The solution to the 1st quiz

张路鑫, PB16001751
方硕, PB17071424
email: fangshuo@mail.ustc.edu.cn
Website: home.ustc.edu.cn/ fangshuo

2020年4月8日

1 (5分，过程2分，结果3分) 根据$pV = \nu RT$，我们可以得到：

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\nu N_A}{V} = N_A \frac{p}{RT} = 6.022 \times 10^{23} mol^{-1} \frac{10^5 Pa}{8.314 J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1} \times 300K} \simeq 2.414 \times 10^{25} m^{-3} \tag{1}$$

2 (10分，列式求压强4分，求温度6分) 打开连通器后，两种气体将会扩散向彼此，此过程中，气体的物质的量总和保持不变，因此$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \nu_1 R, \frac{p_2 V_2}{T_2} = \nu_2 R$。其中，$p_1, p_2$将会先类似于真空扩散那样变化，之后再由道尔顿分压定律求和即可得到末态压强。

$$\begin{aligned} p_1 V_1 &= p_1'(V_1 + V_2) \\ p_2 V_2 &= p_2'(V_1 + V_2) \\ \frac{p(V_1 + V_2)}{T} &= \frac{p_1 V_1}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T_2} \\ p &= p_1' + p_2' \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p &= \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} \\ T &= T_1 T_2 \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{p_1 V_1 T_2 + p_2 V_2 T_1} \end{aligned} \tag{3}$$

3 (10分，列式3分，计算1分，回答不合理1分，讲出与实际不符2分，解释热平衡态3分)

$$p \simeq \frac{1}{3} n m (\bar{v})^2 \tag{4}$$

另一方面，我们可以有：

$$\begin{aligned} pV &= \nu RT \\ \Rightarrow p &= \frac{N}{N_A V} RT = \frac{nRT}{N_A} \end{aligned} \tag{5}$$

综合(4)(5)，我们有：

$$T = \frac{N_A m (\bar{v})^2}{3R} = \frac{28 \times 10^{-3} kg \cdot mol^{-1} \times (7900 m \cdot s^{-1})^2}{3 \times 8.314 J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}} \simeq 7.00 \times 10^4 K \tag{6}$$

以上结果显然是不太合理的！这与我们的常识矛盾。

这是因为温度微观气体解释中的分子平均动能是指处于热力学平衡态中的气体分子的无规则热运动。"热平衡态"宏观状态不随时间改变，V1表述的是气体集体运动，与热运动概念矛盾。因此，不能以V1推算大气的平均温度。地球大气不能够用热力学平衡态系统描述。

4 （三式计算共8分：3，3，2；指出三者关系2分）

首先我们有这三个参数的定义式：

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{V}(\frac{\partial V}{\partial T})_p \\ \beta &= -\frac{1}{V}(\frac{\partial V}{\partial p})_T \\ \gamma &= \frac{1}{p}(\frac{\partial p}{\partial T})_V\end{aligned} \tag{7}$$

以及理想气体的状态方程：

$$pV = \nu RT \tag{8}$$

于是有：

$$\alpha = \frac{1}{V}\frac{\nu R}{p} = \frac{1}{T} \tag{9}$$

$$\beta = -\frac{1}{V}(-1)\frac{\nu RT}{p^2} = \frac{1}{p} \tag{10}$$

$$\gamma = \frac{1}{p}\frac{\nu R}{V} = \frac{1}{T} \tag{11}$$

因此，我们有：

$$p\beta\gamma = p\frac{1}{p}\frac{1}{T} = \frac{1}{T} = \alpha \tag{12}$$

5 （推导出碰壁数公式4分，求解出N随时间变化3分，指出p与N关系并解除p，3分) (1)首先，我们有理想气体状态方程和碰壁数公式

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{1}{6}n\bar{v} \\ pV &= \nu RT \\ p &\simeq \frac{1}{3}nm(\bar{v})^2\end{aligned} \tag{13}$$

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{1}{6}n\sqrt{\frac{3p}{nm}} = \frac{1}{6}n\sqrt{\frac{3RT}{N_A m}} = \frac{1}{6}n\sqrt{\frac{3kT}{m}} \tag{14}$$

这里，定义了玻尔兹曼常数：$k = \frac{R}{N_A}$.

而且考虑到通过小孔泄流出的粒子数目满足：

$$dN = -\Gamma A dt \tag{15}$$

可以得到：

$$
\begin{aligned}
dN &= -\frac{1}{6}\frac{N}{V}\sqrt{\frac{3kT}{m}}Adt \\
\Rightarrow \frac{dN}{N} &= -\frac{A}{6V}\sqrt{\frac{3kT}{m}}dt \\
\Rightarrow d(\ln N) &= -\frac{A}{6V}\sqrt{\frac{3kT}{m}}dt \\
\Rightarrow \ln\frac{N}{N_0} &= -\frac{A}{6V}\sqrt{\frac{3kT}{m}}t \\
\Rightarrow \frac{N}{N_0} &= e^{-\frac{A}{6V}\sqrt{\frac{3kT}{m}}t}
\end{aligned} \tag{16}
$$

而考虑到这个过程中气体的温度并不变，而且有$p = \frac{N}{N_A V}RT$，所以：

$$
\begin{aligned}
\frac{p}{p_0} &= \frac{N}{N_0} = e^{-\frac{A}{6V}\sqrt{\frac{3kT}{m}}t} \\
&\Rightarrow p = p_0 e^{-\frac{A}{6V}\sqrt{\frac{3kT}{m}}t}
\end{aligned} \tag{17}
$$

则当$p = \frac{1}{2}p_0$时，

$$
t = \frac{6\ln 2V}{A}\sqrt{\frac{m}{3kT}} \tag{18}
$$

(2)(本问5分)由于氦气和氢气的摩尔质量不同，所以经过相同的时间后，泄流量也不同，那么经过t时间后，二者之比为

$$
\frac{N_H}{N_{He}} = \frac{N_{0He}}{N_{0H}}e^{-(\frac{A}{6V}\sqrt{\frac{3kT}{m_H}}t - \frac{A}{6V}\sqrt{\frac{3kT}{m_{He}}}t)} = e^{-\frac{A}{12V}\sqrt{\frac{3kT}{m}}t} \tag{19}
$$

Note:实际由Maxwell分布推导出的小孔泄流公式是

$$
\Gamma = \frac{1}{4}n\bar{v} \tag{20}
$$

所以(1)(2)的结果都会和实际略有差别，更加准确的结果是：

$$
(1)t = \frac{4\ln 2V}{A}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \tag{21}
$$

$$
(2)\frac{N_H}{N_{He}} = e^{-\frac{A}{8V}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}t} \tag{22}
$$