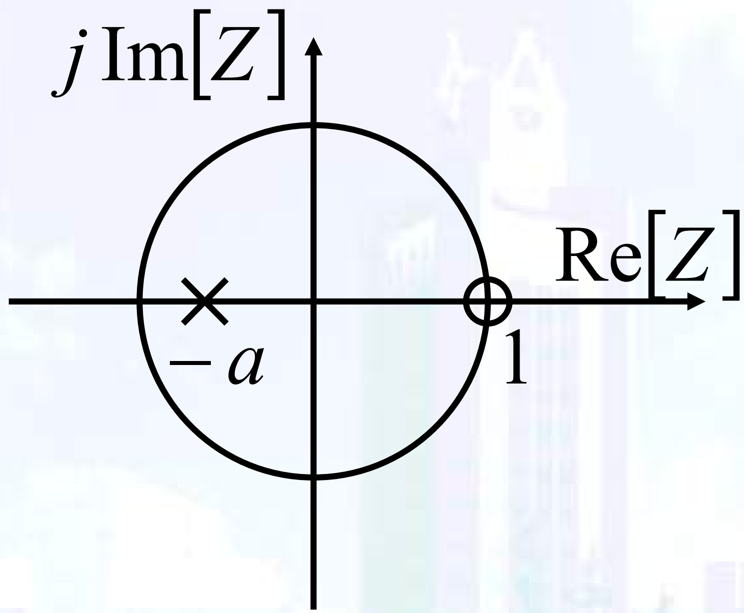
归一化常数 $G=\dfrac{1-a}{2}$ ， $\left|H\left(e^{j0}\right)\right|=1$

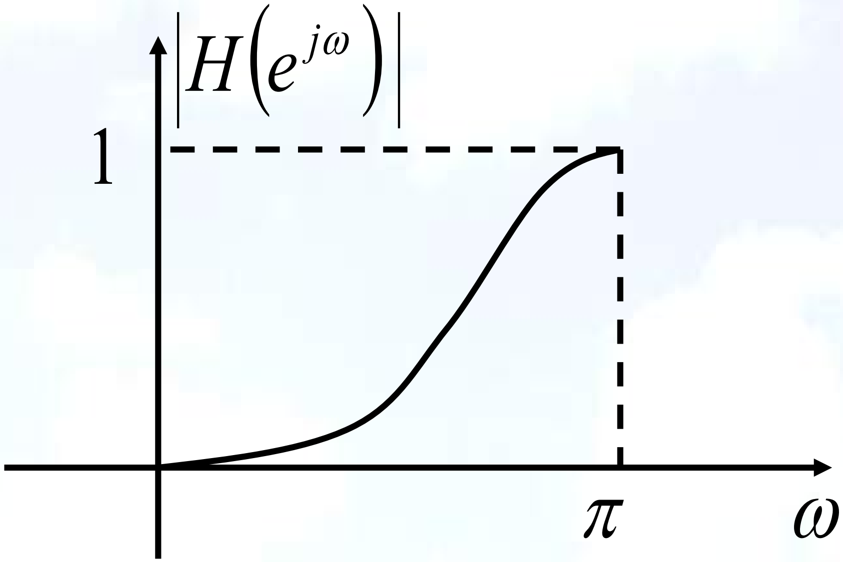
单极点高通

极点：低频($\omega=\pi$)，靠近单位圆 z=-a

零点：高频($\omega=0$)，单位圆上 $z=1$

$$H(z)=G\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+az^{-1}}$$





归一化常数 $G=\dfrac{1-a}{2}$，$\left|H\left(e^{j\pi}\right)\right|=1$

双极点带通，中心频率ω_0

极点：通带中心频率ω_0上，靠近单位圆的共轭对

零点：频率高低端($\omega=0$，$\omega=\pi$)单位圆上

$$H(z)=G\cdot\frac{z^2-1}{(z-re^{j\omega_0})(z-re^{-j\omega_0})}$$

$$=G\cdot\frac{z^2-1}{z^2-2r\cos\omega_0 z+r^2}$$

若 $\omega_0 = \dfrac{\pi}{2}$

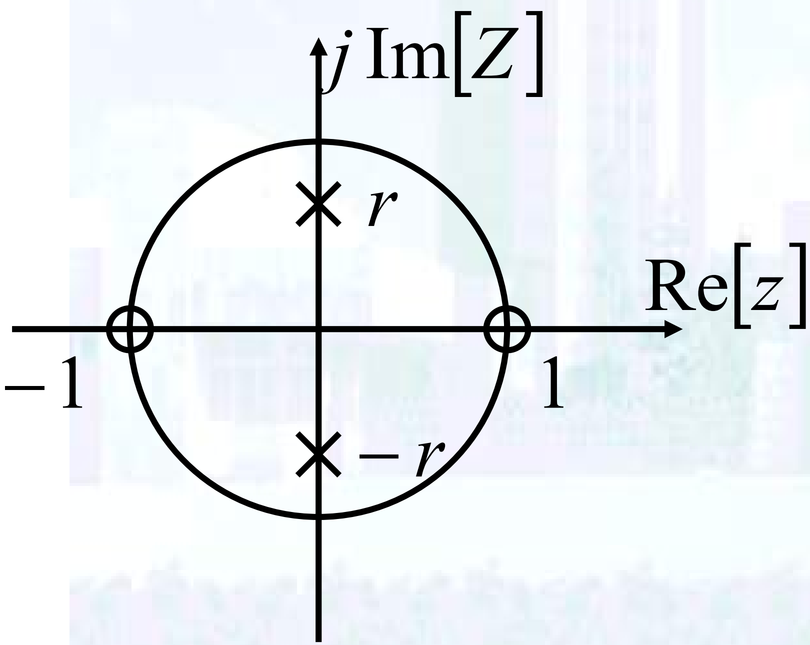
则 $H(z) = G \cdot \dfrac{z^2 - 1}{z^2 + r^2}$

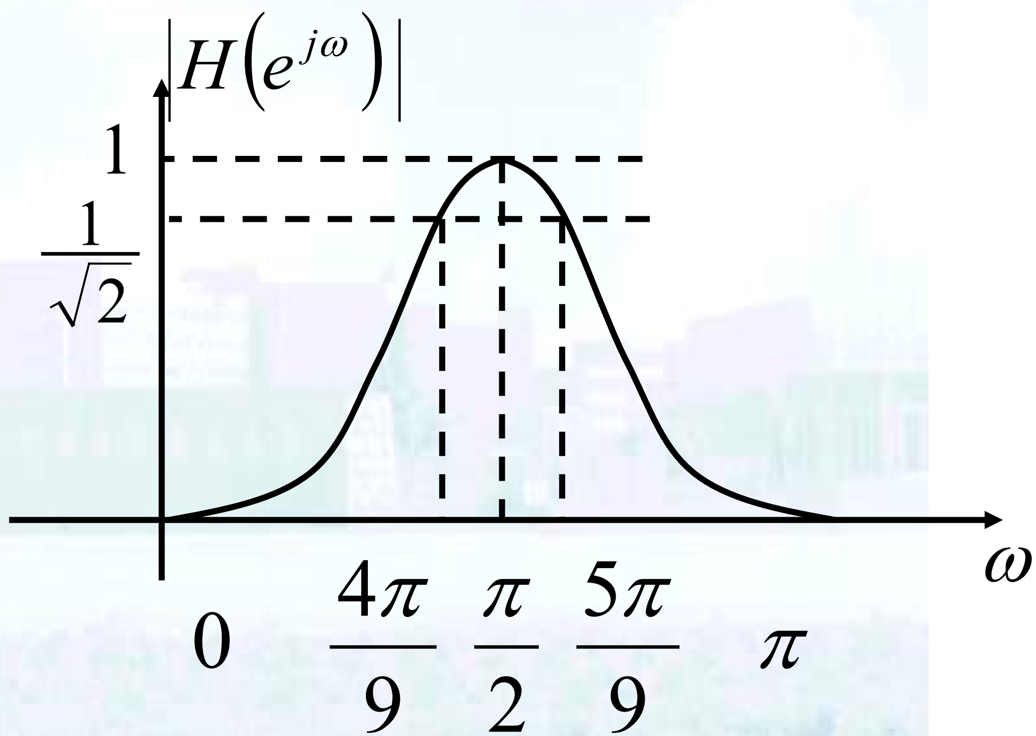
$$\left| H(e^{j\frac{\pi}{2}}) \right| = 1 \quad \Rightarrow \quad G = \frac{1 - r^2}{2}$$

若 3dB 带宽为 $\dfrac{\pi}{9}$，则

$$\left| H(e^{j\frac{4\pi}{9}}) \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad r = 0.8366$$

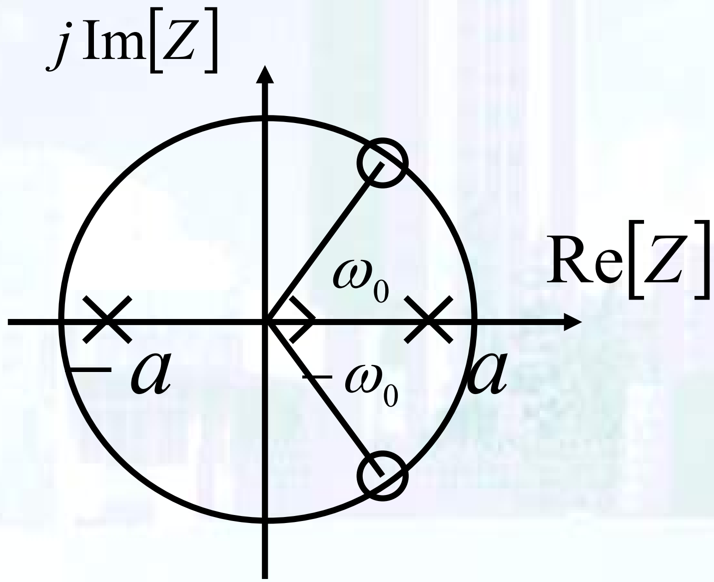
$$H(z)=0.15\cdot\frac{1-z^{-2}}{1+0.7z^{-2}}$$

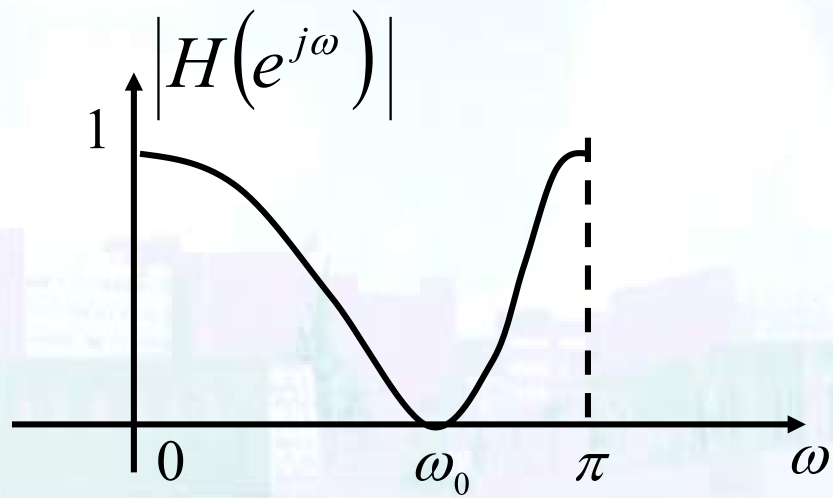




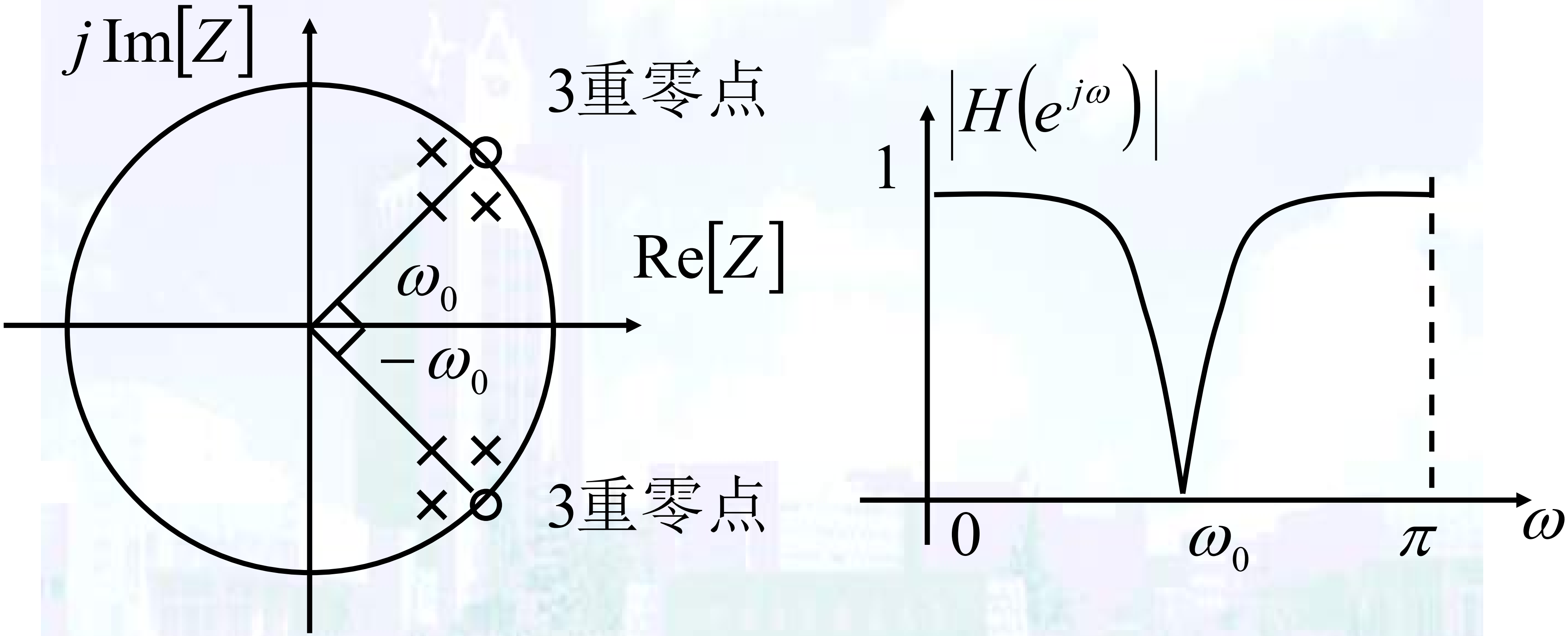
双极点带阻，中心频率ω_0

$$H(z)=G\cdot\frac{z^2-2z\cos\omega_0+1}{z^2-a^2}$$





如果极点安排靠近零点，则可以形成点阻滤波器



$$H(z)=H_1(z)H_2(z)H_3(z)$$

$$H_i(z)=\frac{(1-e^{j\omega_0}z^{-1})(1-e^{-j\omega_0}z^{-1})}{(1-p_iz^{-1})(1-p_i^*z^{-1})}$$

$$p_i=e^{j\omega_0}-\Delta e^{j(\omega_0+\varphi_i)}$$

$$\varphi_i=\begin{cases}-\theta & i=1\\ 0 & i=2\\ \theta & i=3\end{cases}$$