

微分方程引论

Fir1247

2022 年 09 月-2022 年 12 月

前言

本文档为 2022 年秋季学期赵立丰老师的《微分方程引论》下半学期 PDE 部分的课程笔记。

为避免歧义，本文档中的 $\subset$ ，相当于 $\subseteq, \subsetneq$ ，均表示“包含于”的意思，且只使用第一种形式；本文档中的 $\subsetneq$ ，相当于 $\subsetneq$ ，均表示“真包含于”的意思，且只使用第一种形式。

此外需对表示求偏导的符号进行说明：本文档中的 $\partial_t u, \frac{\partial u}{\partial t}, \partial_t u$ 意义相同。

Fir1247

目录

第一章	波动方程	1
1.1	一阶偏微分方程	1
1.2	波动方程的初值问题介绍	2
1.3	一维初值问题	4
1.4	多维初值问题	5
1.5	能量估计	7
1.6	混合问题	10
第二章	位势方程	15
2.1	调和函数	15
2.2	基本解与 Green 函数	17
2.3	极值原理与最大模估计	20
2.4	最大模估计	21
2.5	能量估计	22

第一章 波动方程

1.1 一阶偏微分方程

考虑方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, t)u = f(x, t) \\ u(x, 0) = \phi(x), -\infty < x < \infty, t > 0 \end{cases}$$

若 $x = x(t)$, 令 $u(x(t), t) = U(t)$, 于是

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \partial_x u \cdot x'(t)$$

若 $x'(t) = a(x(t), t)$, 即

$$\frac{dU}{dt} + b(x(t), t)U(t) = f(x(t), t)$$

令 $x(0) = C$, 则 $U(0) = u(C, 0) = \phi(C)$, 于是

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x(t), t) \\ x(0) = C \end{cases}, \begin{cases} \frac{dU}{dt} + b(x(t), t)U(t) = f(x(t), t) \\ U(0) = \phi(C) \end{cases}$$

分别解出 $x(t)$ 和 $U(t)$ 后, 消去 C 把两者关联起来, 然后将 $x(t)$ 更换为 x 即可。

例 1.1.1

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t) \\ u(x, 0) = \phi(x) \end{cases}$$

解 令 $x'(t) = -a, x(0) = C \Rightarrow x(t) = -at + C$, 于是

$$\frac{dU}{dt} = f(-at + C, t), U(0) = \phi(C)$$

解得

$$U(t) = \int_0^t f(-as + C, s)ds + \phi(C)$$

代入 $C = x + at$, 得到

$$u(x, t) = \int_0^t f(a(t-s) + x, s)ds + \phi(x + at).$$

例 1.1.2

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (x+t)\frac{\partial u}{\partial x} = x \\ u(x,0) = x \end{cases}$$

解 令 $x'(t) = x(t) + t, x(0) = C \Rightarrow x(t) = (C+1)e^t - t - 1$, 于是

$$\frac{dU}{dt} + U(t) = (C+1)e^t - t - 1, U(0) = C$$

解得

$$U(t) = -t + \frac{1}{2}(C+1)(e^t - e^{-t})$$

代入 $C = (x+t+1)e^{-t} - 1$, 得到

$$u(x,t) = -t + \frac{1}{2}(x+t+1)(1 - e^{-2t})$$

1.2 波动方程的初值问题介绍

实际上, 本章我们要研究的方程形式如下:

$$\partial_t^2 u - \Delta u = f(x, t), x \in R^n, t \in I$$

其中 $u(x, t)$ 未知, $\Delta u = \partial_{x_1}^2 u + \cdots + \partial_{x_n}^2 u$.

除此之外还需要一些初值条件, 如果方程被限制在区域 Ω 上, 则还需要加上边值条件:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = f(x, t), x \in \Omega \subset R^n, t \in I \\ u(x, 0) = \phi(x), x \in \Omega \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x), x \in \Omega \\ \text{边值条件} \end{cases} \quad (1.0)$$

边值条件分为三类:

1. $u(x, t) = h(x, t), x \in \partial\Omega$
2. $\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = h(x, t), x \in \partial\Omega$
3. $\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) + \alpha(x, t)u = h(x, t), x \in \partial\Omega$

分别被称为 *Dirichlet*, *Neman*, *Robin* 边值。方程 (1) 称为波动方程的初值问题。

我们先考虑无界的情况,

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = f(x, t), x \in R^n \\ u(x, 0) = \phi(x) \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (1.1)$$

在这种情况下, x 趋于无穷远处时认为 $u(x, t) \rightarrow 0$. 现在把初值问题 (1.1) 拆解一下, 分为

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0, x \in R^n \\ u(x, 0) = \phi(x) \\ \partial_t u(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (1.1.1)$$

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0, x \in R^n \\ u(x, 0) = 0 \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (1.1.2)$$

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = f(x, t), x \in R^n \\ u(x, 0) = 0 \\ \partial_t u(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (1.1.3)$$

并假设 u_1, u_2, u_3 分别是上述三个初值问题的解, 不难验证 $u = u_1 + u_2 + u_3$ 就是初值问题 (1.1) 的解。

定理 1.2.1 设 $u_2 = M_\psi(x, t)$, 则可以取

$$u_1 = \partial_t M_\phi(x, t), u_3 = \int_0^t M_{f_\tau}(x, t - \tau) d\tau.$$

其中, M_ϕ 是指将初值问题 (1.1.2) 中的 $\phi(x)$ 替换为 $\psi(x)$ 后的 u_2 , M_{f_τ} 是指将初值问题 (1.1.2) 中的 $\phi(x)$ 替换为 $f(x, \tau)$ 后的 u_2 .

证明 令 $u = M_\phi$, 于是 u 满足

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0, x \in R^n \\ u(x, 0) = 0 \\ \partial_t u(x, 0) = \phi(x) \end{cases}$$

令 $u_1 = \partial_t u(x, t)$, 则 u_1 满足

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_1 - \Delta u_1 = 0, x \in R^n \\ u_1(x, 0) = \phi(x) \\ \partial_t u_1(x, 0) = \partial_t^2 u(x, 0) = \Delta u(x, 0) = 0 \end{cases}$$

即是初值问题 (1.1.1) 的解。

再令 $u(x, t) = M_{f_\tau}(x, t)$, 即 u 满足

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0, x \in R^n \\ u(x, 0) = 0 \\ \partial_t u(x, 0) = f(x, \tau) \end{cases}$$

令 $v(x, t) = u(x, t - \tau)$, 则 v 满足

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \Delta v = \partial_t^2 u - \Delta u = 0, x \in R^n \\ v(x, \tau) = u(x, 0) = 0 \\ \partial_t v(x, \tau) = \partial_t u(x, 0) = f(x, \tau) \end{cases}$$

再令 $u_3(x, t) = \int_0^t v d\tau$, 于是

$$\begin{aligned}\partial_t u_3(x, t) &= v(x, \tau) + \int_0^t \partial_t v d\tau = \int_0^t \partial_t v d\tau \\ \partial_t^2 u_3(x, t) &= \partial_t v(x, \tau) + \int_0^t \partial_t^2 v d\tau \\ &= f(x, t) + \int_0^t \Delta v d\tau \\ &= f(x, t) + \Delta \int_0^t v d\tau = f(x, t) + \Delta u_3\end{aligned}$$

所以有 $\partial_t^2 u_3(x, t) - \Delta u_3 = f(x, t)$. 除此之外容易验证

$$u_3(x, 0) = 0, \partial_t u_3(x, 0) = 0$$

所以 u_3 是初值问题 (1.1.3) 的解。 □

1.3 一维初值问题

考虑 R 上的初值问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = f(x, t), x \in R, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (1.2)$$

我们先考虑 f, ϕ 恒等于 0 的情况, 并假设这种情况下的解为 u_2 .

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0, x \in R, t > 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (1.2.2)$$

因为 $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = (\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x)u$, 所以设 $v = \partial_t u - \partial_x u$, 则有

$$\begin{cases} \partial_t v + \partial_x v = 0 \\ v(x, 0) = \phi(x) \end{cases} \quad (1.3)$$

容易得到一个解就是 $v = \psi(x - t)$., 于是又有

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x u = \psi(x - t) \\ u(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

这也是一个一阶偏微分方程, 可解出

$$u(x, t) = \int_0^t \psi(x + t - 2\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(y) dy.$$

即 $u_2(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(y) dy$, 根据定理 1.2.1 得到

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \phi(y) dy \right) = \frac{1}{2} (\phi(x+t) + \phi(x-t)) \\ u_3(x, t) &= \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(y, \tau) dy d\tau \end{aligned}$$

于是

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\phi(x+t) + \phi(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(y) dy + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(y, \tau) dy d\tau$$

此式被称为 *d'Alembert* 公式。

我们知道, 物理意义上的 f 相当于外力, 如果它恒为 0, 则可令

$$F(x) = \frac{1}{2} \phi(x) + \frac{1}{2} \int_0^x \psi(y) dy, G(x) = \frac{1}{2} \phi(x) - \frac{1}{2} \int_0^x \psi(y) dy$$

于是 $u(x, t) = F(x+t) + G(x-t)$, 相当于左行波和右行波的叠加。

定理 1.3.1 若 $\phi \in C^2(R), \psi \in C^1(R), f \in C^1(R \times R^+)$, 则由 *d'Alembert* 公式给出的 u 满足 $u \in C^2(R \times R^+)$.

推论 1.3.1 若 ϕ, ψ, f 是关于 x 的偶、奇、周期函数, 则由 *d'Alembert* 公式给出的 u 也具有相同性质。

下面讨论半无界的情况, 这种情况下需要给出边值条件, 这节课后面没录上, 草泥马的。

1.4 多维初值问题

我们先来考虑三维的情况:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = f(x, t), x \in R^3, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (1.5)$$

换用极坐标 (r, ω) 表示, $\Delta u = \partial_r^2 u + 2r^{-1} \partial_r u + r^{-2} \Delta_{S^2} u$. S^2 为单位球面。于是

$$\partial_t^2 u - (\partial_r^2 u + 2r^{-1} \partial_r u + r^{-2} \Delta_{S^2} u) = f(x, t)$$

我们先考虑 $f = 0$ 的情况, 先对上式两边同时在 S^2 上积分,

$$\partial_t^2 \int_{S^2} u d\omega - (\partial_r^2 \int_{S^2} u d\omega + 2r^{-1} \partial_r \int_{S^2} u d\omega + r^{-2} \int_{S^2} \Delta_{S^2} u d\omega) = 0$$

由于

$$\int_{S^2} \Delta_{S^2} u d\omega = 0$$

所以有

$$\partial_t^2 \int_{S^2} u d\omega - (\partial_r^2 \int_{S^2} u d\omega + 2r^{-1} \partial_r \int_{S^2} u d\omega) = 0$$

令

$$\bar{u}(r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} u d\omega$$

则

$$\partial_t^2 \bar{u} - \partial_r^2 \bar{u} + 2r^{-1} \partial_r \bar{u} = 0$$

令 $v(r, t) = r\bar{u}(r, t)$, 则

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \partial_r^2 v = 0 \\ v(0, r) = r\bar{u}(0, r) = r\bar{\phi}(r), r \geq 0 \\ \partial_t u(0, r) = r\bar{\psi}(r) \end{cases} \quad (1.6)$$

这是一个半无界一维初值问题, 将 v 等函数都关于 r 偶延拓, 延拓之后仍记为 v , 则根据 $d'Alembert$ 公式可得

$$v(r, t) = \frac{1}{2} ((r+t)\bar{\phi}(r+t) + (r-t)\bar{\phi}(r-t)) + \frac{1}{2} \int_{r-t}^{r+t} y\bar{\psi}(y) dy$$

我们先求出各个函数 $r=0$ 时的情况, 然后根据平移不变性得出整个函数:

$$\begin{aligned} \partial_r r\bar{u}(r, t) &= \bar{u}(r, t) + \partial_r \bar{u}(r, t) \\ \bar{u}(0, t) &= \partial_r r\bar{u}(0, t) = \partial_r v(0, t) \\ &= \frac{1}{2} (\bar{\phi}(t) + t\bar{\phi}'(t) + \bar{\phi}(-t) + (-t)\bar{\phi}'(-t)) + \frac{1}{2} (t\bar{\psi}(t) - (-t)\bar{\psi}(-t)) \\ &= \bar{\phi}(t) + t\bar{\phi}'(t) + t\bar{\psi}(t) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} \phi(t\omega) d\omega + \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} \psi(t\omega) d\omega \end{aligned}$$

从而得到

$$u(x, t) = \frac{d}{dt} \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} \phi(x + t\omega) d\omega + \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} \psi(x + t\omega) d\omega$$

令 $y = x + t\omega$, 则 $dS(y) = t^2 d\omega$, 得到

$$u(x, t) = \frac{d}{dt} \frac{1}{4\pi t} \int_{|y-x|=t} \phi(y) dy + \frac{1}{4\pi t} \int_{|y-x|=t} \psi(y) dy$$

如果 f 不恒为 0, 那么

$$u(x, t) = \frac{d}{dt} \frac{1}{4\pi t} \int_{|y-x|=t} \phi(y) dy + \frac{1}{4\pi t} \int_{|y-x|=t} \psi(y) dy + \int_0^t \frac{1}{4\pi(t-\tau)} \int_{|y-x|=t-\tau} f(y, \tau) dy d\tau$$

该式被称为基尔霍夫公式。

对于二维的情况, 当作三维求解即可, 得到

$$u(x, t) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2\pi} \int_{|y-x| \leq t} \frac{\phi(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dy + \frac{1}{2\pi} \int_{|y-x| \leq t} \frac{\psi(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dy$$

1.5 能量估计

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 u - \Delta u = 0 &\Rightarrow \partial_t u (\partial_t^2 u - \Delta u) = 0 \\
&\Rightarrow \frac{1}{2} \partial_t (\partial_t u)^2 = \partial_t u \Delta u \\
&= \partial_t u \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 u \\
&= \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} (\partial_t u \partial_{x_i} u) - (\partial_t \partial_{x_i} u) \partial_{x_i} u) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\partial_{x_i} (\partial_t u \partial_{x_i} u) - \frac{1}{2} \partial_t (\partial_{x_i} u)^2 \right) \\
&= \operatorname{div}(\partial_t u \nabla u) - \frac{1}{2} \partial_t |\nabla u|^2
\end{aligned}$$

得到

$$\frac{1}{2} \partial_t ((\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2) - \operatorname{div}(\partial_t u \nabla u) = 0$$

此为能量守恒的微分形式。两边在 R^n 上求积分, 得到

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_t \int_{R^n} \frac{1}{2} ((\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2) dx - \int_{R^n} \operatorname{div}(\partial_t u \nabla u) dx \\
&= \partial_t \int_{R^n} \frac{1}{2} ((\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2) dx - \int_{\partial R^n} \partial_t u \frac{\partial u}{\partial n} dx \\
&= \partial_t \int_{R^n} \frac{1}{2} ((\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2) dx
\end{aligned}$$

于是令

$$E(t) = \int_{R^n} \frac{1}{2} ((\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2) dx$$

$E(t)$ 关于时间不变, 所以 $E(t) = E(0)$, 此即为能量守恒。此式被称为诺特定理。

此外, 如果限制在区域 Ω 上, 且区域边值为 0, 同样有

$$E(t) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} ((\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2) dx$$

利用能量估计, 我们可以证明解的唯一性。考虑初值问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = f(x, t), x \in \Omega \subset R^n, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), x \in \Omega \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x), x \in \Omega \\ u(x, t) = h(x, t), x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.7)$$

假设 u_1, u_2 都是 (1.7) 的解, 那么设 $u = u_1 - u_2$, 满足

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0, x \in \Omega \subset R^n, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, x \in \Omega \\ \partial_t u(x, 0) = 0, x \in \Omega \\ u(x, t) = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.7.1)$$

则根据诺特定理, 得到

$$E(t) = \int_{R^n} \frac{1}{2} ((\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2) dx = E(0) = 0$$

于是

$$\partial_t u = 0, \nabla u = 0, x \in \Omega$$

u_1, u_2 时古典解, 即在区域 Ω 内二阶可微, 则 $u = Const = u(x, 0) = 0, x \in \Omega$. 唯一性得证.
我们还能够证明稳定性,

定理 1.5.1 初值问题 (1.7) 的解在下述意义下关于初值和右端项是稳定的:

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon, T)$ s.t. 若

$$\|\phi_1 - \phi_2\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta, \|\nabla \phi_1 - \nabla \phi_2\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta, \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta, \|f_1 - f_2\|_{L^2(0,T;\Omega)} \leq \delta,$$

则 u_1, u_2 在 $0 \leq t \leq T$ 上满足

$$\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon, \|\partial_t u_1 - \partial_t u_2\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon$$

其中

$$\|f(x)\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|f(x)\|_{L^2(0,T;\Omega)} = \left(\int_0^T \int_{\Omega} (f(x,t))^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

证明 令 $u = u_1 - u_2, f = f_1 - f_2, \phi = \phi_1 - \phi_2, \psi = \psi_1 - \psi_2$. 于是 u 满足

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = f, x \in \Omega \subset R^n, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi, x \in \Omega \\ \partial_t u(x, 0) = \psi, x \in \Omega \\ u(x, t) = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.7.2)$$

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \Delta u = f &\Rightarrow \partial_t u (\partial_t^2 u - \Delta u) = f \partial_t u \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \partial_t (\partial_t u)^2 - \partial_t u \Delta u = f \partial_t u \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \partial_t ((\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2) - \operatorname{div}(\partial_t u \nabla u) = f \partial_t u \\ &\Rightarrow \partial_t \int_{\Omega} \frac{1}{2} ((\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2) dx = \int_{\Omega} f \partial_t u dx = \partial_t E(t) \end{aligned}$$

对右侧进行放缩,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f \partial_t u dx \right| &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |f|^2 + |\partial_t u|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |f|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\partial_t u|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |f|^2 dx + E(t) \end{aligned}$$

即

$$\partial_t E(t) \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |f|^2 dx + E(t)$$

由 *Gronwall* 不等式可得

$$E(t) \leq e^t \left(E(0) + \frac{1}{2} \int_0^t e^{-s} \int_{\Omega} |f(x, s)|^2 dx ds \right)$$

$0 \leq s \leq t < T$, 所以有

$$\begin{aligned} E(t) &\leq e^t \left(E(0) + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} |f(x, s)|^2 dx ds \right) \\ &\leq C \left(E(0) + \int_0^T \int_{\Omega} |f(x, s)|^2 dx ds \right) \end{aligned}$$

再令

$$y(t) = \int_{\Omega} u^2 dx$$

则

$$\begin{aligned} \partial_t y &= 2 \int_{\Omega} u \partial_t u dx \leq \int_{\Omega} u^2 dx + \int_{\Omega} (\partial_t u)^2 dx \\ &\leq y + 2e^T \left(E(0) + \int_0^T \int_{\Omega} |f(x, s)|^2 dx ds \right) \end{aligned}$$

再用 *Gronwall*

$$y \leq C \left(y(0) + E(0) + \int_0^T \int_{\Omega} |f(x, s)|^2 dx ds \right)$$

因此

$$\begin{aligned} &\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_t u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \left(\|\phi\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \int_{\Omega} |f(x, s)|^2 dx ds \right) \\ &\leq 4C\delta^2 \triangleq \frac{1}{2}\epsilon < \epsilon \end{aligned}$$

我们最后再来说明一下有限传播速度, 考虑初值问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

第一步同样是得到 $\frac{1}{2} \partial_t ((\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2) - \operatorname{div}(\partial_t u \nabla u) = 0$, 也就是

$$\partial_t E(t) - \operatorname{div}(\partial_t u \nabla u) = 0$$

然后我们取锥台 $V: |x - x_0| \leq R - t$, 在锥台上求积分, 锥台的上底面、下底面、侧面记为 T, B, K .

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_V \partial_t E(t) - \operatorname{div}(\partial_t u \nabla u) dx dt \\
 &= \int_V (\partial_t, \nabla_x) \cdot (E(t), -\partial_t u \nabla u) dx dt \\
 &= \int_{\partial V} (E(t), -\partial_t u \nabla u) \cdot \vec{n} dS \\
 &= \int_B -E(0) dx + \int_T E(t_0) dx + \int_K (E(t), -\partial_t u \nabla u) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{R-t}{|R-t|}, \frac{x-x_0}{|x-x_0|} \right) dS \\
 \int_B E(0) dx &= \int_T E(t_0) dx + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_K (E(t), -\partial_t u \nabla u) \cdot \left(1, \frac{x-x_0}{|x-x_0|} \right) dS \\
 \int_B E(0) dx &= \int_T E(t_0) dx + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_K E(t) - \partial_t u \nabla u \cdot \frac{x-x_0}{|x-x_0|} dS \\
 \int_B E(0) dx &= \int_T E(t_0) dx + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_K \frac{1}{2} ((\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2) - \partial_t u \nabla u \cdot \frac{x-x_0}{|x-x_0|} dS \\
 \int_B E(0) dx &= \int_T E(t_0) dx + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_K \left(\partial_t u + \frac{x-x_0}{|x-x_0|} \cdot \nabla u \right)^2 + |\nabla u|^2 - \left| \frac{x-x_0}{|x-x_0|} \cdot \nabla u \right|^2 dS
 \end{aligned}$$

记作

$$\int_B E(0) dx = \int_T E(t_0) dx + Flux(0, t)$$

$Flux(0, t)$ 是指从侧面流出的能量, 上式代表的物理意义就是: 初始面 B 的能量, 等于 t_0 时面 T 的能量, 加上侧面 K 流出的能量。不难看出, 侧面流出的能量 $Flux$ 是非负的。

初始面 B 决定了整个区域 V 的能量, 这就是波的有限传播速度。

1.6 混合问题

定义 1.6.1 常微分方程齐次边值问题

$$\begin{cases} X(x)'' + \lambda X(x) = 0, x \in (0, L) \\ -\alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0) = 0 \\ \alpha_2 X'(L) + \beta_2 X(L) = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

其中 $\alpha_i, \beta_i \geq 0, \alpha_i + \beta_i > 0, i = 1, 2$.

这被称为 *Storm-Liouville* 特征值问题, λ 称为特征值, 非零解 X 称为对应于这个特征值的特征函数。

注 其实这就是求微分算子 $-\frac{d^2}{dx^2}$ 的特征向量。

定理 1.6.1 关于此问题, 有如下性质:

(1) 所有的特征值都是实数, 且当 $\beta_1 + \beta_2 > 0$ 时, 所有的特征值都是正数。

(2) 不同特征值对应的特征函数相互正交, 即

$$\int_0^L X_1 X_2 dx = 0$$

(3) 所有特征值组成一个单调递增以无穷远点为聚点的数列.

(4) 不同特征值对应的特征函数组成函数空间 $L^2(0, L)$ 上的正交基, 任意函数 $f \in L^2(0, L)$ 都可以按照特征函数展开为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x), C_n = \frac{\int_0^L f(x) X_n(x) dx}{\int_0^L X_n(x)^2 dx}.$$

注 如果 $\alpha_i = 0$, 得到的正交基就是 $\{\sin(nx)\}$, 这就是傅里叶展开得到的正弦级数。

考虑一维波动方程的初值问题:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = f(x, t), x \in (0, l) \\ u(x, 0) = \phi(x), x \in [0, l] \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x), x \in [0, l] \\ u(0, t) = g_1(t), u(l, t) = g_2(t). \end{cases} \quad (1.9)$$

我们先考虑 f, g_1, g_2 恒等于 0 的情况:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0, x \in (0, l) \\ u(x, 0) = \phi(x), x \in [0, l] \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x), x \in [0, l] \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0. \end{cases} \quad (1.9.1)$$

假设 $u(x, t) = T(t)X(x)$,

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 &\Rightarrow T''(t)X(x) = X''(x)T(t) \\ &\Rightarrow \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \\ &\Rightarrow T''(t) + \lambda T(t) = 0, X''(x) + \lambda X(x) = 0. \end{aligned}$$

又有初值条件可知, $X(0) = X(l) = 0$. 根据定理 1.6.1, 特征函数

$$X_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n}x), \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, n = 1, 2, \dots$$

与之对应的

$$T_n(t) = A_n \cos(\sqrt{\lambda_n}t) + B_n \sin(\sqrt{\lambda_n}t)$$

当然, $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$ 并不满足初值条件, 我们考虑 u_n 的叠加:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(\sqrt{\lambda_n}t) + B_n \sin(\sqrt{\lambda_n}t) \right) \sin(\sqrt{\lambda_n}x) \\ u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\sqrt{\lambda_n}x) = \phi(x) \\ \partial_t u(x, 0) &= \sqrt{\lambda_n} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\sqrt{\lambda_n}x) = \psi(x) \end{aligned}$$

我们知道

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(\sqrt{\lambda_n}x) \\ f_n &= \frac{\int_0^l f(x) \sin(\sqrt{\lambda_n}x) dx}{\int_0^L \sin^2(\sqrt{\lambda_n}x) dx} = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin(\sqrt{\lambda_n}x) dx \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin(\sqrt{\lambda_n}x) dx \\ B_n &= \frac{2}{l\sqrt{\lambda_n}} \int_0^l \psi(x) \sin(\sqrt{\lambda_n}x) dx \end{aligned}$$

如果 f 不恒为 0, 即

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = f(x, t), x \in (0, l) \\ u(x, 0) = \phi(x), x \in [0, l] \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x), x \in [0, l] \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0. \end{cases} \quad (1.9.2)$$

令

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(\sqrt{\lambda_n}x)$$

把各项函数在正交基 $\{\sin(\sqrt{\lambda_n}x)\}$ 上分解,

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin(\sqrt{\lambda_n}x) \\ \phi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \sin(\sqrt{\lambda_n}x) \\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin(\sqrt{\lambda_n}x) \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\partial_t^2 u - \partial_x^2 u &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n T_n(t) + T_n''(t) \right) \sin(\sqrt{\lambda_n} x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin(\sqrt{\lambda_n} x) \\ \Rightarrow \lambda_n T_n(t) + T_n''(t) &= f_n(t)\end{aligned}$$

以及初值条件

$$T_n(0) = \phi_n, T_n'(0) = \psi_n$$

解得

$$T_n(t) = \phi_n \cos(\sqrt{\lambda_n} t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \psi_n \sin(\sqrt{\lambda_n} t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t f_n(\tau) \sin(\sqrt{\lambda_n}(t - \tau)) d\tau.$$

如果 g_1, g_2 不恒为 0, 只需取

$$v = u - \left[\frac{l-x}{l} g_1(t) + \frac{x}{l} g_2(t) \right]$$

于是 v 就满足齐次边值问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \partial_x^2 v = f(x, t), x \in (0, l) \\ v(x, 0) = \phi(x) - \left[\frac{l-x}{l} g_1(0) + \frac{x}{l} g_2(0) \right] = \tilde{\phi}(x), x \in [0, l] \\ \partial_t v(x, 0) = \psi(x) - \left[\frac{l-x}{l} g_1'(0) + \frac{x}{l} g_2'(0) \right] = \tilde{\psi}(x), x \in [0, l] \\ v(0, t) = 0, v(l, t) = 0. \end{cases} \quad (1.9.3)$$

注 仅作为练习, 在这里通过能量估计证明一下解的唯一性。对于初值问题 (1.9), 设 u_1, u_2 是它的两个解, 记 $u = u_1 - u_2$, 则

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0, x \in (0, l) \\ u(x, 0) = 0, x \in [0, l] \\ \partial_t u(x, 0) = 0, x \in [0, l] \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0. \end{cases}$$

根据 $u(0, t) = u(l, t) = 0$, 可知 $\partial_t u(0, t) = \partial_t u(l, t) = 0$.

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$$

$$\partial_t u (\partial_t^2 u - \partial_x^2 u) = 0$$

$$\frac{1}{2} \partial_t (\partial_t u)^2 = \partial_t u \partial_x^2 u$$

$$\frac{1}{2} \partial_t (\partial_t u)^2 = \partial_x (\partial_t u \partial_x u) - \partial_x \partial_t u \cdot \partial_x u$$

$$\frac{1}{2} (\partial_t (\partial_t u)^2 + \partial_t (\partial_x u)^2) = \partial_x (\partial_t u \partial_x u)$$

$$\partial_t \frac{1}{2} ((\partial_t u)^2 + (\partial_x u)^2) = \partial_x (\partial_t u \partial_x u)$$

$$\frac{1}{2} \partial_t \int_0^l ((\partial_t u)^2 + (\partial_x u)^2) dx = \partial_t u \partial_x u|_0^l = 0$$

$$\frac{1}{2} \int_0^l ((\partial_t u)^2 + (\partial_x u)^2) dx = E(t) = E(0)$$

$$\partial_t u(x, 0) = 0, \partial_x u(x, 0) = 0 \Rightarrow \partial_t u = \partial_x u = 0 \Rightarrow u(x, t) = u(x, 0) = 0.$$

唯一性得证。

第二章 位势方程

本章我们要介绍的方程形式如下

$$\begin{cases} \Delta u = f(x, t), x \in \Omega \\ \text{边值条件} \end{cases}$$

2.1 调和函数

定义 2.1.1 如果函数 $u: \Omega \rightarrow R$ 具有二阶连续偏导数, 且 $\Delta u = 0$, 称 u 是调和函数。

设函数 $f: R^n \rightarrow R$,

$$\int_{R^n} f(x) dx = \int_0^\infty \int_{\partial B(x_0, r)} f(y) dS_{(y)} dr$$

其中, $B(x_0, r)$ 代表 x_0 为中心、半径为 r 的球体, 而 $y \in \partial B(x_0, r) \Leftrightarrow |y - x_0| = r \Leftrightarrow y = x_0 + r\omega$, ω 是单位向量, 表示朝向。 $dS_{(y)}$ 代表 y 所在的面积元。因此

$$\int_{R^n} f(x) dx = \int_0^\infty \int_{|\omega|=1} f(x_0 + r\omega) dS_{(\omega)} r^{n-1} dr$$

此外还有一个等式 (证明略)

$$\frac{d}{dr} \int_{B(x_0, r)} f(x) dx = \int_{\partial B(x_0, r)} f(y) dS_{(y)} dr$$

定义 2.1.2 $u \in C(\Omega)$, 称 u 满足平均值性质, 如果

$$\forall B(x, r) \subset \Omega, u(x) = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(x) dx$$

$|B(x, r)|$ 就是球的体积, 即

$$|B(x, r)| = \int_{B(x, r)} dx = \frac{4\pi r^3}{3}, \Omega \subset R^3.$$

称 u 满足第二平均值性质, 如果

$$\forall B(x, r) \subset \Omega, u(x) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} f(y) dS_{(y)}$$

这两个性质实际上是等价的。

定理 2.1.1 如果 u 在 Ω 上调和, 则 u 满足第二平均值性质。

定理 2.1.2 如果 $u \in C^2(\Omega)$ 且满足第二平均值性质, 则 u 在 Ω 上光滑且调和。

证明见 11.28 课程回放, 目前不清楚重不重要, 先不弄了。

定理 2.1.3 (Harnack 不等式) u 在 Ω 上是非负调和函数, 对于 Ω 上任意连通紧集 V , 存在常数 C 使得

$$\sup_V u \leq C \inf_V u.$$

C 是与 V 和维数 n 有关的常数。

证明 只要证明 $\forall x, y \in V, u(x) \leq Cu(y)$ 即可。

先考虑两点间距离较短的情况: 设 $r = \frac{1}{2} \text{dist}(V, \partial\Omega)$, $\text{dist}(V, \partial\Omega) = \inf|a - b|, a \in V, b \in \partial\Omega$. 对于 $\forall x, y \in V, |x - y| < r, B(y, r) \subset B(x, 2r) \subset \Omega$. u 非负, 于是

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{|B(x, 2r)|} \int_{B(x, 2r)} u(z) dz \\ &\geq \frac{1}{|B(x, 2r)|} \int_{B(y, r)} u(z) dz \\ &= \frac{1}{2^n} \frac{1}{|B(y, r)|} \int_{B(y, r)} u(z) dz \\ &= \frac{1}{2^n} u(y). \end{aligned}$$

V 是连通紧集, 所以 x, y 之间存在一条曲线把两点相连, 曲线上每个点都存在一个半径为 $r/2$ 的开球 $B \subset V$, 这些开球的开覆盖必有子覆盖, 即有限个开球 $B_1, \dots, B_N$ 可覆盖这条曲线上的所有点, 且 $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$. 于是我们取 $x \in B_1, x_1 \in B_1 \cap B_2, x_2 \in B_2 \cap B_3, \dots, x_{N-1} \in B_{N-1} \cap B_N, y \in B_N$. 就有

$$u(x) \leq 2^n u(x_1) \leq \dots \leq 2^{(N-1)n} u(x_{N-1}) \leq 2^{Nn} u(y) = Cu(y).$$

定理 2.1.4 (梯度估计) u 在 $B_R = B(x_0, R)$ 上调和, 则

$$|\nabla u(x_0)| \leq \frac{n}{R} \max_{B_R} u$$

如果 u 还满足非负, 则有

$$|\nabla u(x_0)| \leq \frac{n}{R} u(x_0)$$

推论 2.1.1 (Liouville 定理) R^n 上的上有界或下有界调和函数必为常数。

证明 只证明上有界的情况, 下有界同理。设 M 是上界, 令 $v = M - u$, v 是非负调和函数。于是应用上面的定理

$$|\nabla v(x)| \leq \frac{n}{R} v(x) = \frac{n}{R} (M - u(x))$$

R 是任意的, 所以令 R 趋于无穷, 则有 $|\nabla v(x)| = 0$. 所以 v 是一个常数, 因此 u 也是一个常数。

2.2 基本解与 Green 函数

定义 2.2.1 如果 $u = \delta$, 则称 u 是基本解。 δ 是一种分布, 指函数在除了原点的其余区域都为 0.

若 u 是径向对称的, $\Delta u = \partial_r^2 u + (n-1)r^{-1}\partial_r u + r^{-2}\Delta_{S^n} u = \partial_r^2 u + 2r^{-1}\partial_r u = 0$. 解得

$$u(r) = \begin{cases} C_1 r^{-(n-2)} + C_2, n \geq 3 \\ C_1 \ln r + C_2, n = 2 \end{cases}$$

函数

$$\Gamma(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln|x|, n = 2 \\ \frac{1}{\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}, n \geq 3 \end{cases}, x \in R^n, x \neq 0.$$

是拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$ 的基本解, 其中 ω_n 是 n 维球面的面积。

定理 2.2.1 (Green 公式) 若 $u \in C^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$, 则

$$\int_{\Omega} u \Delta v dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

u, v 交换后相减, 得到

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS$$

也叫第二 Green 公式。

定理 2.2.2 考虑 R^3 上的开集 Ω , $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ 且 u 调和, 则

$$\forall x_0 \in \Omega, u(x_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(-u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|x - x_0|} \right) + \frac{1}{|x - x_0|} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS_{(x)}$$

证明 根据平移不变性, 我们不妨设 $x_0 = 0$. 设区域

$$\Omega_{\epsilon} = \Omega - \overline{B} = \Omega - \overline{B(0, \epsilon)}$$

并设函数

$$v = \frac{1}{4\pi|x|}$$

显然, $u, v \in C^2(\Omega_\epsilon) \cap C^1(\overline{\Omega_\epsilon})$ 且调和, 于是

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\Omega_\epsilon} (u\Delta v - v\Delta u)dx = \int_{\partial\Omega_\epsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega \cup \partial B} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|x|} \right) - \frac{1}{|x|} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|x|} \right) - \frac{1}{|x|} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS + I \\
 I &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B} \left(-u \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) dS \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon^2} \int_{\partial B} u dS + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial n} dS \\
 &= u(0) + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\partial B} \Delta u dx = u(0) \\
 u(0) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(-u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|x|} \right) + \frac{1}{|x|} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS
 \end{aligned}$$

即

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(-u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|x - x_0|} \right) + \frac{1}{|x - x_0|} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS_{(x)}$$

如果 g 在 Ω 上调和, 且 $g|_{\partial\Omega} = \frac{1}{4\pi|x-x_0|}$, 则关于 u 的方程

$$\begin{cases} \Delta u = 0, x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \phi(x) \end{cases}$$

可得

$$0 = \int_{\Omega} (u\Delta g - g\Delta u)dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS$$

而

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(-u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|x - x_0|} \right) + \frac{1}{|x - x_0|} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS_{(x)}$$

两式相减得到

$$\begin{aligned}
 u(x_0) &= \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(g - \frac{1}{4\pi|x - x_0|} \right) - \left(g - \frac{1}{4\pi|x - x_0|} \right) \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \\
 &= \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial}{\partial n} \left(g - \frac{1}{4\pi|x - x_0|} \right) dS
 \end{aligned}$$

若令 $G(x, x_0) = -g + \frac{1}{4\pi|x-x_0|}$, 则有

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial G}{\partial n} dS_{(x)} = \int_{\partial\Omega} \phi(x) \frac{\partial G}{\partial n} dS_{(x)}$$

式中的 G 就是 *Green* 函数。

定义 2.2.2 Ω 上算子 $-\Delta$ 的 Green 函数满足:

- (1) G 在 Ω 上除了点 x_0 外二阶连续可微且调和;
- (2) $G|_{\partial\Omega} = 0$;
- (3) $-G + \frac{1}{4\pi|x-x_0|}$ 在 $x = x_0$ 处有限, 且处处二阶连续可微并调和。

半空间 $\{(x, y, z) \in R^3, z > 0\}$ 上的 Green 函数为

$$G(x, x_0) = \frac{1}{4\pi|x-x_0|} - \frac{1}{4\pi|x-x_0^*|}, x_0 = (x_1, x_2, x_3), x_0^* = (x_1, x_2, -x_3).$$

球 $B(0, R)$ 上的 Green 函数为

$$G(x, x_0) = \frac{1}{4\pi|x-x_0|} - \frac{R}{4\pi|x_0|} \frac{1}{|x-x_0^*|}, x_0^* = \frac{R^2}{|x_0|^2} x.$$

我们现在来求一下 $B = B(0, R)$ 上的 $u(x_0)$:

$$\begin{aligned} \nabla G &= -\frac{x}{4\pi|x-x_0|^3} \frac{R^2 - |x_0|^2}{R^2} \\ \frac{\partial G}{\partial n} &= \nabla G \cdot \frac{x}{R} = -\frac{1}{4\pi|x-x_0|^3} \frac{R^2 - |x_0|^2}{R} \\ u(x_0) &= \frac{R^2 - |x_0|^2}{4\pi R} \int_{\partial\Omega} \frac{\phi(x)}{|x-x_0|^3} dS_{(x)} \end{aligned}$$

即

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{4\pi R} \int_{\partial\Omega} \frac{\phi(y)}{|x-y|^3} dS_{(y)}$$

上式称为泊松公式。

定理 2.2.3 u 在 $\Omega = B(x_0, R)$ 上是非负调和函数, 则

$$\frac{R}{R+r} \frac{R-r}{R+r} u(x_0) \leq u(x) \leq \frac{R}{R-r} \frac{R+r}{R-r} u(x_0)$$

其中 $r = |x - x_0| < R$.

证明 根据平移不变性, 我们只需证 $x_0 = 0$ 的情况, 于是 $r = |x| = R$. 在 $\Omega = B(0, R)$ 上

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{4\pi R} \int_{\partial\Omega} \frac{u(y)}{|x-y|^3} dS_{(y)}$$

由于 $R-r \leq |x-y| \leq R+r$, 所以

$$\begin{aligned} \frac{R^2 - x^2}{4\pi R(R+r)^3} \int_{\partial\Omega} u(y) dS_{(y)} &\leq u(x) \leq \frac{R^2 - x^2}{4\pi R(R-r)^3} \int_{\partial\Omega} u(y) dS_{(y)} \\ \Rightarrow \frac{R^2 - x^2}{4\pi R(R+r)^3} u(0) &\leq u(x) \leq \frac{R^2 - x^2}{4\pi R(R-r)^3} u(0) \\ \Rightarrow \frac{R^2 - r^2}{4\pi R(R+r)^3} u(0) &\leq u(x) \leq \frac{R^2 - r^2}{4\pi R(R-r)^3} u(0) \end{aligned}$$

化简后结论得证。

2.3 极值原理与最大模估计

定义

$$\mathcal{L}u = -\Delta u + c(x)u, c(x) \geq 0, x \in \Omega.$$

定理 2.3.1 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ 且 $\mathcal{L}u = f < 0$, 如果 u 在 $\overline{\Omega}$ 上的最大值非负, 则 u 必在 $\partial\Omega$ 上达到 u 在 $\overline{\Omega}$ 上的非负最大值,

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+$$

证明 (反证) 假设 u 在 $x_0 \in \Omega$ 上达到的最大值就是在 $\overline{\Omega}$ 上的非负最大值, 于是

$$\nabla u(x_0) = 0, \Delta u(x_0) = \text{tr}(\text{Hes } u)(x_0) \leq 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}u(x_0) = -\Delta u(x_0) + c(x_0)u(x_0) \geq 0$$

矛盾。

定理 2.3.2 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ 且 $\mathcal{L}u = f \leq 0$. 若 u 在 $\overline{\Omega}$ 上的最大值为正, 则 u 必在 $\partial\Omega$ 上达到 u 在 $\overline{\Omega}$ 上的非负最大值,

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+$$

证明 不妨设 $0 \in \Omega$, d 为 Ω 的直径 (即两点最大间距), 令 $v(x) = |x|^2 - d^2 \leq 0, u_\epsilon = u + \epsilon v, \epsilon > 0$. 于是

$$\mathcal{L}u_\epsilon = f + \epsilon(-\Delta v + c(x)v) = f - 2n\epsilon + c(x)(|x|^2 - d^2) \leq -2n\epsilon < 0$$

于是

$$\max_{\overline{\Omega}}(u + \epsilon v) \leq \max_{\partial\Omega}(u + \epsilon v)^+ \leq \max_{\partial\Omega} u^+$$

而 $\epsilon \rightarrow 0$ 时

$$\max_{\overline{\Omega}}(u + \epsilon v) \geq \max_{\overline{\Omega}}(u - \epsilon d^2) \rightarrow \max_{\overline{\Omega}} u$$

所以结论得证。

上面这两个定理都叫做弱极大值原理。

定理 2.3.3 (*Hopf* 引理) 设 B 是 $R^n (n = 2, 3)$ 上半径为 R 的球, $c(x)$ 在 B 上非负且有界, $u \in C^2(B) \cap C^1(\overline{B})$ 满足 $\mathcal{L}u = f \leq 0$, 并且存在 $x_0 \in \partial B$ 使得 u 在 x_0 处达到 u 在 $\overline{B}$ 上的非负最大值, 则

$$\frac{\partial u}{\partial \mu}(x_0) > 0$$

其中 μ 与 x_0 处的单位外法向量夹角小于 $\pi/2$.

证明 令 $v(x) = e^{-\alpha|x|^2} - e^{-\alpha R^2}$, $\alpha > 0$ 待定, 则 $x \in \partial\Omega, v(x) = 0$.

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{x}{|x|} \cdot \nabla u = -2\alpha x e^{-\alpha|x|^2} \cdot \frac{x}{|x|} = -2\alpha|x|e^{-\alpha|x|^2} = -2\alpha R e^{-\alpha R^2}$$

令 $\omega(x) = u(x) - u(x_0) + \epsilon v(x)$

$$\begin{aligned}\Delta v &= \sum (-2\alpha + 4\alpha^2 x_i^2) e^{-\alpha|x|^2} \\ &= (-2\alpha n + 4\alpha^2 x^2) e^{-\alpha|x|^2} \\ \mathcal{L}w &= f - c(x)u(x_0) + \epsilon \left[(-4\alpha^2 x^2 + 2\alpha n) e^{-\alpha|x|^2} + c(x)(e^{-\alpha|x|^2} - e^{-\alpha R^2}) \right] \\ &\quad + \epsilon(-4\alpha^2 x^2 + 2\alpha n + c(x)) e^{-\alpha|x|^2} - c(x) e^{-\alpha R^2} \\ &\leq \epsilon(-4\alpha^2 x^2 + 2\alpha n + c(x)) e^{-\alpha|x|^2}\end{aligned}$$

希望

$$-4\alpha^2 x^2 + 2\alpha n + c(x) < 0$$

在 $B_R^* = \{\frac{R}{2} < x < R\}$ 上, α 充分大时上式成立, 因此 w 在 $\overline{B_R^*}$ 上非负最大值一定在边界上取到, 即 $|x| = R$ 或 $|x| = \frac{R}{2}$,

$$\begin{aligned}w(x) &= u(x) - u(x_0) + \epsilon \left[(e^{-\alpha R^2 \frac{1}{4}}) - e^{-\alpha R^2} \right] \\ &\leq \max_{|x|=\frac{R}{2}} u(x) \\ &< 0, \text{ 当 } \epsilon \text{ 充分小}\end{aligned}$$

定理 2.3.4 (强极大值原理) Ω 是 R^n 有界连通开集, $c(x) \geq 0$ 且有界, $u \in C^2(\Omega) \cup C^1(\overline{\Omega})$, $\mathcal{L}u \leq 0$, 且 u 在 Ω 内达到它在 $\overline{\Omega}$ 上的非负最大值, 那么 u 在 Ω 上恒为常数。

2.4 最大模估计

考虑方程

$$\begin{cases} -\Delta u = f, x \in \Omega \\ u = g, x \in \partial\Omega \end{cases}$$

定理 2.4.1 如果 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ 是上述方程的解, 则

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq G + CF, G = \max_{\overline{\Omega}} |g|, F = \max_{\overline{\Omega}} |f|$$

C 是与 n, d 有关的常数。

证明 不妨设 $0 \in \Omega, \forall x \in \Omega, |x| < d, w(x) = u - (G + \frac{F}{2n}(d^2 - |x|^2))$, 则

$$\begin{aligned}-\Delta w &= -\Delta u + \Delta(\frac{F}{2n}(d^2 - |x|^2)) \\ &= f - F \leq 0\end{aligned}$$

$$w|_{\partial\Omega} = g - G - \frac{F}{2n}(d^2 - |x|^2)|_{\partial\Omega} \leq g - G \leq 0$$

根据弱极值原理, 可得

$$\max_{\overline{\Omega}} w = \max_{\partial\Omega} w \leq 0$$

则

$$\max_{\overline{\Omega}} \left(u(x) - \left(G + \frac{d^2}{2n} F \right) \right) \leq 0$$

即 $\max_{\overline{\Omega}} u \leq G + \frac{d^2}{2n} F$. 再令 $w(x) = -u - (G + \frac{F}{2n}(d^2 - |x|^2))$ 同理可证 $\max_{\overline{\Omega}}(-u) \leq G + \frac{d^2}{2n} F$, 原命题得证。

利用最大模估计, 可以证明解的唯一性和稳定性。

2.5 能量估计

考虑方程

$$\begin{cases} -\Delta u = f, x \in \Omega \\ u = 0, x \in \partial\Omega \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -u\Delta u &= uf \\ -\int_{\Omega} u\Delta u dx &= \int_{\Omega} uf dx \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(u\nabla u) + |\nabla u|^2 dx \\ &= -\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ |uf| &= 2\sqrt{\epsilon}|u| \frac{1}{2\sqrt{\epsilon}}|f| \\ &\leq \epsilon|u|^2 + \frac{1}{4\epsilon}|f|^2 \\ \int_{\Omega} |u|^2 dx &\leq 4d^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ &= 4d^2 \int_{\Omega} uf dx \\ &\leq 4d^2 \left(\epsilon \int_{\Omega} |u|^2 dx + \frac{1}{4\epsilon} \int_{\Omega} |f|^2 dx \right) \end{aligned}$$

即

$$\int_{\Omega} |u|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |f|^2 dx$$

C 是与 d 有关的常数。