

概率论习题整理

Fir1247

2023 年 06 月

前言

本文档为 2023 年春季学期张娜老师的《概率论》课程期中之后的两次习题课笔记以及平时的部分作业题。

为避免歧义，本文档中的 $\subset$ ，相当于 $\subseteq, \subseteqq$ ，均表示“包含于”的意思，且只使用第一种形式；本文档中的 $\subsetneq$ ，相当于 $\subsetneqq$ ，均表示“真包含于”的意思，且只使用第一种形式。

本文档为考前临时抱佛脚，题目顺序比较随心所欲。忍不住想吐槽一下，期末两个班统考，而刘班和张班平时作业题几乎没有交集，我到底该怎么复习啊...

Fir1247

目录

第一章 张班习题课题目整理	1
第二章 张班作业	8

第一章 张班习题课题目整理

题目 1. X 非负, 求证:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) \leq E[X] \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) + 1$$

解答: X 非负, 所以

$$E[X] = \int_0^{+\infty} (1 - F(x)) dx$$

问题约化为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - F(n)) \leq \int_0^{+\infty} (1 - F(x)) dx \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - F(n))$$

又因为 $F(0) = 0$,

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - F(n)) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - F(n))$$

于是由积分的几何意义, 结论得证。

题目 2. $(X, Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho)$, 求 $E[X|Y]$ 和 $\text{var}(X|Y)$.

解答: 先求 $f_{X|Y}(x|y)$, 然后得到 $E[X|Y]$ 。

注意:

$$\text{var}(X|Y) = E[X^2|Y] - E[X|Y]^2$$

前者怎么求呢?

最终结论:

$$E[X|Y] = \mu_1 + \rho \sigma_1 \frac{Y - \mu_2}{\sigma_2}$$

$$\text{var}(X|Y) = \sigma_1^2(1 - \rho^2)$$

题目 3. 设 X 是连续型随机变量, 其密度函数是 $f(x)$, 特征函数是 $\varphi(t)$, 若

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)| < +\infty$$

则

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-itx} \varphi(t) dt$$

解答: 由反转公式, 对于 $a < b$,

$$\begin{aligned} \frac{F(b) + F(b-0)}{2} - \frac{F(a) + F(a-0)}{2} &= \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{e^{iat} - e^{ibt}}{it} \varphi(t) dt \\ \stackrel{a=x, b=x+h}{\Rightarrow} F(x+h) - F(x) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{1 - e^{iht}}{it} \cdot e^{-ixt} \varphi(t) dt \\ \Rightarrow \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{1 - e^{iht}}{iht} \cdot e^{-ixt} \varphi(t) dt \\ \stackrel{h \rightarrow 0}{\Rightarrow} f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-itx} \varphi(t) dt \end{aligned}$$

题目 4. $X_1, \dots, X_n$ 相互独立且服从 $\exp(\lambda)$ 分布, 令 $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$, 证明:

$$Y_1 = nX_{(1)}, Y_r = (n+1-r)(X_{(r)} - X_{(r-1)}) \text{ for } 1 < r \leq n$$

相互独立, 且 (Y_i) 与 (X_i) 有相同的联合密度函数。

次序统计量的定义见笔记部分的例 2.4.4.

解答: (X_i) 的联合密度函数为:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^n x_i\right)$$

则 $(X_{(i)})$ 的联合密度函数为:

$$h(x_1, \dots, x_n) = \lambda^n \cdot n! \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^n x_i\right)$$

由题意可知

$$\begin{aligned} X_{(r)} &= \sum_{k=1}^r \frac{Y_k}{n-k+1}, \sum_{i=1}^n X_{(i)} = \sum_{i=1}^n Y_i \\ \Rightarrow |J| &= \left| \frac{\partial(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})}{\partial(Y_1, \dots, Y_r)} \right| = \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

故 $(Y_{(i)})$ 的联合密度函数为

$$g(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{n!} \cdot \lambda^n \cdot n! \exp(-\lambda \sum_{i=1}^n y_i) = \lambda^n \exp(-\lambda \sum_{i=1}^n y_i)$$

题目 5. $\vec{X} \sim N(\vec{\mu}, \Sigma)$, 拆分成 $\vec{X}^T = (\vec{X}^{(1)}, \vec{X}^{(2)})$, $\vec{\mu}^T = (\vec{\mu}^{(1)}, \vec{\mu}^{(2)})$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$, 求 $\vec{X}^{(2)} | \vec{X}^{(1)}$ 的条件分布, 以及期望和方差。

解答:

$$\begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ -\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1} & I_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n_1} & -\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} \end{pmatrix} = A\Sigma A^T$$

则令

$$\begin{aligned} \vec{Y} &= \begin{pmatrix} \vec{Y}^{(1)} \\ \vec{Y}^{(2)} \end{pmatrix} = A\vec{X} = \begin{pmatrix} \vec{X}^{(1)} \\ -\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\vec{X}^{(1)} + \vec{X}^{(2)} \end{pmatrix} \\ \vec{Y} &\sim N\left(\begin{pmatrix} \vec{\mu}^{(1)} \\ -\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\vec{\mu}^{(1)} + \vec{\mu}^{(2)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

$\vec{Y}^{(1)}, \vec{Y}^{(2)}$ 独立的协方差矩阵是准对角阵, 于是独立, 则

$$\vec{Y}^{(2)} | \vec{Y}^{(1)} = \vec{Y}^{(2)} \sim N(-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\vec{\mu}^{(1)} + \vec{\mu}^{(2)}, \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12})$$

于是

$$\vec{X}^{(2)} | \vec{X}^{(1)} \sim N(\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(\vec{X}^{(1)} - \vec{\mu}^{(1)})) + \vec{\mu}^{(2)}, \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12})$$

题目 6. $\vec{X}$ 服从 n 维正态分布 $N(\vec{\mu}, \Sigma)$, 当且仅当对于任意 n 维实向量 $\mathbf{t}$, $Y = \mathbf{t}^T \cdot \vec{X}$ 服从一维正态分布 $N(\mathbf{t}^T \vec{\mu}, \mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t})$.

解答: 必要性显然, 只证充分性:

$$\varphi_{\vec{X}}(\vec{t}) = E[e^{i\vec{t}^T \cdot \vec{X}}] = E[e^{iY}] = \varphi_Y(s)|_{s=1}$$

又因为 $Y \sim N(\mathbf{t}^T \vec{\mu}, \mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t})$, 故

$$\varphi_Y(s)|_{s=1} = e^{i\mathbf{t}^T \vec{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t} s^2}|_{s=1} = e^{i\mathbf{t}^T \vec{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t}} = \varphi_X(\mathbf{t})$$

所以 $\vec{X} \sim N(\vec{\mu}, \Sigma)$.

题目 7. $\vec{X}$ 各分量均服从一维正态分布是否能推出 $\vec{X}$ 服从 n 维正态分布?

解答：不正确，反例如下： $X, Y \sim N(0, 1)$ ，令

$$Z = \begin{cases} |Y| & , x \geq 0 \\ -|Y| & , x < 0 \end{cases}$$

则 $Z \sim N(0, 1)$ ，但 $P(Y + Z = 0) = \frac{1}{2}$ ， $Y + Z$ 不服从一维正态分布，由上一题结论可知 (Y, Z) 不服从二维正态分布。

题目 8. X_n 是正态随机变量列，且 $X_n \xrightarrow{D} X$ ，证明 X 服从正态分布（可能退化为常数）。

解答： X_n 的特征函数记作 $\varphi_n(t) = \exp(i\mu_n t - \frac{1}{2}\sigma_n^2 t^2) \rightarrow \varphi(t)$ 。只需证明存在 μ, σ^2 使得 $\varphi(t) = \exp(i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)$ 。

$\varphi_n(t)$ 收敛 $\Rightarrow |\varphi_n(t)| = \exp(-\frac{1}{2}\sigma_n^2 t^2)$ 收敛，则 $\sigma_n^2 \rightarrow \sigma^2$

下证 μ_n 收敛，

$$\exp(i\mu_n t) = \exp(\frac{1}{2}\sigma_n^2 t^2)\varphi_n(t) \rightarrow \exp(\frac{1}{2}\sigma^2 t^2)\varphi(t)$$

$|\exp(i\mu_n t)| \leq 1$ ，由 DCT，

$$\frac{e^{i\mu_n t} - 1}{i\mu_n} = \int_0^t \exp(i\mu_n t) dt \rightarrow \int_0^t \exp(\frac{1}{2}\sigma^2 t^2)\varphi(t) dt > 0$$

实际上

$$\mu_n = \frac{i\mu_n}{e^{i\mu_n t} - 1} \frac{e^{i\mu_n t} - 1}{i}$$

故 $\mu_n \rightarrow \mu$ 。

题目 9.

定理 1.1 (课本定理 5.10.(5)) $X_1, \dots, X_n$ 相互独立， $E[X_j] = 0$ ， $\text{var}(X_j) = \sigma_j^2$ ， $E|X_j^3| < +\infty$ ，且

$$\frac{1}{\sigma(n)^3} \sum_{j=1}^n E|X_j^3| \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty$$

其中

$$\sigma(n)^2 = \text{var} \left(\sum_{i=1}^n X_j \right) = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2$$

则有

$$\frac{1}{\sigma(n)} \sum_{j=1}^n X_j \xrightarrow{D} N(0, 1)$$

根据这个定理证明： $X_1, \dots, X_n$ 相互独立， $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$ ，则

$$\sqrt{\frac{3}{n^3}} \sum_{k=1}^n k \cdot X_k \xrightarrow{D} N(0, 1) \text{ as } n \rightarrow \infty$$

解答：令 $Y_k = k \cdot X_k$, $E[Y_k] = 0$, $\text{var}(Y_k) = k^2$, $E|Y_k|^3 = k^3$, 令 $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, 则

$$\frac{1}{\text{var}(S_n)^{\frac{3}{2}}} \sum_{k=1}^n E|Y_k|^3 \sim C \cdot \frac{n^4}{n^{\frac{9}{2}}} \rightarrow 0$$

于是由定理可得

$$\frac{S_n}{\sqrt{\text{var}(S_n)}} \xrightarrow{D} N(0, 1)$$

又因为 $\text{var}(S_n) = \sum_{k=1}^n k^2 \sim \frac{1}{3}n^3$, 故

$$\sqrt{\frac{3}{n^3}} \sum_{k=1}^n k \cdot X_k \xrightarrow{D} N(0, 1) \text{ as } n \rightarrow \infty$$

另一种解法：用 L-F CLT.

$|Y_k| = k \leq n$, $s_n^2 = \sum_{i=1}^n E|Y_i|^2$, 则 $\frac{n}{s_n} \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. 故当 n 充分大时,

$$I_{\{|Y_k| > \varepsilon s_n\}} = 0$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^n E|Y_k|^2 I_{\{|Y_k| > \varepsilon s_n\}} = 0$$

这就证明了 Y_k 满足 Lindeberg 条件。

题目 10. 任意连续函数 f , 如果 $X_n \xrightarrow{P}$, 证明 $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$

解答：

引理 1.1 (笔记中的引理 4.1.3) $X_n \xrightarrow{P} X$ 当且仅当 $\{X_n\}$ 的任意子列 $\{X_{n_m}\}$, 可以找到几乎处处收敛的子列 $\{X_{n(m_k)}\}_{k=1}^\infty$.

题目 11. 设 $\{X_n\}$ 独立同分布, 均值为 μ , 二阶矩有限, 令

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

证明：

$$\frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \mu)}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2}} \xrightarrow{D} N(0, 1)$$

解答：

引理 1.2 (Slutsky) 如果 $X_n \xrightarrow{D} X$, $Y_n \xrightarrow{P} b$, $Z_n \xrightarrow{P} C$, 则 $X_n Y_n + Z_n \xrightarrow{D} bX + C$.

回到问题，只需证：

$$\frac{\sum_{k=1}^n \frac{X_k - \mu}{\sqrt{n}\sigma}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{(X_k - \bar{X})^2}{n\sigma^2}}} \xrightarrow{D} N(0, 1)$$

由 CLT

$$\sum_{k=1}^n \frac{(X_k - \mu)}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{D} N(0, 1)$$

注意到

$$\sum_{k=1}^n \frac{(X_k - \bar{X})^2}{n\sigma^2} = \frac{1}{n\sigma^2} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu)^2 - \frac{2}{n\sigma^2} (\bar{X} - \mu) \sum_{k=1}^n (X_k - \mu) + \frac{1}{\sigma^2} (\bar{X} - \mu)^2$$

由 WLLN

$$\frac{1}{n\sigma^2} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu)^2 \xrightarrow{P} 1$$

且其余两项依概率收敛到 0. 结合 Slutsky 引理得证。

题目 12. X_n 独立，且服从泊松分布，满足 $E[X_n] = \lambda_n$ ，令 $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ ，如果 $\sum \lambda_n = \infty$ ，证明：

$$\frac{S_n}{E[S_n]} \xrightarrow{\text{a.s.}} 1$$

解答：

分析 证明强收敛，即 a.s. 收敛的常用方法：

(1). 直接证明 Complete 收敛：

$$\forall \varepsilon > 0, \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$$

见笔记定理 4.1.4(3).

(2). 先找子列：

$$\forall \varepsilon > 0, \sum_{k=1}^{\infty} P(|X_{n_k} - X| > \varepsilon) < \infty$$

于是子列 a.s. 收敛，然后考虑 $\sup |X_n - X_{n_k}| \xrightarrow{\text{a.s.}} 0 (n_k < n < n_{k+1})$.

回到本题：考虑子列，定义 n_k 为

$$n_k = \inf \left\{ n : \sum_{i=1}^n \lambda_i \geq k^2 \right\}$$

所以

$$\sum_{k=1}^{\infty} P \left(\left| \frac{S_{n_k}}{E[S_{n_k}]} - 1 \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_k \frac{1}{k^2} < \infty$$

于是由 B-C 引理第一条,

$$P\left(\left|\frac{S_{n_k}}{E[S_{n_k}]} - 1\right| > \varepsilon \text{ i.o.}\right) = 0, \forall \varepsilon > 0$$

于是子列

$$\frac{S_{n_k}}{E[S_{n_k}]} \xrightarrow{\text{a.s.}} 1$$

注意到 $S_{n_k} \leq S_n \leq S_{n_k+1}$ 时有

$$\frac{S_{n_k}}{E[S_{n_k}]} \cdot \frac{E[S_{n_k}]}{E[S_{n_k+1}]} \leq \frac{S_n}{E[S_n]} \leq \frac{S_{n_k+1}}{E[S_{n_k+1}]} \frac{E[S_{n_k+1}]}{E[S_{n_k}]}$$

所以只需证明

$$\frac{E[S_{n_k+1}]}{E[S_{n_k}]} \rightarrow 1$$

而

$$\frac{E[S_{n_k+1}]}{E[S_{n_k}]} \leq \frac{(k+1)^2}{k^2} + \frac{\lambda_{n_k+1}}{k^2}$$

我们假设所有的随机变量都是有界的 (这里写的都 tm 什么啊)

第二章 张班作业

题目 13. 证明：连续型随机变量 X 的分布函数是连续函数，那么 $E|X - a|$ 取最小值当且仅当 a 是 X 的中位数。

由此证明： X 的期望和中位数相差不到一个标准差。

解答： 令 $Y = |X - a|$ ，则 Y 是非负随机变量，所以

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_0^\infty (1 - F_Y(y)) dy \\ &= \int_0^\infty (1 - F_X(y + a) + F_X(-y + a)) dy \\ \frac{d}{da} E[Y] &= \frac{d}{da} \int_0^\infty (1 - F_X(y + a) + F_X(-y + a)) dy \\ &= \int_0^\infty (-F'_X(y + a) + F'_X(-y + a)) dy \\ &= -F'_X(y + a) - F'_X(-y + a)|_0^\infty = 2F(a) - 1 \\ \frac{d^2}{da^2} E[Y] &= 2F'(a) \geq 0 \end{aligned}$$

故 $E|X - a|$ 取最小值 $\Leftrightarrow F_X(a) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a$ 是中位数。

$$\begin{aligned} |E[X] - a| &= E|X - a| \leq E|X - E[X]| \\ &\leq \sqrt{E|X - E[X]|^2} = \sigma \end{aligned}$$

所以 X 的期望和中位数相差不到一个标准差。

题目 14. $\{X_r\}_{r=1}^n$ 独立同分布，且 $\text{var}(X_i) < \infty, \forall i$. 记 $\bar{X}$ 是平均数，证明： $\text{cov}(\bar{X}, X_r - \bar{X}) = 0$.

解答： $E(\bar{X} = \mu), E(X_r - \bar{X}) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E(\bar{X}(X_r - \bar{X})) &= \frac{1}{n} E\left(\sum_s X_r X_s\right) - E(\bar{X}^2) \\ &= \frac{1}{n} (\sigma^2 + n\mu^2) - (\text{var}(\bar{X}) + E(\bar{X})^2) \\ &= \frac{1}{n} (\sigma^2 + n\mu^2) - \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) = 0 \end{aligned}$$

题目 15. $\{X_r\}_{r=0}^{\infty}$ 是独立同分布的随机变量, 密度函数为 f , 分布函数为 F , 令 $N = \min\{n \geq 1 : X_n > X_0\}$, $M = \min\{n \geq 1 : X_0 \geq X_1 \geq \cdots \geq X_{n-1} < X_n\}$.

证明: X_N 的分布函数为 $F + (1 - F)\ln(1 - F)$, 并求出 $P(M = m)$.

解答: $\{N > n\}$ 意味着 X_0 是 $X_1, \cdots, X_n$ 中最大的概率是 $P(N > n) = \frac{1}{n+1}$.

$$\begin{aligned}
 P(N = n) &= P(N > n-1) - P(N > n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \\
 P(X_N \leq x) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(X_N \leq x, N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} F(x)^{n+1} \frac{1}{n(n+1)} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(x)^{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(x)^{n+1}}{n+1} \\
 &= F(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(x)^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(x)^n}{n} + F(x) \\
 &= F(x) + (F(x) - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(x)^n}{n} = F(x) + (1 - F(x))\ln(1 - F(x)) \\
 P(M = m) &= P(X_0 \geq X_1 \geq \cdots \geq X_{m-1}) - P(X_0 \geq X_1 \geq \cdots \geq X_m) \\
 &= \frac{1}{m!} - \frac{1}{(m+1)!}
 \end{aligned}$$

题目 16. $(X, Y) \sim N(0, 1; 0, 1; \rho)$, 即密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2) \right\}$$

证明: X 和 $Z = \frac{Y-\rho X}{\sqrt{1-\rho^2}}$ 独立都服从 $N(0, 1)$ 分布, 并且

$$P(X > 0, Y > 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arcsin \rho$$

解答:

$$\left| \frac{\partial(x, z)}{\partial(x, y)} \right| = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

因为 $x^2 + 2\rho xy + y^2 = (x^2 + z^2)(1 - \rho^2)$,

$$\begin{aligned}
 f_{X,Z}(x, z) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 + z^2)(1 - \rho^2) \right) \sqrt{1-\rho^2} dx dz \\
 &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+z^2)} = f_X(x) f_Z(z)
 \end{aligned}$$

所以独立且都服从 $N(0, 1)$ 分布。

$$\begin{aligned}\{X > 0, Y > 0\} &= \{X > 0, Z > -\frac{\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\} \\ P(X > 0, Y > 0) &= \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}r^2} r dr d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\pi} d\theta \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arcsin \rho\end{aligned}$$

题目 17. 点 (X, Y, Z) 在 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球内随机选取 (选到每个点的概率相同), 求 Z, R 的联合密度函数, 其中 $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$.

解答: $\{R \leq r, Z \leq z\}$ 内体积为

$$V' = \int_{-r}^z \pi(r^2 - \omega^2) d\omega$$

所以

$$P(R \leq r, Z \leq z) = \frac{3}{4\pi} \int_{-r}^z \pi(r^2 - \omega^2) d\omega$$

求导得 $f(r, z) = \frac{3}{2}r$ as $|z| < r < 1$.

题目 18. [4.8.7] 任取中心对称的正态分布随机变量 X, Y 满足

$$E(X|Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\text{var}Y} Y, \text{var}(X|Y) = \{1 - \rho(X, Y)^2\} \text{var} X$$

题目 18 的注记. 重要结论, 记住。

题目 19. $\{Y_r\}_{r=1}^n$ 是独立且服从 $N(0, 1)$ 的随机变量, 定义 $X_j = \sum_{r=1}^n c_{jr} Y_r, 1 \leq j \leq n$, 其中 c_{jr} 是常数。证明:

$$E[X_j|X_k] = \left(\frac{\sum_r c_{jr} c_{kr}}{\sum_r c_{kr}^2} \right) X_k$$

并求出 $\text{var}(X_j|X_k)$.

解答: 用 [4.8.7] 的结论:

$$\begin{aligned}E(X_j|X_k) &= \frac{\text{cov}(X_j, X_k)}{\text{var}X_k} X_k = \frac{\text{cov}(\sum_{r=1}^n c_{jr} Y_r, \sum_{r=1}^n c_{kr} Y_r)}{\text{var} \sum_{r=1}^n c_{kr} Y_r} X_k \\ &= \frac{\sum_r c_{jr} c_{kr}}{\sum_r c_{kr}^2} \cdot X_k \\ \text{var}(X_j|X_k) &= \{1 - \rho(X_j, X_k)^2\} \text{var}X_j \\ &= \left\{ 1 - \frac{(\sum_r c_{jr} c_{kr})^2}{\sum_r c_{jr}^2 \sum_r c_{kr}^2} \right\} \sum_r c_{jr}^2\end{aligned}$$

题目 20. $\{X_n\}$ 满足 $E(\sum_{i=1}^{\infty} |X_i|) < \infty$, 证明:

$$E\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} E(X_i)$$

解答: 令 $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $Z = \sum_{i=1}^{\infty} |X_i|$, 则 $|Z_n| \leq Z$, 由控制收敛定理得证。

题目 21. $\{X_r\}_{r=1}^n$ 满足多元正态分布, 协方差矩阵为 $\mathbf{V} = (v_{ij})$. 证明: 在事件 $\sum_{r=1}^n X_r = x$ 的条件下, X_1 服从 $N(a, b)$ 分布。其中,

$$a = \frac{\rho s}{t} x, b = s^2(1 - \rho^2), s^2 = v_{11}, t^2 = \sum_{i,j} v_{ij}, \rho = \sum_i \frac{v_{i1}}{st}.$$

解答: 根据题目给出的条件可知, 事实上:

$$\text{var}(X_1) = s^2, \text{var}\left(\sum_{r=1}^n X_r\right) = t^2, \text{cov}\left(X_1, \sum_{r=1}^n X_r\right) = st\rho$$

即证:

$$a = E\left[X_1 \mid \sum_{r=1}^n X_r = x\right] \quad b = \text{var}\left(X_1 \mid \sum_{r=1}^n X_r = x\right)$$

使用 [4.8.7] 的结论,

$$\begin{aligned} E\left[X_1 \mid \sum_{r=1}^n X_r = x\right] &= \frac{\text{cov}(X_1, \sum_{r=1}^n X_r)}{\text{var}(\sum_{r=1}^n X_r)} \sum_{r=1}^n X_r \mid \sum_{r=1}^n X_r = x = \frac{st\rho}{t^2} x = \frac{\rho s}{t} x = a \\ \text{var}(X_1 \mid \sum_{r=1}^n X_r = x) &= \{1 - \rho(X_1, \sum_{r=1}^n X_r)\} \cdot \text{var}(X_1) \\ &= \left(1 - \frac{\rho^2 s^2 t^2}{s^2 t^2}\right) s^2 = (1 - \rho^2) s^2 \end{aligned}$$

题目 22. 设 $E|X^r| < \infty, r > 0$. 证明 $x^r P(|X| \geq x) \rightarrow 0$ as $x \rightarrow \infty$.

反过来, 设 $x^r P(|X| \geq x) \rightarrow 0$ as $x \rightarrow \infty, r \geq 0$. 证明:

$$E|X^s| < \infty \text{ for } 0 \leq s < r$$

解答: 若 $E|X^r| < \infty, r > 0$, 则

$$x^r P(|X| \geq x) \leq \int_{[x, \infty)} u^r dF(u) \rightarrow 0$$

其中 F 为 $|X|$ 的分布函数。

反之, 令 $0 \leq s < r$,

$$E|X|^s = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M u^s dF(u)$$

分部积分得到

$$\int_0^M u^s dF(u) = [-u^s(1 - F(u))]_0^M + \int_0^M su^{s-1}(1 - F(u))du$$

第一项为负数。当 u 足够大时, $P(|X| > u) \leq u^{-r}$, 即 $1 - F(u) \leq u^{-r}$, 所以

$$su^{s-1}(1 - F(u)) \leq su^{s-r-1}$$

因此

$$\int_0^M su^{s-1}(1 - F(u))du$$

关于 M 一致有界, 从而 $E|X|^s < \infty$.

题目 23. 如果 φ 是一个特征函数, 证明:

$$\operatorname{Re}\{1 - \varphi(t)\} \geq \frac{1}{4}\operatorname{Re}\{1 - \varphi(2t)\}$$

并推出

$$1 - |\varphi(2t)| \leq 8\{1 - |\varphi(t)|\}$$

解答:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(1 - \varphi(2t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos(2tx))dF(x) \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos(tx))(1 + \cos(tx))dF(x) \\ &\leq 4 \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos(tx))dF(x) = 4\operatorname{Re}(1 - \varphi(t)) \end{aligned}$$

若 X, Y 独立, 同有特征函数 φ , 则 $X - Y$ 的特征函数为

$$\begin{aligned} \psi(t) &= E(e^{itX})E(e^{-itY}) = \varphi(t)\varphi(-t) \\ &= |\varphi(t)|^2 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} 1 - \psi(2t) &\leq 4(1 - \psi(t)) \\ \Rightarrow 1 - |\varphi(2t)|^2 &\leq 4(1 - |\varphi(t)|^2) \end{aligned}$$

又 $|\varphi(t)| \leq 1$, 所以

$$1 - |\varphi(2t)| \leq 1 - |\varphi(2t)|^2 \leq 4(1 - |\varphi(t)|^2) \leq 8(1 - |\varphi(t)|)$$

题目 24. 用反转公式证明:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(at)\sin(bt)}{t^2} dt = \pi \min\{a, b\}$$

解答: 设 X 在 $[-a, a]$ 上均匀分布, Y 在 $[-b, b]$ 上均匀分布, 且二者独立。那么特征函数为

$$\varphi_X(t) = \frac{\sin(at)}{at}, \varphi_Y(t) = \frac{\sin(bt)}{bt}$$

因为独立, 所以

$$\varphi_{X+Y}(t) = \frac{\sin(at)\sin(bt)}{abt^2}$$

由反转公式可知

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ita} \varphi(t) dt$$

代入 $a = 0$,

$$f_{X+Y}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(at)\sin(bt)}{abt^2} dt$$

而从定义的角度入手, 也可以计算出

$$f_{X+Y}(0) = \begin{cases} \int_{-a}^a P(Y = -x)P(X = x)dx & , a < b \\ \int_{-b}^b P(X = -y)P(Y = y)dy & , b < a \end{cases} = \int_{-\min\{a,b\}}^{\min\{a,b\}} \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{2b} dt = \frac{\min\{a, b\}}{2ab}$$

于是结论得证。

题目 25. $\{X_n\}_{n=2}^{\infty}$ 独立随机变量, 且满足

$$P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2n \cdot \ln n}, P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n \cdot \ln n}$$

证明 $\{X_n\}$ 服从弱大数定律, 而不服从强大数定律。换言之, $n^{-1} \sum_{k=2}^n X_k$ 依概率收敛到 0, 而不几乎处处收敛到 0。

解答:

分析 弱大数定律有四个:

KLLN: 直接证明均值依分布收敛;

BLLN: 仅适用于伯努利试验;

CLLN: 适用于两两独立的情况, 要证明方差一致有界。

MLLN: 不需要独立或者同分布条件, 要证明 $n^{-2} \text{var}(s_n) \rightarrow 0$

这道题我们采用 MLLN。

因为独立性,

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(s_n) &= \sum_{k=1}^n \mathrm{var}(X_k) = \sum_{k=2}^n (E[X_k^2] - E[X_k]^2) \\ &= \sum_{k=2}^n k^2 \frac{1}{k \ln k} = \sum_{k=2}^n \frac{k}{\ln k} \leq \frac{n^2}{\ln n} \\ n^{-2} \mathrm{var}(s_n) &\leq \frac{1}{\ln n} \rightarrow 0\end{aligned}$$

所以由 MLLN 可知 $n^{-1} \sum_{k=2}^n X_k$ 依概率收敛到 0.

要证明不几乎处处收敛, 首先有

$$\sum_{k=2}^{\infty} P(|X_k| \geq k) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k} = +\infty$$

然后由 B-C 引理第二条可得 $P(|X_k| \geq k \text{ i.o.}) = 1$, 即

$$P(|s_k - s_{k-1}| \geq k \text{ i.o.}) = 1$$

所以 $n^{-1} \sum_{k=2}^n X_k = n^{-1} s_n \not\rightarrow 0 \text{ a.s.}$

题目 26. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是有界连续函数, 证明:

$$\sum_{k=0}^{\infty} g\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda} \rightarrow g(\lambda), n \rightarrow \infty$$

解答: 设随机变量 $X_1, \dots, X_n$ 独立同参数为 λ 的泊松分布, $S_n = X_1 + \dots + X_n \sim \text{Poi}(n\lambda)$.

由弱大数定律可知

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{D} \lambda$$

对于有界连续函数 g , 有

$$E[g(\frac{S_n}{n})] \rightarrow E[g(\lambda)] = g(\lambda)$$

结论得证。

题目 27. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $\mathrm{var}(X_n) < c, \forall n$. 证明 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足弱大数定律, 如果满足下列条件之一:

- (1) $\rho(X_i, X_j) \leq 0, \forall i \neq j$.
- (2) $\rho(X_i, X_j) \rightarrow 0$ as $|i - j| \rightarrow \infty$.