微分方程引论
——上半学期 ode 部分

Fir1247

2022 年 09 月-2022 年 11 月

前言

本文档为 2022 年秋季学期赵立丰老师的《微分方程引论》ode 部分课程笔记, 内容主要为上课板书.

课程使用的课本为《常微分方程教程》(丁同仁, 李承治著), 但课程内容并不和整本书完全相同, 也没有完全按照顺序讲. 例如跳过了第一章, 第二章没有讲积分因子法, 第七章为选学内容. 没有讲的内容会在文档中标注或者根本不出现.

本文档目的为记录学习过程、准备期中考试以及练习使用 latex.

Fir1247
2022 年 09 月

目录

第一章　基本概念

本章跳过了.

第二章　初等积分法

本章介绍了若干求解各类特殊微分方程的方法.

2.1　恰当方程

$Q(x,y)\mathrm{d}x + P(x,y)\mathrm{d}y = 0$, 且 $\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}$

2.2　可分离变量方程

$X_1(x)Y_1(y)\mathrm{d}x + X_2(x)Y_2(x)\mathrm{d}y = 0$

2.3　一阶线性方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x) \tag{2.1}$$

先考虑其齐次形式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = 0 \tag{2.1.1}$$

这是一个可分离变量方程, 求出其通解为

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s} \tag{2.1.1.a}$$

常数变易法, 设通解 (2.1) 为

$$y = C(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s}$$

代入原方程中得到

$$\begin{aligned}
C'(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s} &= q(x)\\
C'(x) &= q(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s}\\
C(x) &= C + \int_{x_0}^{x} q(s)e^{\int_{x_0}^{s} p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s\\
y(x) &= e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s}(C + \int_{x_0}^{x} q(s)e^{\int_{x_0}^{s} p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s) \qquad (2.1.a)\\
&= Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s} + \int_{x_0}^{x} q(s)e^{\int_{x_0}^{s} p(t)\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}s\\
&= Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s} + \int_{x_0}^{x} q(s)e^{\int_{x}^{s} p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

命题 2.3.1.
性质 *1.* 齐次线性方程 *(2.1.1)* 的解或者恒等于零, 或者恒不等于零.
性质 *2.* 线性方程的解是整体存在的.
性质 *3.* 齐次线性方程 *(2.1.1)* 的任何解的线性组合仍是它的解;
齐次线性方程 *(2.1.1)* 任一解与非齐次线性方程 *(2.1)* 的任一解之和是非齐次线性方程 *(2.1)* 的解;
非齐次线性方程 *(2.1)* 的任意两解之差必是相应齐次线性方程 *(2.1.1)* 的解.
性质 *4.* 非齐次线性方程 *(2.1)* 的任一解与相应齐次线性方程 *(2.1.1)* 的通解之和构成非齐次线性方程 *(2.1)* 的通解.
性质 *5.* 线性方程的初值问题的解存在且唯一.

证明. 性质 1

□

2.4　几类重要的常微分方程

齐次方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{2.3}$$

, 其中 P,Q 是齐次的关于 x,y 的多项式, 设 $y=ux$

$$\begin{aligned}P(x,ux)\mathrm{d}x+Q(x,ux)\mathrm{d}y&=0\\P(1,u)\mathrm{d}x+Q(1,u)(\mathrm{d}ux+u\mathrm{d}x)&=0\\(p(u)+uq(u))\mathrm{d}x+q(u)x\mathrm{d}u&=0\end{aligned}$$

这是一个可分离变量方程.

例 2.4.1. 讨论以下方程的求解方法

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(\frac{ax+by+c}{mx+ny+l}) \tag{2.4}$$

Bernoulli 方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)y^n \tag{2.5}$$

y 恒等于 0 是一个特解,y 不恒等于 0 时

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y&=q(x)y^n\\\frac{1}{y^n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y^{1-n}p(x)&=q(x)\\\frac{1}{n-1}\frac{\mathrm{d}y^{n-1}}{\mathrm{d}x}+y^{1-n}p(x)&=q(x)\end{aligned}$$

这是一个一阶线性方程.

Riccati 方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x) \tag{2.6}$$

如果知道 (2.6) 的一个特解为 $\phi(x)$, 那我们就能够求出其通解. 设 $y(x) = \phi(x) + u(x)$ 也是一个解, 代入方程中可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= p(x)(\phi^2 + 2u\phi + u^2) + q(x)(\phi + u) + r(x)\\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= p(2u\phi + u^2) + qu\\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= pu^2 + (2p\phi + q)u\end{aligned}$$

这是一个 Bernoulli 方程.

Gronwall 不等式

定理 2.4.1. 令 k 是非负常数,$f(x), g(x)$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的连续函数, 且满足不等式

$$f(x) \leqslant K + \int_\alpha^x f(s)g(s)\mathrm{d}s$$

那么

$$f(x) \leqslant Ke^{\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s}$$

证明. 令

$$A(x) = K + \int_\alpha^x f(s)g(s)\mathrm{d}s$$

则

$$\begin{aligned}A'(x) &= f(x)g(x)\\ &\leqslant A(x)g(x)\\ (A(x)e^{-\int_\alpha^s g(s)\mathrm{d}s})' &= (A'(x) - A(x)g(x))e^{-\int_\alpha^s g(s)\mathrm{d}s} \leqslant 0\\ A(x)e^{-\int_\alpha^s g(s)\mathrm{d}s} &\leqslant A(\alpha) = K\\ f(x) &\leqslant A(x) \leqslant Ke^{\int_\alpha^s g(s)\mathrm{d}s}\end{aligned}$$

Gronwall 不等式得证. 它的微分形式如下:
令 k 是非负常数,$f(x), g(x)$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的连续函数, 且满足不等式

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \leqslant f(x)g(x)$$

则

$$f(x) \leqslant f(\alpha)e^{\int_\alpha^s g(s)\mathrm{d}s}$$

□

第三章　存在和唯一性定理

本章聚焦于论证微分方程解的存在唯一性. 先介绍一个概念:

定义 3.0.1. *设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内满足不等式*

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|, L>0$$

则称 f 在区域 D 内对 y 满足 Lipschitz 条件.

推论 3.0.1. *若 D 为闭凸有界区域, 且 f_y' 连续, 则 f 在区域 D 内对 y 满足 Lipschitz 条件.*

3.1　Picard 存在唯一性定理

我们考虑微分方程以及它的初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y) \tag{3.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y), y(x_0)=y_0 \tag{3.1.1}$$

定理 3.1.1. *Picard 存在唯一性定理: $f(x,y)$ 在矩形区域 $D:|x-x_0|\leqslant a,|y-y_0|\leqslant b$ 内连续且对 y 满足 Lipschitz 条件. 则 (3.1.1) 在 $[x_0-h,x_0+h]$ 内存在唯一解. 其中 $h=\min(a,b/M), M>|f(x,y)|_D$*

证明. 把方程写成积分形式, 如下

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y(x))\mathrm{d}x \tag{3.2}$$

构造 Picard 序列. 目标是构造 $y_n(x)\to y$ uniformly on $[x_0-h,x_0+h]$, 也就是一致收敛.

$$\begin{aligned}
y_0(x)&=y_0\\
y_{n+1}(x)&=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_n(x))\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Claim:$|y_n(x)-y_0|\leqslant b$, 先证明 $n=1$ 成立,

$$\begin{aligned}
|y_1(x)-y_0|&=|\int_{x_0}^{x} f(x,y_0)\mathrm{d}x|\\
&\leqslant M|x-x_0|\leqslant b.
\end{aligned}$$

如果 $n=k$ 成立, 那么 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}|y_{k+1}(x)-y_0| &= |\int_{x_0}^{x} f(x,y_k)\mathrm{d}x| \\ &\leqslant M|x-x_0| \leqslant b.\end{aligned}$$

这是因为 (x,y_k) 也在区域 D 里. 下面我们证明这个序列一致收敛到 y.

$$y_n-y_0=\sum_{i=1}^{n-1}(y_{i+1}-y_i)$$

所以我们只需证明级数

$$\sum_{i=0}^{\infty}|y_{i+1}-y_i|$$

一致收敛.

$$\begin{aligned}|y_1-y_0| &= |\int_{x_0}^{x} f(x,y_0)\mathrm{d}x| \leqslant M|x-x_0| \\ |y_2-y_1| &\leqslant |\int_{x_0}^{x}|f(x,y_1)-f(x,y_0)|\mathrm{d}x| \leqslant L|\int_{x_0}^{x}|y_1-y_0|\mathrm{d}x| \\ &\leqslant LM\frac{|x-x_0|^2}{2} \\ |y_3-y_2| &\leqslant L|\int_{x_0}^{x}|y_2-y_1|\mathrm{d}x| \\ &\leqslant L^2M\frac{|x-x_0|^3}{3!} \\ &\vdots \\ |y_{n+1}-y_n| &\leqslant L^nM\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

归纳法易证. 所以

$$\sum_{i=0}^{\infty}|y_{i+1}-y_i| \leqslant \sum_{i=0}^{\infty}\frac{M}{L}\frac{(L|x-x_0|)^i}{i!} \leqslant \frac{M}{L}e^{Lh}$$

于是原级数一致收敛. 这样我们就证明了解的存在性. 下面证明唯一性. 令

$$Ty(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y)\mathrm{d}x$$

要证存在唯一 $y(x)\in C[x_0-h,x_0+h]$, 使得 $Ty(x)=y(x)$, 只需证映射 T 存在唯一不动点.

引理 3.1.1. *压缩映射原理:X 是 $Banach$ 空间上的闭集, 且映射 $T:X\to X$ 是压缩的, 即*

$$||Ty_1-Ty_2|| \leqslant \theta|y_1-y_2|, \theta\in[0,1).$$

那么映射 T 就存在唯一的不动点.

取 $X=\left\{y(x)\in C[x_0-h,x_0+h]\middle|\,|y(x)-y_0|\leqslant b\right\}$, 定义 X 上的范数为

$$\|y\|=\max|y(x)|\Big|_{[x_0-h,x_0+h]}$$

易证如果 $y(x)\in X$, 那么 $Ty(x)\in X$ 且 T 是压缩映射. 综上所述, 定理得证. □

例 3.1.1. *Riccati 方程:*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2=f(x,y),y(x_0)=y_0$$

$f(x,y)$ 在 R^2 上对 y 满足局部 Lipschitz 条件 (任意一点附近的矩形邻域内对 y 满足 Lipschitz 条件), 所以过任一点 (初值) (x_0,y_0) 的解在 $[x_0-h,x_0+h]$ 唯一存在.

定理 3.1.2. *Peano 存在性定理:$f(x,y)$ 在矩形区域 D 上连续, 则 (3.1) 在区间 $[x_0-h,x_0+h]$ 上至少存在一个解.h,D 同 Picard 定理.*

定义 3.1.1. 如果函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续, 且满足不等式

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant F(|y_1-y_2|)$$

其中 $F(r)>0(r>0)$, 并且满足存在常数 r_1 使得

$$\int_0^{r_1}\frac{1}{F(r)}\mathrm{d}r=+\infty$$

则称函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内对 y 满足 *Osgood* 条件.

推论 3.1.1. *如果函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内对 y 都满足 Lipschitz 条件, 则函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内对 y 满足 Osgood 条件.*

定理 3.1.3. *如果函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内对 y 满足 Osgood 条件, 那么过 G 内,(3.1) 过任何一点的积分曲线都是唯一的.*

证明. 对于 (3.1), 假设它过 (x_0,y_0) 有两个解 $y_1(x),y_2(x)$, 则存在 $x_1\neq x_0,y_1(x_1)\neq y_2(x_1)$, 不妨设 $x_1>x_0,y_1(x_1)>y_2(x_1)$. 令

$$\overline{x}=sup\{x_0<x<x_1|y_1(x)=y_2(x)\}$$

因为 $y_1(x),y_2(x)$ 是连续的, 所以 $y_1(x)>y_2(x),x\in(\overline{x},x_1)$. 令 $r(x)=y_1(x)-y_2(x)>0,x\in(\overline{x},x_1)$

$$r'(x)=y_1'-y_2'=f(x,y_1)-f(x,y_2)\leqslant F(|y_1-y_2|)=F(r(x))$$

$$\int_0^{r(x)}\frac{1}{F(r)}\mathrm{d}r\leqslant\int_{\overline{x}}^{x_0}\mathrm{d}x=x_0-\overline{x}<+\infty$$

与 Osgood 条件矛盾, 所以假设不成立. □

3.2 解的延伸

定理 3.2.1. 对于 (3.1), $f(x)$ 在区域 G 内连续，设 P_0 是区域 G 内任意一点，则过 P_0 的积分曲线 Γ 在区域 G 内可以延伸到边界。

证明. 设过 P_0 的积分曲线 $\Gamma:y=\phi(x),x\in J,J$ 是最大存在区间。我们只需证明积分曲线 Γ 可以向右延伸到边界，令 $J^+=J\cap[x_0,+\infty]$, 则 J^+ 为 Γ 的右行最大区间。

1.$J^+ = [x_0, +\infty]$　那么命题显然成立;

2.$J^+ = [x_0, x_1]$　令 $y_1 = \phi(x_1), (x_1, y_1) \in G$，由于 G 是开集，所以存在以 $P_1(x_1, y_1)$ 为中心的矩形区域 $D \subset G$，在区域 D 上，根据 Peano 存在定理，在 $[x_1, x_1 + h]$ 上，至少存在一个解 $y = \phi_1(x)$. 令

$$y^*(x) = \begin{cases} \phi(x), x \in [x_0, x_1] \\ \phi_1(x), x \in (x_1, x_1 + h] \end{cases}$$

Claim:$y^*(x)$ 是 (3.1) 在 $[x_0, x_1 + h]$ 上的解。由于 y^* 连续，所以只需要代入 (3.2) 验证

$$y^* = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y^*(x)) \mathrm{d}x$$

由于

$$\begin{aligned} y^* = \phi(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \phi(x)) \mathrm{d}x, x \in [x_0, x_1] \\ y^* = \phi_1(x) &= y_1 + \int_{x_1}^{x} f(x, \phi_1(x)) \mathrm{d}x, x \in [x_1, x_1 + h] \\ &= y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x, \phi(x)) \mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x} f(x, \phi_1(x)) \mathrm{d}x \\ &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y^*(x)) \mathrm{d}x \end{aligned}$$

所以解延伸到了 $[x_0, x_1 + h]$，矛盾;

3.$J^+ = [x_0, x_1)$　如果无法延伸到边界，那么存在有界闭集 $K \subset G$ 使得 $\Gamma \subset K$，对于任意的 $x_n \to x_1^-$

$$\begin{aligned} |\phi(x_n) - \phi(x_m)| &= |\int_{x_m}^{x_n} \phi'(x) \mathrm{d}x| = |\int_{x_m}^{x_n} f(x, \phi(x)) \mathrm{d}x| \\ &\leqslant \max_K \{|f(x, y)|\} |x_n - x_m| \end{aligned}$$

所以 $\phi(x_n)$ 是柯西列。故 $\lim_{x \to x_1^-} \phi(x)$ 存在，记作 y_1，那么如果令

$$y^*(x) = \begin{cases} \phi(x), x \in [x_0, x_1) \\ y_1, x = x_1 \end{cases}$$

则 y^* 是方程在 $[x_0, x_1]$ 上的解，矛盾;　□

推论 3.2.1. 如果函数 $f(x, y)$ 关于 y 满足 *lipschitz* 条件，则过 G 内任意一点 P 的积分曲线唯一存在且在 G 内延伸到边界。

例 3.2.1. 证明方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + y^2$$

的任一解的存在区间都是有界的。

证明. $f(x,y)$ 连续且对 y 满足局部 lipschitz 条件，所以经过任意一点 (x_0,y_0) 存在唯一一条积分曲线 Γ 且延伸到边界。只证明 Γ 右行最大区间是有界的, 否则其右行最大区间为 $[x_0,+\infty)$. 取 $x_1>\max\{x_0,0\}$, 则在 $[x_1,+\infty)$ 上 $f(x,y)\geqslant x_1^2+y^2$, 那么

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\geqslant x_1^2+\phi^2\\
&\int_{\phi(x_1)}^{\phi(x)}\frac{\mathrm{d}\phi}{x_1^2+\phi^2}\geqslant\int_{x_1}^{x}\mathrm{d}x\\
&x-x_1\leqslant\frac{1}{x_1}\left(\arctan\frac{\phi(x)}{x}-\arctan\frac{\phi(x_1)}{x_1}\right)\leqslant\frac{\pi}{x_1}\\
&x\leqslant x_1+\frac{\pi}{x_1}<+\infty
\end{aligned}$$

所以右行最大区间是有界的 □

例 3.2.2. 证明方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x-y)e^{xy^2}$$

过任何一点的解的积分曲线向右延伸到正无穷。

证明. 若最大右行区间有限,
P0 在直线 y=x 的上方, 则曲线单调递减, 必然与 L 相交;
P0 在直线 y=x 的下方, 则曲线单调递增, 但不会与 L 相交, 因为靠近 L 时斜率远小于 1;
因此积分曲线无法在有限区间内趋于无穷，矛盾。 □

定理 3.2.2. 函数 $f(x,y)$ 在条形区域 $S:x\in(\alpha,\beta),y\in R$ 内连续，且满足不等式

$$|f(x,y)|\leqslant A(x)|y|+B(x)$$

其中 A,B 都是 (α,β) 上的连续函数。则微分方程 (3.1) 的每个解都以 (α,β) 为最大存在区间。证明方法和 *picard* 唯一存在性定理十分相似。

第四章　奇解

本章内容介绍了隐式方程和其解法.

4.1　一阶隐式方程

考虑一般的一阶隐式方程

$$F(x, y, p) = 0, p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{4.1}$$

微分法　如果从 (4.1) 中可以解出 $y = f(x, p)$, 则

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f_x' + f_p' \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \\ p &= f_x' + f_p' \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \\ (f_x' - p)\mathrm{d}x &+ f_p' \mathrm{d}p = 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

若 (4.2) 解出的通解形式为 $p = u(x, C)$, 则就能求出原方程通解为 $y = f(x, u(x, C))$;
若 (4.2) 解出的通解形式为 $x = h(p, C)$, 则原方程通解写为

$$\begin{cases} x = h(p, C) \\ y = f(h, p) \end{cases}$$

这是一条参数曲线.

例 4.1.1. *克莱罗方程*

$$y = xp + f(p) \tag{4.3}$$

对 x 求导

$$p = p + x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + f'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

$$x + f'(p) = 0 \text{或} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$$

分别对应了特解和通解, 有趣的是, 通解曲线是特解曲线的切线包络.

参数法

1　方程不显含 x, 即

$$F(y,p)=0 \tag{4.4}$$

设 $y=g(t), p=h(t)$, 则

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}y}{p}=\frac{\mathrm{d}g}{h} \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\frac{1}{h(t)} \\ x(t) &= \int \frac{g'(t)}{h(t)}\mathrm{d}t + C \end{aligned}$$

也就能写出来原方程通解的参数形式了.

2　把方程视为 R^3 空间中的一个曲面, 然后把它参数化. 设

$$x=f(u,v), y=g(u,v), p=h(u,v)$$

则

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y \qquad\qquad\qquad\qquad &= p\mathrm{d}x \\ g'_u\mathrm{d}u+g'_v\mathrm{d}v &= h\cdot(f'_u\mathrm{d}u+f'_v\mathrm{d}v) \\ (g'_u-hf'_u)\mathrm{d}u &= (hf'_v-g'_v)\mathrm{d}v \end{aligned}$$

例 4.1.2. 解方程

$$p^2+y-x=0$$

设 $x=u, p=v, y=u-v^2$.

(本章其他内容没讲.)

第五章　高阶微分方程

考虑 n 阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y^n}{\mathrm{d}^n x} = f(x, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \cdots, \frac{\mathrm{d}y^{n-1}}{\mathrm{d}^{n-1}x}) \tag{5.30}$$

令 $y_i = y^{(n-1)}, i = 1, 2, \cdots, n$, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ f(x, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \cdots, \frac{\mathrm{d}y^{n-1}}{\mathrm{d}^{n-1}x}) \end{pmatrix} \tag{5.31}$$

如果 $\phi(x)$ 是 (5.30) 的解，那么

$$\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}\phi^{n-1}}{\mathrm{d}^{n-1}x} \end{pmatrix}$$

就是 (5.31) 的解，反之也成立。考虑一般情况，

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{y}}{\mathrm{d}x} = \begin{pmatrix} f_1(x, \overrightarrow{y}) \\ \vdots \\ f_n(x, \overrightarrow{y}) \end{pmatrix} = \overrightarrow{f}(x, \overrightarrow{y})$$

若 f_i 是线性函数，即

$$f_i(x, y_1, \cdots, y_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j + e_i(x)$$

所以方程化为

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{y}}{\mathrm{d}x} = A(x)\overrightarrow{y} + \overrightarrow{e}(x) \tag{5.35}$$

定理 5.0.1. 若 $\overrightarrow{f}(x, \overrightarrow{y})$ 连续且对 $\overrightarrow{y}$ 满足 *Lipschitz* 条件，那么方程 (5.35) 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上存在唯一解。

5.1　解对初值和参数的依赖性

方便起见，向量不画箭头了。现在我们来考虑含参方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y, \lambda), y(x_0) = y_0$$

它的解和四个变量有关，记作 $y=\phi(x,x_0,y_0,\lambda)$。现在来研究 ϕ 关于 (x_0,y_0,λ) 是否连续。通过变换 $y_1=y-y_0, x_1=x-x_0$，我们实际上可以假定初值条件固定，单独研究对参数的连续依赖性。

定理 5.1.1. 如果函数 $f(x,y,\lambda)$ 在区域 $|x|\leqslant a, |y|\leqslant b, |\lambda-\lambda_0|<c$ 上连续，并且关于 $\vec{y}$ 满足 *Lipschitz* 条件，那么

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y,\lambda)\\ y(0)=0\end{cases}$$

的解 $y=\phi(x,\lambda)$ 在区域 $|x|\leqslant h, |\lambda-\lambda_0|<c$ 上连续。

5.2 解对初值和参数的可微性

考虑含参初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y,\lambda), y(x_0)=y_0$$

它的解和四个变量有关，记作 $y=\phi(x,x_0,y_0,\lambda)$。

定理 5.2.1. 如果函数 $f(x,y,\lambda)$ 在区域 $|x|\leqslant a, |y|\leqslant b, |\lambda-\lambda_0|<c$ 上连续，并且关于 y 的偏导数连续，且关于 λ 可微。则 $y=\phi(x,x_0,y_0,\lambda)$ 可微。

可列出变分方程：

$$\begin{aligned}
z_1&=\frac{\partial\phi}{\partial x}=-f(x_0,\phi(x_0,x_0,y_0,\lambda),\lambda)+\int_{x_0}^{x}f'_y(s,\phi(s,x_0,y_0,\lambda),\lambda)\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathrm{d}s\\
z_2&=\frac{\partial\phi}{\partial y}=1+\int_{x_0}^{x}f'_y(s,\phi(s,x_0,y_0,\lambda),\lambda)\frac{\partial\phi}{\partial y}\mathrm{d}s\\
z_3&=\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}=\int_{x_0}^{x}(f'_y(s,\phi(s,x_0,y_0,\lambda),\lambda)\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial\lambda}(s,\phi(s,x_0,y_0,\lambda),\lambda))\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
A=A(x,x_0,y_0,\lambda)&=f'_y(x,\phi(x,x_0,y_0,\lambda),\lambda)\\
B=B(x,x_0,y_0,\lambda)&=f'_\lambda(x,\phi(x,x_0,y_0,\lambda),\lambda)
\end{aligned}$$

则得到变分方程组

$$\begin{aligned}
z_1'&=Az_1, z_1(x_0)=-f(x_0,y_0,\lambda)\\
z_2'&=Az_2, z_2(x_0)=1\\
z_3'&=Az_3+B, z_3(x_0)=0
\end{aligned}$$

可以求出各个偏导数。

第六章　线性微分方程组

本章介绍了如何求解线性微分方程组.

6.1　一般理论

考虑一般的线性方程组

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= A(x)y + f(x),\\ y &= (y_1 \ \cdots \ y_n)^T, A = (a_ij(x))_{n\times n}, f(x) = (f_1(x) \ \cdots \ f_n(x)).\end{aligned} \tag{6.1}$$

要求 $A(x), f(x)$ 在区间 (a,b) 上是连续的. 随意取一个初值 $y(x_0) = y_0$, 方程组的解是否唯一存在呢？

记 (6.1) 中 $A(x)y + f(x) = F(x,y)$, 则 $F(x,y)$ 在 $(a,b)\times R^n$ 上连续, 并且关于每一个 y 都满足局部 lipschitiz 条件,$|F(x,y)| \leqslant |A(x)||y| + |f(x)|$, 那么解唯一存在, 而且 (a,b) 就是解的最大存在区间.

把相应的齐次线性微分方程组 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = A(x)y$ 的所有解的集合为 S,S 是一个 n 维向量空间, 就能找到一组基, 以构造出所有的解.

定理 6.1.1. *方程 (6.1) 满足初值条件 $y(x_0) = y_0$ 的解在 (a,b) 上存在且唯一.*

证明. 令 $F(x,y) = A(x)y+f(x)$, 则 $F(x,y)$ 在 $(a,b)\times R^n$ 上连续, 并且关于每一个 y 都满足局部 lipschitiz 条件, 则方程 (6.1) 的极大解是存在且唯一的. 由于 $|F(x,y)| \leqslant |A(x)||y| + |f(x)|$, 由延拓定理, 任一解的极大存在区间为 (a,b). □

引理 6.1.1. *给出方程 (6.1) 相应的齐次方程*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = A(x)y \tag{6.2}$$

若 y_1, y_2 是 (6.2) 两个解, 则对于任意的实常数 $C_1, C_2, C_1y_1 + C_2y_2$ 仍然是 (6.2) 的一个解.

设 (6.2) 的所有解的集合为 S, 根据引理 6.1.1,S 构成 R 上的线性空间.

引理 6.1.2. *S 是 n 维线性空间,n 是 (6.2) 的阶数.*

证明. (我们希望构造一个同构映射 $H: R^n \to S, H(\text{初值}) = \text{解}$)
固定 $x_0 \in (a,b), y_0 = y(x_0)$, 定义映射 $H: R^n \to S, Hy_0 = y(x)$, 其中 $y(x)$ 是初值问题

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = A(x)y \\ y_0 = y(x_0) \end{cases} \tag{6.3}$$

的解. 下面证明 H 是同构映射.

1 证明单射: 假设 $y_0, z_0 \in R^n$ 使得 $Hy_0 = Hz_0$, 令 $Hy_0 = y(x), Hz_0 = z(x)$, 则 $y(x) - z(x) = 0$ 也是一个解, 也就有 $y_0 = z_0$.

2 证明满射：任意 $y(x) \in S, y(x)$ 在 (a,b) 上唯一存在,$y_0 = y(x_0)$, 则 $Hy_0 = y(x)$

3 证明线性：由解的唯一性易证, 不再赘述. □

现在我们来探究 S 的基.

定义 6.1.1. *称向量值函数 $\phi_1(x), \cdots, \phi_n(x)$ 为线性相关的, 如果存在某种线性组合恒等于 0. 反之称为线性无关的.*

定理 6.1.2. *(6.2) 有 n 个线性无关的解.*

证明. 设 $e_1, \cdots, e_n$ 是 R^n 中的 n 个线性无关的向量, 则 $He_1, \cdots, He_n$ 就是一组 (6.2) 线性无关的解. □

设 $y_i = (y_{1i}, \cdots, y_{ni})^T, i = 1, 2, \cdots, n$

令 $W(x) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}$, 叫做 Wronski 行列式, 如果它恒不为 0, 那么这 n 个解线性无关. 事实上 $W(x)$ 满足一个特殊的微分方程, 叫做 lionville 微分方程.

引理 6.1.3.

$$W(x) = W(x_0) e^{\int_{x_0}^{x} tr(A(s)) \mathrm{d}s}$$

证明. 两边求导即可验证. □

定理 6.1.3. *(6.2) 的解组 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 线性无关的充要条件是它的 Wronski 行列式在解区间 (a,b) 恒不为 0.*

证明. 根据引理 6.1.3 可知,$W(x)$ 恒不为 0 当且仅当 $W(x)$ 在某一点处不为 0, 我们取初值 x_0, 则 $W(x_0) \neq 0$, 等价于 R^n 上的向量组 $y_1(x_0), y_2(x_0), \cdots, y_n(x_0)$ 线性无关, 那么 $Hy_1(x_0), Hy_2(x_0), \cdots, Hy_n(x_0)$ 便线性无关, 亦即 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 线性无关, 命题得证. □

推论 6.1.1. *(6.2) 的解组 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 线性相关的充要条件是它的 Wronski 行列式在解区间 (a,b) 恒为 0.*

(6.2) 的解组 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 构成的矩阵 $Y=(y_ij)_{n\times n}$, 称之为解矩阵. 如果解组线性无关, 则称之为基础解组, 相应的矩阵称为基解矩阵. 若已知基解矩阵 $\Phi(x)$, 那么方程的通解为 $y(x)=\Phi(x)C, C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^T$

推论 6.1.2. 若已知基解矩阵 $\Phi(x)$, 那么对于任意非奇异常数矩阵 $C,\Psi(x)=\Phi(x)C$ 仍然是一个基解矩阵；若已知基解矩阵 $\Phi(x),\Psi(x)$, 那么存在一个非奇异常数矩阵 C 使得 $\Psi(x)=\Phi(x)C$.

如果 $y=\phi^*(x)$ 是 (6.1) 的一个特解, 那么 (6.1) 的通解为

$$y(x)=\Phi(x)C+\phi^*(x), C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^T$$

类似于一阶常微分方程, 我们仍可以通过常数变易法求特解:
假设 $y(x)=\Phi(x)C(x), C(x)=(c_1(x),c_2(x),\cdots,c_n(x))^T$ 是 (6.1) 的一个特解, 代入可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}C(x)+\Phi(x)\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}&=A\Phi(x)C(x)+f(x)\\ A\Phi(x)C(x)+\Phi(x)\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}&=A\Phi(x)C(x)+f(x)\\ \Phi(x)\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}&=f(x)\\ \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}&=\Phi(x)^{-1}f(x)\\ C(x)&=\int_{x_0}^{x}\Phi(x)^{-1}f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

这样我们就得到了 (6.1) 的一个特解, 进而可得 (6.1) 的通解.

6.2　常系数线性微分方程组

对于方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=Ay(A\text{为常系数矩阵}) \tag{6.4}$$

我们类比一维的情况：$y'=ay$ 的通解为 $y=Ce^{ax}$,(6.4) 的通解为 $y=Ce^{Ax}=e^x\cdot Ce^A$, 如何定义矩阵次幂？似乎可以按照 e^x 幂级数展开来定义：

$$e^A=I+A+\frac{A^2}{2!}+\cdots+\frac{A^n}{n!}+\cdots$$

但是右边的求和是有意义的吗？

定义 6.2.1. 方阵 $A=(a_ij)\in R^{n\times n}$, 定义其范数为 $||A||=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}|$. 容易验证其满足范数的三要素.

矩阵范数还有一些其他性质：

引理 6.2.1. $||AB||\leqslant||A||\cdot||B||$, 进而有 $||A^k||\leqslant||A||^k$

命题 6.2.1. 矩阵 A 的幂级数 $I+A+\frac{A^2}{2!}+\cdots+\frac{A^n}{n!}+\cdots$ 绝对收敛, 用 e^A 表示, 称为矩阵指数函数.

命题 6.2.2. 矩阵指数函数具有以下性质：

1 如果矩阵 AB 可交换, 则 $e^{A+B}=e^Ae^B$;

2 任意 A,e^A 可逆;

3 若 P 是非奇异矩阵,$e^{P^{-1}AP}=P^{-1}e^AP$

定理 6.2.1. $\Phi(x)=e^{Ax}$ 是 *(6.4)* 的一个标准基解矩阵.

证明.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi(x)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{Ax}\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(xA)^n}{n!})\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\cdot A^n}{n!})\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}A^n}{(n-1)!}\\&=Ae^{xA}\end{aligned}$$

□

推论 6.2.1. 方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=Ay+f(x)(A\text{为常系数矩阵})\tag{6.5}$$

的通解为:

$$y=Ce^{xA}+\int_{x_0}^{x}e^{(x-s)A}f(s)\mathrm{d}s.$$

例 6.2.1.

$$\begin{aligned}A&=diag(a_1,\cdots,a_n)\\A^k&=diag(a_1^k,\cdots,a_n^k)\\e^{xA}&=diag(\sum_{k=0}^{\infty}(a_1x)^k,\cdots,\sum_{k=0}^{\infty}(a_nx)^k)\\&=diag(e^{a_1x},\cdots,e^{a_nx})\end{aligned}$$

例 6.2.2.

$$\begin{aligned}A&=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=I+Z\\Z^k&=0(k\geq 2)\\e^{xZ}&=I+xZ\\e^{xA}&=e^{xI+xZ}\\&=\begin{pmatrix}e^x&0\\0&e^x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^x&xe^x\\0&e^x\end{pmatrix}\end{aligned}$$

仿照例 6.2.2 的方法, 可以求二阶齐次线性微分方程的基解矩阵.

若尔当标准型求基解矩阵　对于一般的 n 阶矩阵 A, 存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = J = diag(J_1, \cdots, J_s)$, 其中 J_i 是 n_i 阶若尔当块,

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} \in R^{n_i \times n_i}, n_1 + \cdots + n_s = n$$

$e^{xJ} = diag(e^{xJ_1}, \cdots, e^{xJ_s})$
$e^{xJ_i} = e^{x(\lambda_i I + Z)} = e^{\lambda_i x} e^{xZ}$

$$e^{xZ} = I + x\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}^2 + \cdots + \frac{x^k}{k!}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}^k + \cdots$$

$$= I + x\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & \ddots & \\ & & 0 & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + 0 + \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \cdots & \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ & 1 & x & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \frac{x^2}{2} \\ & & & \ddots & x \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$e^{xA} = e^{xPJP^{-1}} = Pe^{xJ}P^{-1}$
事实上,Pe^{xJ} 就是一个基解矩阵. 实际计算中可取之为基解矩阵, 而不必计算出 e^{xA}.

待定指数函数法求基解矩阵

矩阵 A 只有单特征值　即 A 有 n 个不同的特征值, 记作 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 此时 J_i 就是一阶矩阵 λ_i,

$$J = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$
$$\Phi(x) = P \cdot diag(e^{\lambda_1 x}, \cdots, e^{\lambda_n x})$$
$$P = (r_1, \cdots, r_n)$$
$$\Phi(x) = (e^{\lambda_1 x} r_1, \cdots, e^{\lambda_n x} r_n)$$

$\Phi(x)$ 的每个列向量都是解向量, 代入方程中可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{\lambda_i x} r_i = A e^{\lambda_i x} r_i$$
$$\lambda_i e^{\lambda_i x} r_i = A e^{\lambda_i x} r_i$$
$$(A - \lambda_i I) r_i = 0$$

可以发现 r_i 实际上就是特征值 λ_i 对应的特征向量. 如果特征值 λ_i 是复的,

$$
\begin{aligned}
Ar_i &= \lambda_i r_i \\
A\overline{r_i} &= \overline{\lambda_i}\overline{r_i}
\end{aligned}
$$

所以 $\overline{\lambda_i}$ 也是一个特征值, 相应的特征向量为 $\overline{r_i}$.

A 有相同的特征根 A 的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$, 重数分别为 $n_1, \cdots, n_s$, 并且 $n_1 + \cdots + n_s = n$ 我们需要研究

$$Pe^{xJ} = Pdiag(J_1, \cdots, J_s)$$

取一个 n_i 阶矩阵 $Q = (a_{ij})$,

$$
\begin{aligned}
Qe^{xJ_i} &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n_i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_i1} & \cdots & a_{n_in_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11}x + a_{12} & \cdots & a_{11}\frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} + \cdots + a_{1n_i} \\ a_{21} & a_{21}x + a_{22} & \cdots & a_{21}\frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} + \cdots + a_{2n_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_i1} & a_{n_i1}x + a_{n_i2} & \cdots & a_{n_i1}\frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} + \cdots + a_{n_in_i} \end{pmatrix} \\
&= S
\end{aligned}
$$

不难发现,S 的第 k 列可以写成

$$\sum_{u=1}^{k} \frac{x^{k-u}}{(k-u)!} \begin{pmatrix} a_{1u} \\ a_{2u} \\ \vdots \\ a_{n_iu} \end{pmatrix}$$

所以设 λ_i 对应的解向量为

$$y_i = (r_0 + xr_1 + \cdots + \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} r_{n_i-1})e^{\lambda_i x}$$

带入方程可得

$$
\begin{aligned}
(r_1 + r_2x + \cdots + r_{n_i-1}x^{n_i-2})e^{\lambda_i x} + \\
\lambda_i(r_0 + xr_1 + \cdots + \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} r_{n_i-1})e^{\lambda_i x} &= e^{\lambda_i x}A(r_0 + xr_1 + \cdots + \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} r_{n_i-1}) \\
(r_1 + r_2x + \cdots + r_{n-i-1}x^{n_i-2}) + \\
\lambda_i(r_0 + xr_1 + \cdots + \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} r_{n_i-1}) &= A(r_0 + xr_1 + \cdots + \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} r_{n_i-1}) \\
r_1 + r_2x + \cdots + r_{n_i}x^{n_i-2} &= (A - \lambda_i I)(r_0 + xr_1 + \cdots + \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} r_{n_i-1})
\end{aligned}
$$

上式对于任何 x 都成立, 比较等式两边齐次项

$$\begin{aligned} r_1 &= (A-\lambda_i I)r_0 \\ r_2 &= (A-\lambda_i I)r_1 = (A-\lambda_i I)^2 r_0 \\ &\vdots \\ r_{n_i-1} &= (A-\lambda_i I)r_{n_i-2} = (A-\lambda_i I)^{n_i-1} r_0 \\ 0 &= (A-\lambda_i I)r_{n_i-1} = (A-\lambda_i I)^{n_i} r_0 \end{aligned} \tag{6.6}$$

根据最后一个式子解出 r_0, 再通过递推关系可得到所有解向量.

定理 6.2.2. n 阶实常数矩阵 A 的互不相同的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$, 重数分别为 $n_1, \cdots, n_s$, 并且 $n_1 + \cdots + n_s = n$, 则方程 (6.5) 的基解矩阵为

$$\Phi(x) = (e^{\lambda_1 x}P_1^{(1)}(x) \ \cdots \ e^{\lambda_1 x}P_{n_i}^{(1)}(x) \ e^{\lambda_2 x}P_1^{(2)}(x) \ \cdots \ e^{\lambda_s x}P_1^{(s)}(x) \ \cdots \ e^{\lambda_s x}P_{n_s}^{(s)}(x))$$

其中

$$P_j^{(i)}(x) = r_{j0}^{(i)} + r_{j1}^{(i)}x + \cdots + r_{j_{n_i-1}}^{(i)}\frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!}$$

是与 λ_i 相应的第 j 个向量多项式,$r_{10}^{(i)}, \cdots, r_{n_i0}^{(i)}$ 是 (6.6) 最后一个式子中 r_0 的 n_i 个线性无关的解, 而 $r_{jk}^{(i)}$ 是由 $r_{j0}^{(i)}$ 代入 (6.6) 中递推得到的 r_k.

6.3 高阶线性方程

本节讨论如下高阶线性方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x) \tag{6.7}$$

若令

$$y = (y_1, \cdots, y_n)^T = (y, y', \cdots, y^{(n)})$$

则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix} = A(x)y + F \tag{6.8}$$

根据上一节的结论, 这个方程是存在唯一解的. 我们先考虑它相应的齐次方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0 \tag{6.9}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = A(x)y \tag{6.10}$$

如果 $\phi_1(x), \cdots, \phi_n(x)$ 是 (6.9) 的线性无关解组, 那么 (6.10) 的一个线性无关解组就是

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \phi_n \\ \vdots \\ \phi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

其相应的 wronski 行列式 $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(s)\mathrm{d}s}$

例 6.3.1. 设 $y=\phi(x)$ 是二阶齐次微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{6.11}$$

的一个特解, 那么 (6.11) 的通解为

$$y=\phi(x)(C_1+C_2\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\phi(x)^2}e^{-\int_{x_0}^{s}p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s)$$

例 6.3.2. 设 $\phi_1(x),\phi_2(x)$ 是二阶齐次微分方程 (6.11) 的两个线性无关解, 那么我们就得到了

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=A(x)y \tag{6.11.1}$$

的基解矩阵, 进而可以通过常数变易法求

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \tag{6.12}$$

的通解.

第七章　幂级数解法

本章其实是习题课内容, 但是我正好没去那节习题课, 所以以后有机会再补吧 (逃)

第八章　定性理论

本章介绍了一类特殊的微分方程——动力系统及其相关概念.

8.1　动力系统, 相空间与轨线

给出质点 M 的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v(x), \tag{8.1}$$

它是一个自洽微分方程, 如果该微分方程满足解的存在和唯一性定理的条件, 则对于任何初值条件

$$x(t_0) = x_0 \tag{8.2}$$

方程（8.1）存在唯一的满足初值条件（8.2）的解

$$x = \phi(t, t_0, x_0) \tag{8.3}$$

它描述了质点 M 在 t_0 时刻经过 x_0 点的运动. 我们称 x 取值的空间 R^n 为相空间, 而称 (t, x) 取值的空间 $R^1 \times R^n$ 为增广相空间, 按照微分方程的几何解释, 方程（8.1）在增广相空间中定义了一个线素场, 而解（8.3）在增广相空间中的图像是一条经过点 (t_0, x_0) 与线素场吻合的光滑曲线（积分曲线）.

现在我们从运动的观点给出另一种几何解释: 相空间中每一点都给定了一个速度向量 $v(x)$, 所以它在相空间中定义了一个速度场（向量场）; 而解的表达式在相空间中给出了一条与速度场相吻合的光滑曲线, 称它为轨线, 其中时间 t 为参数, 且参数 t_0 对应于轨线上的点 x_0. 随着时间的演变, 质点的坐标在相空间中沿着轨线变动, 通常用箭头在轨线上标明相应于时间增大时的之巅的运动方向.

由于一般情形下得不出解的明显表达式, 所以我们的目标是：从速度场的特性出发, 去获取轨线的几何特征, 或者更进一步, 去弄清轨线族的拓扑结构图, 也就是所谓相图. 因此, 微分方程的定性理论又被称为几何理论.

如果是 x_0 是速度场的零点, 即 $v(x_0) = 0$, 则显然方程 (8.1) 有一个定常解, 这时我们称 x_0 为方程的一个平衡点或者奇点.
如果解 (8.3) 是一个非定常的周期运动, 即存在 $T > 0$, 使得

$$\phi(t + T, t_0, x_0) = \phi(t, t_0, x_0),$$

则它在相空间中的轨线是一条闭曲线, 亦即闭轨.

例 8.1.1. 已知质点的运动方程为

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y+x(x^2+y^2-1),\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+y(x^2+y^2-1).\end{cases} \tag{8.5}$$

经过极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则可以把方程 (8.5) 特化为

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=r(r^2-1), \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=1$$

解得

$$r=\frac{1}{\sqrt{1-C_1e^{2t}}}, \theta=t+C_2.$$

设初值为 $r(0)=r_0, \theta(0)=\theta_0$（相应于 $P(x_0,y_0)$），得 $C_1=(r_0^2-1)/r_0^2$. 依初值 P 的不同, 系统 (8.5) 的轨线有如下四种不同的类型:

(1).P 位于原点, 此时初值极为奇点;

(2).P 位于单位圆上, 此时 r 为定值,theta 随时间增大, 所以轨线为单位圆, 以逆时针为正方向;

(3).P 位于单位圆内, 此时 r 随时间减小而趋于 0, 所以轨线逆时针盘旋趋于原点处的奇点;

(4).P 位于单位圆外, 此时 r 随时间增大而趋于正无穷, 所以轨线逆时针盘旋远离闭轨单位圆;

动力学意义下, 也把微分方程 (8.1) 称为一个动力系统. 动力系统有几个基本性质：积分曲线的平移不变性、过相空间每一点轨线唯一性、群的性质.

8.2　解的稳定性

定义 8.2.1. 考虑方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x) \tag{8.9}$$

f 在 $t\in(-\infty,+\infty), x\in R^n$ 上连续，并满足进一步的条件使得该方程的解唯一存在。设 $x=\phi(t,t_0,x_0)$ 是在 $t\in(-\infty,+\infty)$ 上, 满足初值条件 $x_0=\phi(t_0,t_0,x_0)$ 的解。任取 $\epsilon>0$，对初值轻微扰动，即存在 $\delta, s.t.|x_1-\phi(t_0)|<\delta, |\phi(t,t_0,x_0)-\phi(t,t_0,x_1)|<\epsilon$ on $\mathrm{t}\in(-\infty,+\infty)$. 那么称这个解是稳定的。如果进一步有 $\lim_{t\to+\infty}|\phi(t,t_0,x_0)-\phi(t,t_0,x_1)|=0$，则称这个解是渐近稳定的。

李雅普诺夫第一方法: 线性化

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x)$$

假如 $x=0$ 是一个解，$f(t,0)=0$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial x}x+N(t,x)=A(x)x+N(t,x) \tag{8.16}$$

其中

$$\lim_{|x|\to0}\frac{|N(t,x)|}{|x|}=0$$

设 A 连续，N 对于 x 满足 Lipschitz 条件。对应的齐次方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}x = A(x)x \tag{8.17}$$

定理 8.2.1. *如果 A 是常数矩阵，那么 (8.17) 的零解:*

1. 渐近稳定　*当且仅当 A 的所有特征值都有负的实部；*

2. 稳定　*当且仅当 A 的所有特征值都有非正实部，并且实部为 0 的特征值对应的若尔当块都是一阶的；*

3. 不稳定　*当且仅当 A 的某个特征值有正实部；*

(8.16) 的零解

1. 渐近稳定　*充分条件为 A 的所有特征值都有负的实部；*

2. 不稳定　*充分条件为 A 的某个特征值有正实部。*

李雅普诺夫第二方法: 直接法

定义 8.2.2. *考虑自治系统*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x) \tag{8.19}$$

有零解，且 f 的一阶偏导连续，并且零点是一个临界点，即去心邻域上不等于零。令 $V(x)$ 为标量连续函数，如果 $V(0) = 0, V(\neq 0) > 0$ 称其正定, 如果 $V(0) = 0, V(\neq 0) < 0$ 称其负定.

定义 8.2.3. *定义 $V(x)$ 关于方程 (8.19) 的导数为*

$$V^*(x) = (\nabla V) \cdot f(x)$$

定理 8.2.2. *若存在 $V(x)$ 在包含原点的某个区域上正定，且 $V^*(x) \leqslant 0$，则 (8.19) 零解稳定。若进一步满足 $V^*(x) < 0$，则零解渐近稳定。若在原点任何邻域内存在 $a, s.t. V^*(a) > 0$，则零解不稳定。*

定理 8.2.3. *若存在 $V(x)$ 在包含原点的某个区域 Ω 上满足 $V^* = \lambda V + W$, 其中 $\lambda > 0, W$ 恒为 0、恒非负、恒非正且使得在原点任何的一个邻域内存在 $a, s.t. V(a)W(a) > 0$，零解不稳定。*

8.3　平面上的动力系统, 奇点

本节讨论平面上的动力系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X(x, y), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Y(x, y), \tag{8.20}$$

其中 X, Y 在实数平面上连续, 并且满足进一步的条件, 以保证初值问题的解唯一.

如果这个方程是有平衡点的, 设 (x_0, y_0) 是这个方程的初等奇点, 即 $\det(\frac{\partial(X,Y)}{\partial(x,y)})|_{(x_0,y_0)} \neq 0$, 否则称之为高阶奇点. 简便起见, 设原点就是方程 (8.20) 的一个初等奇点. 再把 X,Y 写成线性的形式. 由泰勒展开,

$$\begin{aligned} X(x,y) &= X(0,0) + \frac{\partial X}{\partial x}|_{(0,0)}x + \frac{\partial X}{\partial y}|_{(0,0)}y + N_x(x,y) \\ &= ax + by + N_x(x,y) \\ Y(x,y) &= Y(0,0) + \frac{\partial Y}{\partial x}|_{(0,0)}x + \frac{\partial Y}{\partial y}|_{(0,0)}y + N_y(x,y) \\ &= cx + dy + N_y(x,y) \end{aligned} \tag{8.21}$$

所以方程 (8.20) 对应的线性方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax + by, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = cx + dy, \tag{8.22}$$

写成矩阵形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p = Ap, p = (x,y)^T, A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{8.22}$$

把 A 化为若尔当标准型, 存在 T 使得 $T^{-1}AT = D$, 若设 $p = Tq, q = (\psi, \eta)^T$, 那么方程 (8.22) 转化为

$$T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q = ATq$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q = Dq$$

方便起见, 我们假设线性方程 (8.22) 中系数矩阵 A 就是若尔当标准型, 对于二阶若尔当标准型, 有三种情况:

1 A=$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. 得到 $y = C|x|^{\frac{\mu}{\lambda}}$ 或 $x = 0$. 最终产生三种不同的拓扑:

(1) $\lambda = \mu > 0$, 星形结点;

(2) $\lambda \neq \mu, \mu\lambda > 0$, 双向结点;

(3) $\lambda \neq \mu, \mu\lambda < 0$, 鞍点;

2 A=$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$. 得到 $y = \frac{1}{\lambda}x\ln|x| + Cx$ 或 $x = 0$, 形成单向结点.

3　A=$\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$.$\beta$ 正逆负顺,$\alpha=0$ 为中心点, 不等于 0 则为焦点.

总结以上分析, 得到

定理 8.3.1. *初等奇点类型的判定：对于系统 (8.22), 记 $p=-tr(A), q=det(A)$, 则*
1.$q<0$, 为鞍点；
2.$q>0, p^2>4q$, 为两向结点；
3.$q>0, p^2=4q$, 为单向结点或星型结点；
4.$q>0, 0<p^2<4q$, 为焦点；
5.$q>0, p=0$, 为中心点.
情形 2-4 中,$p>0$ 奇点稳定,$p<0$ 奇点不稳定.

利用以下两个性质作出相图：
(1) 当 $t\to\infty$ 时, 有的轨线能沿某一确定的直线 $y=kr(or\ x=ky)$ 趋向奇点 (0,0). 我们把这个直线的走向称为一个特殊方向. 显然, 星形结点有无穷个特殊方向, 两向结点和鞍点有两个特殊方向, 单向结点有一个特殊方向, 而焦点和中心没有特殊方向; 并且当直线 $y=kx(or\ x=ky)$ 给出线性系统 (8.22) 的一个特殊方向时, 此直线被奇点分割的两个射线都是系统的轨线. 此外, 这些性质还在仿射变换下不变.
(2) 线性系统 (8.22) 在相平面上给出的向量场关于原点 (0,0) 是对称的: 如果在 (x,y) 点的向量是 $(P(x,y),Q(x,y))$, 则在 $(-x,-y)$ 点的向量就是 $(-P(x,y),-Q(x,y))$.
回到原本的非线性系统 (8.21). 给出以下三个条件：
$(A)N_x,N_y=o(r), r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$;
(A^*) 任意 $\epsilon>0, N_x,N_y=o(r^{1+\epsilon}), r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$;
$(B)N_x,N_y$ 在奇点附近对 x,y 连续可微.

定理 8.3.2. *$(0,0)$ 是线性系统 (8.22) 的初等奇点：*
(1) 如果 $(0,0)$ 是系统 (8.22) 的焦点且条件 A 成立. 则 $(0,0)$ 也是系统 (8.21) 的焦点, 并且它们的稳定性也相同;
(2) 如果 $(0,0)$ 是系统 (8.22) 的鞍点或两向结点且条件 A 和 B 成立, 则 (0.0) 也分别是系统 (8.21) 的鞍点或两向结点, 并且稳定性也相同;
(3) 如果 $(0,0)$ 是系统 (8.22) 的单向结点且条件 A^* 成立, 则 $(0,0)$ 也是系统 (8.21) 的单向结点, 并且稳定性相同;
(4) 如果 $(0,0)$ 是系统 (8.22) 的星形结点且条件 A^* 和 B 成立, 则 $(0,0)$ 也是系统 (8.21) 的星形结点, 并且稳定性相同.

小结 8.1. *判断奇点类型的步骤：写出系数矩阵, 再根据定理 8.3.1 判断类型.*
画相图的步骤：判断奇点类型, 解出特殊方向, 根据稳定性标注箭头.
注意非线性系统还需要根据定理 8.3.2 来证明其奇点类型和稳定性与相应的线性系统相同.