

微分几何期末习题复习

Fir1247

最后更新：2023 年 12 月 31 日

1 期中之前

题目 1. (chap2.2) 正规参数曲线 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)), t \in [a, b]$ 的曲率为

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|^3} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

解答: [Show answer](#)

弧长参数:

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)| du \quad (2)$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= \frac{ds^{-1}}{ds} = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \\ \frac{d^2t}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} = \frac{1}{x'(t)^2 + y'(t)^2} \frac{d}{ds} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \\ &= \frac{1}{x'(t)^2 + y'(t)^2} \frac{x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \frac{dt}{ds} = \frac{x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|^4} \end{aligned}$$

准备工作完成, 下面求弧长参数曲线 $\mathbf{r}(t(s)) = (x(t(s)), y(t(s)))$ 的曲率: (以下 $t(s)$ 简写为 t)

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(s) &= (x'(t), y'(t)) \frac{dt}{ds} \\ \mathbf{N}(s) &= \frac{dt}{ds} = \frac{(-y'(t), x'(t))}{|\mathbf{r}'(t)|} \\ \dot{\mathbf{T}}(s) &= (x''(t), y''(t)) \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + (x'(t), y'(t)) \frac{d^2t}{ds^2} \\ &= \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|^2} (x''(t), y''(t)) + \frac{x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|^4} (x'(t), y'(t)) \\ \kappa(s) &= \langle \dot{\mathbf{T}}(s), \mathbf{N}(s) \rangle = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|^3} \end{aligned}$$

实际上根本不用求 $\frac{d^2t}{ds^2}$! 但题目 5 用到了。

题目 2. (chap2.3) 极坐标参数曲线 $r = f(\theta)$ 的曲率为

$$\kappa(\theta) = \frac{f^2(\theta) + 2 \left(\frac{df}{d\theta} \right)^2 - f(\theta) \frac{d^2f}{d\theta^2}}{\left(f^2(\theta) + \left(\frac{df}{d\theta} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \quad (3)$$

解答: [Show answer](#)

实际上就是 $\mathbf{r}(\theta) = (f(\theta) \cos \theta, f(\theta) \sin \theta)$, 直接应用上一个定理的结论即可。

题目 3. (chap2.8) 平面正则曲线 $C: \mathbf{r}(t)$ 不经过点 P_0 (位置向量为 $\mathbf{p}_0$), $\mathbf{r}(t_0)$ 是 C 上离点 P_0 距离最近的点, 求证:

$$\mathbf{r}(t_0) - \mathbf{p}_0 \perp \mathbf{r}'(t_0) \quad (4)$$

解答: [Show answer](#)

考虑距离的平方

$$l(t)^2 = d(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}_0) = \langle \mathbf{r}(t) - \mathbf{p}_0, \mathbf{r}(t) - \mathbf{p}_0 \rangle \quad (5)$$

由题意可知 $t = t_0$ 时取最小值, 因此导数为零:

$$\langle \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}(t) - \mathbf{p}_0 \rangle = 0 \quad (6)$$

即 $\mathbf{r}(t_0) - \mathbf{p}_0 \perp \mathbf{r}'(t_0)$.

题目 4. (chap2.13(2)) 求曲率为

$$\kappa(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - s^2}} \quad (7)$$

的平面曲线, s 为弧长参数。

解答: [Show answer](#)

设 $\mathbf{r}(s)$ 为满足题意的平面正则曲线, 设

$$T(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s))), N(s) = (-\sin(\theta(s)), \cos(\theta(s))) \quad (8)$$

那么

$$\begin{aligned} \dot{T}(s) &= (-\sin(\theta(s)), \cos(\theta(s))) \frac{d\theta}{ds} \\ \Rightarrow \kappa(s) &= \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - s^2}} \\ \Rightarrow \theta(s) &= \int_0^s \frac{1}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt + C_1 = \arcsin\left(\frac{s}{a}\right) + C_1 \end{aligned}$$

于是

$$\mathbf{r}'(s) = T(s) = (\cos(\arcsin(\frac{s}{a}) + C_1), \sin(\arcsin(\frac{s}{a}) + C_1)) \quad (9)$$

可得

$$\mathbf{r}(s) = (\int_0^s \cos(\arcsin(\frac{s}{a}) + C_1) ds + C_2, \int_0^s \sin(\arcsin(\frac{s}{a}) + C_1) ds + C_3) \quad (10)$$

其中的 C_i 都为常数, 不妨均取零, 然后通过平面上的刚体变换得到所有满足题意的曲线。

该思路适用于所有给定曲率求曲线的题目。

题目 5. (chap3.5) 空间正规参数曲线 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 的曲率和挠率分别为:

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}, \tau(t) = \frac{(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t))}{|\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}''|^2} \quad (11)$$

解答: [Show answer](#)

先证明一个结论: 考虑空间中的两个非零向量 a, b , 夹角为 θ , 记 $\lambda = \langle a, b \rangle = |a||b| \cos \theta$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\lambda}{|a|} \cdot a - |a| \cdot b \right|^2 &= \lambda^2 + |a|^2 |b|^2 - 2 \left\langle \frac{\lambda}{|a|} \cdot a, |a| \cdot b \right\rangle \\ &= -\lambda^2 + |a|^2 |b|^2 \\ &= |a|^2 |b|^2 (1 - \cos^2 \theta) = |a|^2 |b|^2 \sin^2 \theta = |a \wedge b|^2 \end{aligned}$$

弧长参数:

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)| du \quad (12)$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= \frac{ds^{-1}}{dt} = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}} \\ \frac{d^2 t}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}} = -\frac{1}{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \frac{d}{ds} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \\ &= -\frac{1}{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \frac{x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t) + z'(t)z''(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}} \frac{dt}{ds} = -\frac{\langle \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t) \rangle}{|\mathbf{r}'(t)|^4} \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{dt}{ds} \mathbf{r}'(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \\ \dot{T}(s) &= \frac{d^2 t}{ds^2} \mathbf{r}'(t) + \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \mathbf{r}''(t) = \frac{\langle \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t) \rangle \mathbf{r}'(t) - |\mathbf{r}'(t)|^2 \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|^4} = \frac{\langle \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t) \rangle \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} - |\mathbf{r}'(t)| \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|^3} \\ \kappa(s) &= |\dot{T}(s)| = \frac{|\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} \end{aligned}$$

然后我们来求挠率:

$$\dot{T}(s) = \kappa(s) N(s)$$

$$\ddot{T}(s) = \kappa'(s) N(s) + \kappa(s) N'(s) = \kappa'(s) N(s) + \kappa(s) \dot{N}(s) = \kappa'(s) N(s) - \kappa(s)^2 T(s) + \kappa(s) \tau(s) B(s)$$

$$\langle \ddot{T}(s), B(s) \rangle = \kappa(s) \tau(s)$$

而

$$\begin{aligned} \ddot{T}(s) &= \frac{d^3 t}{ds^3} \mathbf{r}'(t) + 2 \frac{d^2 t}{ds^2} \frac{dt}{ds} \mathbf{r}''(t) + \left(\frac{dt}{ds} \right)^3 \mathbf{r}'''(t) \\ B(s) &= T(s) \wedge N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T(s) \wedge \dot{T}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|^3} \mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t) = \frac{\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)|} \end{aligned}$$

所以

$$\tau(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \langle \ddot{T}(s), B(s) \rangle = \frac{1}{\kappa(s)} \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|^3} \langle \mathbf{r}'''(t), \mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t) \rangle = \frac{\langle \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t) \rangle}{|\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}''|^2} \quad (13)$$

题目 6. (chap3.9) 设空间曲线 C 的所有切线过定点, 证明 C 为直线; 证明所有主法线过定点的曲线为圆。

解答: [Show answer](#)

设 $C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, s 为弧长参数, 设其切线过定点 P (位置向量为 $\mathbf{p}$), 那么

$$\mathbf{r}(s) - \mathbf{p} = \lambda(s)T(s) \quad (14)$$

其中 $\lambda(s) = \langle \mathbf{r}(s) - \mathbf{p}, T(s) \rangle$, 求导可得

$$\lambda'(s) = \langle T(s), T(s) \rangle + \langle \mathbf{r} - \mathbf{p}, \dot{T}(s) \rangle = 1 \quad (15)$$

所以

$$T(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)\dot{T}(s) = T(s) + \lambda(s)\kappa(s)N(s) \quad (16)$$

$$\Rightarrow \lambda(s)\kappa(s) = 0 \quad (17)$$

而 $\lambda(s)$ 不恒为零, 所以 $\kappa(s) = 0$, C 是直线。

若 C 的主法线过定点 P (位置向量为 $\mathbf{p}$), 那么

$$\mathbf{r}(s) - \mathbf{p} = \lambda(s)N(s) \quad (18)$$

其中 $\lambda(s) = \langle \mathbf{r}(s) - \mathbf{p}, N(s) \rangle$, 求导可得

$$\lambda'(s) = \langle T(s), N(s) \rangle + \langle \mathbf{r} - \mathbf{p}, \dot{N}(s) \rangle = \langle \lambda(s)T(s), -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) \rangle = 0 \quad (19)$$

所以 $\lambda(s) = c$, c 不为零的常数, 则

$$T(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)\dot{N}(s) = -c\kappa(s)T(s) + c\tau(s)B(s) \quad (20)$$

$$\Rightarrow \kappa(s) = \frac{1}{c}, \tau(s) = 0 \quad (21)$$

所以 C 为圆。

题目 7. (chap3.12) 给定弧长参数曲线 $\mathbf{r}(s)$, 其曲率和挠率分别为 $\kappa(s), \tau(s)$, $\mathbf{r}(s)$ 的单位切向量 $T(s)$ 可视为单位球面上的一条曲线 $w(s)$, 证明曲线 $w(s)$ 的曲率、挠率分别为:

$$\kappa_w(s) = \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2}, \tau_w(s) = \frac{\frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)}{\kappa\left(1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2\right)} \quad (22)$$

解答: [Show answer](#)

$$w(s) = T(s),$$

$$w'(s) = T' = \kappa N$$

$$w''(s) = \kappa N' + \kappa' N = -\kappa^2 T + \kappa \tau B + \kappa' N$$

$$\begin{aligned} w'''(s) &= -2\kappa\kappa'T - \kappa^2 T' + \kappa'\tau B + \kappa\tau'B + \kappa\tau B' + \kappa''N + \kappa'N' \\ &= -2\kappa\kappa'T - \kappa^3 N + \kappa'\tau B + \kappa\tau'B - \kappa\tau^2 N + \kappa''N - \kappa\kappa'T + \tau\kappa'B \\ &= (-\kappa^3 - \kappa\tau^2 + \kappa'')N + (-3\kappa\kappa')T + (2\kappa'\tau + \kappa\tau')B \end{aligned}$$

$$w'(s) \wedge w''(s) = -\kappa^3 B - \kappa^2 \tau T$$

$$|w'(s) \wedge w''(s)| = \kappa^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$$

$$(w'(s), w''(s), w'''(s)) = -\kappa^3(2\kappa'\tau + \kappa\tau') + 3\kappa'\kappa^3\tau = \kappa^3(\kappa'\tau - \kappa\tau')$$

直接套用题目 5 的结论：

$$\begin{aligned}\kappa_w(s) &= \frac{|w'(s) \wedge w''(s)|}{|w'(s)|^3} = \frac{\kappa^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\kappa^3} = \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2} \\ \tau_w(s) &= \frac{(w'(s), w''(s), w'''(s))}{|w'(s) \wedge w''(s)|^2} \\ &= \frac{\kappa' \tau - \kappa \tau'}{\kappa(\kappa^2 + \tau^2)} = \frac{\frac{\kappa' \tau - \kappa \tau'}{\kappa^2}}{\kappa \left(1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2\right)} = \frac{\frac{d}{ds} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)}{\kappa \left(1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2\right)}\end{aligned}$$

题目 8. (chap3.15) 满足：

$$\frac{1}{\kappa^2} + \left(\frac{1}{\tau} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa}\right)\right)^2 = \text{常数} \quad (23)$$

的弧长参数曲线 $\mathbf{r}(s)$ ，要么是球面曲线，要么 κ 是常数。

解答: [Show answer](#)

即

$$\frac{1}{\kappa^2} + \frac{\kappa'^2}{\tau^2 \kappa^4} = \text{常数} \quad (24)$$

求导得

$$\begin{aligned}\frac{-2\kappa'}{\kappa^3} + \frac{2\kappa' \kappa'' \tau^2 \kappa^4 - (2\tau \tau' \kappa^4 + 4\kappa^3 \kappa' \tau^2) \kappa'^2}{\tau^4 \kappa^8} &= 0 \\ \tau^3 \kappa^2 - \kappa'' \tau \kappa + \tau' \kappa \kappa + 2\kappa'^2 \tau &= 0\end{aligned}$$

假设 $\kappa(s)$ 不是常数，那么考虑向量场

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{r} + \frac{1}{\kappa} \mathbf{N} + \frac{1}{\tau} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa}\right) \mathbf{B} \quad (25)$$

求导得

$$\begin{aligned}\mathbf{p}'(s) &= \mathbf{T} + \frac{1}{\kappa} (-\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}) - \frac{\kappa'}{\kappa^2} \mathbf{N} + \frac{\tau'}{\tau^2} \frac{\kappa'}{\kappa^2} \mathbf{B} + \frac{1}{\tau} \frac{-\kappa \kappa'' + 2\kappa'^2}{\kappa^3} \mathbf{B} + \frac{\kappa'}{\kappa^2} \mathbf{N} \\ &= \left(\frac{\tau}{\kappa} + \frac{\tau'}{\tau^2} \frac{\kappa'}{\kappa^2} + \frac{2\kappa'^2}{\tau \kappa^3} - \frac{\kappa''}{\tau \kappa^2} \right) \mathbf{B} \\ &= \frac{\tau^3 \kappa^2 - \kappa'' \tau \kappa + \tau' \kappa \kappa + 2\kappa'^2 \tau}{\tau^2 \kappa^3} \mathbf{B} = 0\end{aligned}$$

这意味着 $\mathbf{p}(s)$ 是常向量场，

$$|\mathbf{r} - \mathbf{p}|^2 = \left| \frac{1}{\kappa} \mathbf{N} + \frac{1}{\tau} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa}\right) \mathbf{B} \right|^2 = \frac{1}{\kappa^2} + \left(\frac{1}{\tau} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa}\right)\right)^2 = \text{常数} \quad (26)$$

所以曲线 $\mathbf{r}$ 在球面上。

题目 9. (chap3.16) P_0 是空间曲线 C 上一点， P 是 P_0 的临近点， l 是 P_0 处的切线，证明：

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{2d(P, l)}{d^2(P_0, P)} = \kappa(P_0) \quad (27)$$

解答: [Show answer](#)

设 $C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, s 为弧长参数, $P_0 = \mathbf{r}(s_0)$,

$$\begin{aligned} \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{2d(P, l)}{d^2(P_0, P)} &= \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{2\langle \mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_0), N(s_0) \rangle}{|\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_0)|^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\langle T(s), N(s_0) \rangle}{\langle \mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_0), T(s) \rangle} \\ &= \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\langle \kappa(s)N(s), N(s_0) \rangle}{1 + \langle \mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_0), \kappa N(s) \rangle} \\ &= \kappa(s_0) \end{aligned}$$

中间用了两次洛必达法则, 这道题的关键是注意到 $d(P, l) = \langle \mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_0), N(s_0) \rangle$.

题目 10. (chap3.17) 求曲率、挠率满足 $\tau(s) = c\kappa(s)$ 的弧长参数曲线, 其中常数 $c > 0, \kappa > 0$.

解答: [Show answer](#)

$c = 0$ 的情况和题目 4 差别不大, 唯一的区别在于所求解的空间曲线, 作为平面曲线的曲率可以为负。

$\tau \neq 0$ 的情况, 作参数变换:

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa(t) dt \quad (28)$$

则 $d\theta = \kappa(s)ds$, Frenet 方程可以改写为

$$\begin{cases} T'(\theta) = N(\theta) \\ N'(\theta) = -T(\theta) + cB(\theta) \\ B'(\theta) = -cN(\theta) \end{cases} \quad (29)$$

那么 $N''(\theta) = -a^2 N(\theta)$, 其中 $a = \sqrt{1+c^2}$, 此方程有通解:

$$N(\theta) = \cos a\theta \mathbf{e}_1 + \sin a\theta \mathbf{e}_2 \quad (30)$$

其中 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是常向量, 由此可得

$$T(\theta) = \frac{1}{a}(\sin a\theta \mathbf{e}_1 - \cos a\theta \mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3) \quad (31)$$

其中 $\mathbf{e}_3$ 为常向量,

$$B(\theta) = -\frac{c}{a}(\sin a\theta \mathbf{e}_1 - \cos a\theta \mathbf{e}_2) + \frac{1}{a}\mathbf{e}_3 \quad (32)$$

容易算得, $s = 0$, 即 $\theta(0) = 0$ 时, Frenet 标架 $\{\mathbf{r}(0); T(0), N(0), B(0)\}$ 是单位正交右手系, 因此需选取 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 为右手系且单位正交。最后由 $\mathbf{r}'(s) = T(s)$ 得到所求的弧长参数曲线:

$$\mathbf{r}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \left(\int_0^s \sin(\sqrt{1+c^2} \int_0^t \kappa(u) du) dt \mathbf{e}_1 - \int_0^s \cos(\sqrt{1+c^2} \int_0^t \kappa(u) du) dt \mathbf{e}_2 + cs \mathbf{e}_3 \right) + \mathbf{v} \quad (33)$$

其中 $\mathbf{v}$ 为常向量。

题目 11. (chap3.5) 设曲面 S 与平面 II 相交于 P 点, 且 S 位于 II 的同一侧, 证明: II 是曲面 S 在 P 点的切平面。

解答: [Show answer](#)

设 $S: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $P = \mathbf{r}(u_0, v_0)$, 设 $\mathbf{a}$ 是 II 的单位非零法向量, 且指向曲面 S , 那么考虑高度函数:

$$h(u, v) = \langle \mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}(u_0, v_0), \mathbf{a} \rangle \quad (34)$$

由题意可知 P 是其极小值点, 故

$$h_u(u_0, v_0) = h_v(u_0, v_0) = 0 \quad (35)$$

即 $\mathbf{a} \perp \mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ 且 $\mathbf{a} \perp \mathbf{r}_v(u_0, v_0)$, 于是 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{n}$, 所以 II 是切平面。

题目 12. chap3.20

解答: [Show answer](#)

用法曲率最初始的定义: 曲线的曲率向量与曲面法向量的内积。

设曲线 C 的弧长参数为 $\mathbf{r}(s)$, $\mathbf{n}_i(s)$ 是曲面 S_i 沿曲线的法向量,

$$k_i = k_i(s) = \langle \mathbf{r}''(s), \mathbf{n}_i(s) \rangle = \langle T'(s), \mathbf{n}_i(s) \rangle = \langle \kappa(s)N(s), \mathbf{n}_i(s) \rangle \quad (36)$$

那么

$$\begin{aligned} k_1^2 + k_2^2 - 2k_1k_2 \cos \theta &= \langle \kappa N, \mathbf{n}_1 \rangle^2 + \langle \kappa N, \mathbf{n}_2 \rangle^2 - 2\langle \kappa N, \mathbf{n}_1 \rangle \langle \kappa N, \mathbf{n}_2 \rangle \cos(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) \\ &= \kappa^2 |\langle N, \mathbf{n}_1 \rangle \mathbf{n}_2 - \langle N, \mathbf{n}_2 \rangle \mathbf{n}_1|^2 \\ &= \kappa^2 |N \wedge (\mathbf{n}_2 \wedge \mathbf{n}_1)|^2 \\ &= \kappa^2 |N \wedge T| \sin^2 \theta \\ &= \kappa^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

题目 13. chap3.19

解答: [Show answer](#)

暴力拆解!

首先, 第三形式可以写成:

$$III = \langle d\mathbf{n}, d\mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_u \rangle du^2 + 2\langle \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v \rangle dudv + \langle \mathbf{n}_v, \mathbf{n}_v \rangle dv^2 \quad (37)$$

对比系数, 即证:

$$\begin{cases} \langle \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_u \rangle - 2HL + KE = 0 \\ \langle \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v \rangle - 2HM + KF = 0 \\ \langle \mathbf{n}_v, \mathbf{n}_v \rangle - 2HN + KG = 0 \end{cases} \quad (38)$$

实际上:

$$W(\mathbf{r}_u) = -\mathbf{n}_u = a\mathbf{r}_u + b\mathbf{r}_v, \quad W(\mathbf{r}_v) = -\mathbf{n}_v = c\mathbf{r}_u + d\mathbf{r}_v, \quad (39)$$

所以

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_u \rangle &= a^2E + 2abF + b^2G \\ \langle \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v \rangle &= acE + (ad + bc)F + bdG \\ \langle \mathbf{n}_v, \mathbf{n}_v \rangle &= c^2E + 2cdF + d^2G \end{aligned}$$

先验证第一个: 记 $\delta = EG - F^2$, 两边同乘以 δ ,

$$\begin{aligned} &\delta(\langle \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_u \rangle - 2HL + KE) \\ &= \delta(a^2E + 2abF + b^2G - 2HL + KE) \\ &= (LG - MF)^2E + 2(LG - MF)(ME - LF)F + (ME - LF)^2G \\ &\quad - (LG + NE - 2MF)L + (LN - M^2)E \\ &= \end{aligned}$$

算了, 剩下的无所谓了。这个题就是复习一下这些字母的定义。

题目 14. chap3.27 这个题往年考过!!!

解答: [Show answer](#)

第一问答案的方法没看懂，直接算不行么？哦看懂了，其实和直接算差不多。

设 $\tilde{S}: \tilde{r} = r + \lambda n$ 的法向量为 m ，取

$$m = \tilde{r}_u \wedge \tilde{r}_v = (r_u + \lambda n_u) \wedge (r_v + \lambda n_v) \quad (40)$$

其中， $n_u = -(ar_u + br_v)$ ， $n_v = -(cr_u + dr_v)$ ，因此

$$m = ((1 - \lambda a)(1 - \lambda d) + \lambda^2 bc)r_u \wedge r_v \parallel n \quad (41)$$

因此切平面平行。

第二问， $\tilde{S}$ 的单位法向量要么是 n 要么是 $-n$ ，不妨取 n 。设 $T_P S$ 上的 W 变换 $\mathcal{W}$ 在基 $\{r_u, r_v\}$ 下的矩阵为 W ， $\tilde{W}$ 类似，则

$$W \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix} = \tilde{W} \begin{pmatrix} \tilde{r}_u \\ \tilde{r}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n_u \\ -n_v \end{pmatrix} \quad (42)$$

那么

$$\begin{aligned} \tilde{r}_u &= r_u + \lambda n_u = \mathcal{I}r_u - \lambda \mathcal{W}r_u = (\mathcal{I} - \lambda \mathcal{W})r_u \\ \tilde{r}_v &= r_v + \lambda n_v = \mathcal{I}r_v - \lambda \mathcal{W}r_v = (\mathcal{I} - \lambda \mathcal{W})r_v \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} W \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix} &= \tilde{W} \begin{pmatrix} \tilde{r}_u \\ \tilde{r}_v \end{pmatrix} = \tilde{W}(\mathcal{I} - \lambda \mathcal{W}) \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \tilde{W} &= W(\mathcal{I} - \lambda \mathcal{W})^{-1} \end{aligned}$$

于是

$$\tilde{K} = \det(\tilde{W}) = \det(W)/\det(\mathcal{I} - \lambda \mathcal{W}) = \frac{K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} W(\mathcal{I} - \lambda \mathcal{W})^{-1} &= \frac{1}{\det(\mathcal{I} - \lambda \mathcal{W})} \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \lambda w_{22} & \lambda w_{12} \\ \lambda w_{21} & 1 - \lambda w_{11} \end{pmatrix} \\ H &= \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{W}) \\ &= \frac{w_{11} + w_{22} - 2\lambda w_{11}w_{22} + 2\lambda w_{12}w_{21}}{2(1 - 2\lambda H + \lambda^2 K)} \\ &= \frac{2H - 2\lambda K}{2(1 - 2\lambda H + \lambda^2 K)} \\ &= \frac{H - \lambda K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K} \end{aligned}$$

妙蛙！

题目 15. chap3.25 这个题主要注意一下怎么求主方向：求变换矩阵 W 的特征向量，在基 $\{r_u, r_v\}$ 下表示，再单位化。

解答: [Show answer](#)

直接计算:

$$\begin{aligned}
r &= (a(u+v), b(u-v), 4uv) \\
r_u &= (a, b, 4v) \\
r_v &= (a, -b, 4u) \\
r_u \wedge r_v &= (4b(u+v), 4a(v-u), -2ab) \\
n &= \frac{r_u \wedge r_v}{|r_u \wedge r_v|} = \frac{(2b(u+v), 2a(v-u), -ab)}{\sqrt{4b^2(u+v)^2 + 4a^2(v-u)^2 + a^2b^2}} := \frac{1}{\delta}(2b(u+v), 2a(v-u), -ab) \\
r_{uu} &= (0, 0, 0) \\
r_{uv} &= (0, 0, 4) \\
r_{vv} &= (0, 0, 0) \\
E &= a^2 + b^2 + 16v^2 \\
F &= a^2 - b^2 + 16uv \\
G &= a^2 + b^2 + 16u^2 \\
EG - F^2 &= |r_u \wedge r_v|^2 = 4\delta^2 \\
L &= 0 \\
M &= \frac{-4ab}{\delta} \\
N &= 0 \\
H &= \frac{1}{2} \frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2} = \frac{ab(a^2 - b^2 + 16uv)}{\delta^3} \\
K &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{4a^2b^2}{\delta^4} \\
W &= \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{M}{EG - F^2} \begin{pmatrix} -F & E \\ G & -F \end{pmatrix} \\
k_{1,2} &= \frac{M(-F \pm \sqrt{EG})}{EG - F^2} = \frac{ab}{\delta^3} (a^2 - b^2 + 16uv \mp \sqrt{(a^2 + b^2 + 16u^2)(a^2 + b^2 + 16v^2)}) \\
e_{1,2} &= \frac{\sqrt{E}r_u \pm \sqrt{G}r_v}{|\sqrt{E}r_u \pm \sqrt{G}r_v|}
\end{aligned}$$

题目 16. chap3.29 曲率线相关。曲面的参数曲线为曲率线当且仅当 $F = M = 0$.

解答: [Show answer](#)

如果 S 的参数曲线是曲率线, 即切方向 $r_u(u, v)$ 和 $r_v(u, v)$ 就是曲面主方向, 也就是说

$$e_1 = \frac{r_u}{\sqrt{E}}, \quad e_2 = \frac{r_v}{\sqrt{G}} \quad (44)$$

就是两个正交主方向, 那么可得 $F = 0$, 另一方面也因为:

$$W(e_1) = k_1 e_1 = -\frac{1}{\sqrt{E}} n_u \Rightarrow -n_u = \sqrt{E} k_1 e_1 \quad (45)$$

那么 $M = -\langle r_v, n_u \rangle = 0$.

反之, $F = M = 0$, W 是对角阵, r_u, r_v 是特征向量, 参数曲线为曲率线。

题目 17. chap3.31 渐近线相关。曲面的参数曲线为渐近线当且仅当 $L = N = 0$.

解答: [Show answer](#)

参数曲线为渐近线, 即切方向 r_u, r_v 上曲面的法曲率为零, 直接算 r_u, r_v 方向的法曲率即可:

$$k_n(r_u) = \frac{L}{E}, \quad k_n(r_v) = \frac{N}{G} \quad (46)$$

题目 18. chap3.35 极小曲面相关。Scherk 曲面: 若 $z = f(x) + g(y)$ 是极小曲面, 证明: 除了相差一个常数外, 它可以写成:

$$z = \frac{1}{a} \log \frac{\cos ay}{\cos ax} \quad (47)$$

解答: [Show answer](#)

极小曲面是平均曲率 $H = 0$ 的曲面, 直接计算:

$$\begin{aligned} r &= (x, y, f(x) + g(y)) \\ r_x &= (1, 0, f'(x)) \\ r_y &= (0, 1, g'(y)) \\ r_{xx} &= (0, 0, f''(x)) \\ r_{xy} &= (0, 0, 0) \\ r_{yy} &= (0, 0, g''(y)) \\ r_x \wedge r_y &= (-f'(x), -g'(y), 1) \\ n &= \frac{(-f'(x), -g'(y), 1)}{\sqrt{f'(x)^2 + g'(y)^2 + 1}} := \frac{1}{\delta} (-f'(x), -g'(y), 1) \\ E &= 1 + f'(x)^2 \\ F &= f'(x)g'(y) \\ G &= 1 + g'(y)^2 \\ L &= \frac{1}{\delta} f''(x) \\ M &= 0 \\ N &= \frac{1}{\delta} g''(y) \\ H &= \frac{1}{2} \frac{LG + NE - 2MF}{EG - F^2} = \frac{f''(x) + f''(x)g'(y)^2 + g''(y) + g''(y)f'(x)^2}{2\delta^3} = 0 \end{aligned}$$

则

$$\frac{f''(x)}{1 + f'(x)^2} = -\frac{g''(y)}{1 + g'(y)^2} \quad (48)$$

两边不相关, 所以都等于常数 a , $a = 0$ 得到平面, $a \neq 0$ 时, 设 $h = f'$, 省略积分常数:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dx} &= a(1 + h^2) \Rightarrow \frac{dx}{dh} = \frac{1}{a(1 + h^2)} \Rightarrow x = \frac{1}{a} \arctan(h) \Rightarrow h = \tan(ax) \\ &\Rightarrow f = \frac{1}{a} \log |\cos ax| \end{aligned}$$

类似可得 $g(y) = -\frac{1}{a} \log |\cos ay|$, 于是得证。

题目 19. chap3.33 直纹面相关。证明直纹面是可展曲面当且仅当沿直母线法向不变。

解答: [Show answer](#)

直纹面: $r(u, v) = a(u) + vb(u)$, 注意“沿直母线”参数只有 v 在变化, 所以“沿直母线法向不变”等价于单位法向量 n 不变等价于 n_v 恒等于零。

如果 S 可展, $K = \frac{-M^2}{EG-F^2} = 0$, 则 $\langle r_u, n_v \rangle = -M = 0$, 又因为 $r_{vv} = 0$, 所以 $\langle r_v, n_v \rangle = \langle -r_{vv}, n \rangle = 0$, 也就是说 $n_v \perp r_u, r_v$, 只能 $n_v = 0$ 。

反之, 如果 $n_v = 0$, 说明 $M = 0$, 从而 $K = 0$, S 可展。

2 第四章

题目 20. chap4.1、2、4、5 证明: $g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta} = 2$,

$$\frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial u^\alpha} = \Gamma_{1\alpha}^1 + \Gamma_{2\alpha}^2$$

这几个题先滚吧。其他的看习题课 4。

解答: [Show answer](#)

直接计算, 注意

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = I_2$$

所以

$$g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta} = g^{11}g_{11} + g^{12}g_{12} + g^{21}g_{21} + g^{22}g_{22} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{11} \\ g^{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{12} \\ g^{22} \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2$$

另一个展开右式:

$$\begin{aligned} \Gamma_{1\alpha}^1 + \Gamma_{2\alpha}^2 &= \frac{1}{2}g^{1\xi} \left(\frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{1\xi}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{1\alpha}}{\partial u^\xi} \right) + \frac{1}{2}g^{2\xi} \left(\frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{2\xi}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{2\alpha}}{\partial u^\xi} \right) \\ &= \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{\alpha 1}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{1\alpha}}{\partial u^1} \right) + \frac{1}{2}g^{12} \left(\frac{\partial g_{\alpha 2}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{1\alpha}}{\partial u^2} \right) + \\ &\quad \frac{1}{2}g^{21} \left(\frac{\partial g_{\alpha 1}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{2\alpha}}{\partial u^1} \right) + \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{\alpha 2}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{2\alpha}}{\partial u^2} \right) \\ &= \frac{1}{2}g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^\alpha} + \frac{1}{2}g^{12} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^\alpha} + \frac{1}{2}g^{21} \frac{\partial g_{21}}{\partial u^\alpha} + \frac{1}{2}g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^\alpha} \end{aligned}$$

但为什么等于左式我是没搞懂的 (事实上我都不知道那个 g 是什么东西), 略过了。

题目 21. chap4.6 证明当 (u, v) 是曲面的正交曲率线网时, Codazzi 方程可以化简为:

$$L_v = HE_v, \quad N_u = HG_u$$

注. 回顾原始 Codazzi 方程:

$$\frac{\partial b_{\beta\alpha}}{\partial u^\gamma} - \Gamma_{\gamma\alpha}^\xi b_{\xi\beta} = \frac{\partial b_{\gamma\alpha}}{\partial u^\beta} - \Gamma_{\beta\alpha}^\xi b_{\xi\gamma}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2\}$$

可以发现, 该等式基于 β 和 γ 的可交换性, 因此 $\beta = \gamma$ 时上述方程一定成立, 只需考虑 $\beta \neq \gamma$, 也就是只有两个方程:

$$\frac{\partial b_{1\alpha}}{\partial u^2} - \Gamma_{2\alpha}^\xi b_{\xi 1} = \frac{\partial b_{2\alpha}}{\partial u^1} - \Gamma_{1\alpha}^\xi b_{\xi 2}, \alpha = 1, 2$$

我们把它展开

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} - \Gamma_{21}^1 b_{11} - \Gamma_{21}^2 b_{21} &= \frac{\partial b_{21}}{\partial u^1} - \Gamma_{11}^1 b_{12} - \Gamma_{11}^2 b_{22} \\ \frac{\partial b_{12}}{\partial u^2} - \Gamma_{22}^1 b_{11} - \Gamma_{22}^2 b_{21} &= \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} - \Gamma_{12}^1 b_{12} - \Gamma_{12}^2 b_{22} \end{aligned}$$

也就是

$$\begin{aligned} L_v - \Gamma_{21}^1 L - \Gamma_{21}^2 M &= M_u - \Gamma_{11}^1 M - \Gamma_{11}^2 N \\ M_v - \Gamma_{22}^1 L - \Gamma_{22}^2 M &= N_u - \Gamma_{12}^1 M - \Gamma_{12}^2 N \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{EG - F^2} \left(\frac{1}{2} G E_u - F F_u + \frac{1}{2} F G_v \right) \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{EG - F^2} \left(\frac{1}{2} G E_v - \frac{1}{2} F G_u \right) \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{EG - F^2} \left(G F_v - \frac{1}{2} G G_u - \frac{1}{2} F G_v \right) \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{EG - F^2} \left(-\frac{1}{2} F E_u - E F_u - \frac{1}{2} E E_v \right) \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{EG - F^2} \left(-\frac{1}{2} F E_v + \frac{1}{2} E G_u \right) \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{EG - F^2} \left(-F F_v + \frac{1}{2} F G_u + \frac{1}{2} E G_v \right) \end{aligned}$$

到这里就可以做这道题了。

解答: [Show answer](#)

回顾 chap3.29, 参数曲线是曲率线即 r_u, r_v 是曲面的主方向, 此时

$$F = M = 0, H = \frac{LG + NE}{2EG}$$

那么 Codazzi 方程化简为

$$\begin{aligned} L_v - \Gamma_{21}^1 L &= -\Gamma_{11}^2 N \\ -\Gamma_{22}^1 L &= N_u - \Gamma_{12}^2 N \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{EG} \left(\frac{1}{2} G E_v \right) = \frac{E_v}{2E} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{EG} \left(-\frac{1}{2} G G_u \right) = -\frac{G_u}{2E} \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{EG} \left(-\frac{1}{2} E E_v \right) = -\frac{E_v}{2G} \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{EG} \left(\frac{1}{2} E G_u \right) = \frac{G_u}{2G} \end{aligned}$$

代入进去就得到

$$\begin{aligned} L_v - \frac{E_v}{2E}L &= \frac{E_v}{2G}N \\ \frac{G_u}{2E}L &= N_u - \frac{G_u}{2G}N \end{aligned}$$

也就是

$$\begin{aligned} L_v &= \left(\frac{L}{2E} + \frac{N}{2G} \right) E_v = H E_v \\ N_u &= \left(\frac{N}{2G} + \frac{L}{2E} \right) G_u = H G_u \end{aligned}$$

注. 也可以先利用正交参数网 ($F = 0$) 下的 Codazzi 方程:

$$\begin{aligned} \left(\frac{L}{\sqrt{E}} \right)_v - \left(\frac{M}{\sqrt{E}} \right)_u - N \frac{(\sqrt{E})_v}{G} - M \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}} &= 0 \\ \left(\frac{N}{\sqrt{G}} \right)_v - \left(\frac{M}{\sqrt{G}} \right)_u - L \frac{(\sqrt{G})_v}{E} - M \frac{(\sqrt{E})_u}{\sqrt{EG}} &= 0 \end{aligned}$$

令 $M = 0$ 之后再计算即可, 这里就不列出了。

题目 22.chap4.8 证明: 第一、第二基本形式的系数均为常数的曲面是平面或者圆柱面。

解答: [Show answer](#)

第一、第二基本形式的系数均为常数 $\Rightarrow$ 主曲率都为常数 $\Rightarrow$ 只能是圆柱、球面、平面, 又因为 $\Gamma_{ij}^k = 0 \Rightarrow R_{1212} = 0 \Rightarrow K = 0 \Rightarrow$ 不能是球面。

题目 23.chap4.9 是否有曲面以 φ, ψ 以第一、第二基本形式:

1. $\varphi = du du + dv dv, \psi = du du - dv dv$.
2. $\varphi = du du + \cos^2 u dv dv, \psi = \cos^2 u du du + dv dv$.

注. 也就是验证是否满足两个曲面结构方程, 可以发现题目给的条件中 $F = M = 0$, 所以可以利用 chap4.6 的结论。

正交参数系下的 Gauss 方程是:

$$-\frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right)_u \right\} = \frac{LN - M^2}{EG}$$

解答: [Show answer](#)

第一问不满足 Gauss 方程, 左边是零, 右边是 -1 ; 第二问不满足 Codazzi 方程:

$$L_v = 0 = H E_v = 0, N_u = 0 = H G_u \neq 0$$

题目 24.chap4.12 已知两个微分式:

$$\varphi = E du du + G dv dv, \psi = \lambda(u, v) \varphi$$

其中 $E, G > 0$, 问:

1. E, G, λ 满足什么条件时, 可以作为曲面的第一、第二基本形式?
2. 如果 $E = G$, 求解 E, G, λ .

注. 可以发现题目给的条件中 $F = M = 0$, 所以可以利用 chap4.6 的结论。

解答: [Show answer](#)

习题课 4.

题目 25.chap4.15 取球面 $r(u, v) = (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, a \sin u)$,

1. 求球面的一组正交活动标架;
2. 求相应的诸微分形式 $\{w^1, w^2, w_1^2, w_1^3, w_2^3\}$;
3. 求球面的第二基本形式。

解答: [Show answer](#)

经过计算发现, $r_u \perp r_v$, 所以 e_1, e_2 可以取其正变化, 这里结论是:

$$\begin{aligned} r_u &= a(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u) \\ r_v &= a \cos u(-\sin v, \cos v, 0) \\ e_1 &= (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u) \\ e_2 &= (-\sin v, \cos v, 0) \\ e_3 &= (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin v) \end{aligned}$$

然后我们求其微分形式,

$$\begin{aligned} w^1 &= \langle dr, e_1 \rangle = \langle r_u du + r_v dv, e_1 \rangle = a du \\ w^2 &= \langle dr, e_2 \rangle = \langle r_u du + r_v dv, e_2 \rangle = a \cos u dv \\ de_1 &= (e_1)_u du + (e_1)_v dv \\ &= (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u) du + (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0) dv \\ de_2 &= (e_2)_u du + (e_2)_v dv = -(\cos v, \sin v, 0) dv \\ w_1^2 &= \langle de_1, e_2 \rangle = \cos u dv \\ w_1^3 &= \langle de_1, e_3 \rangle = du \\ w_2^3 &= \langle de_2, e_3 \rangle = \cos u dv \end{aligned}$$

第二基本形式就是

$$II = w^1 w_1^3 + w^2 w_2^3 = a du du + a \cos^2 u dv dv$$

题目 26.chap4.16 利用正交标架证明 chap3.27

解答: [Show answer](#)

只说明一下第二问, 由于 S 和 $\tilde{S}$ 在对应点的切平面平行, 所以取定 S 的正交标架 $\{r : e_1, e_2, e_3 = n\}$ 后, $\{\tilde{r} : e_1, e_2, e_3 = n\}$ 也是 $\tilde{S}$ 的一个正交标架, 计算 $\tilde{S}$ 在此正交标架下的诸微分形式:

$$\tilde{w}^\alpha = \langle d\tilde{r}, e_\alpha \rangle = \langle dr + \lambda dn, e_\alpha \rangle = w^\alpha + \lambda w_3^\alpha = w^\alpha - \lambda h_{\alpha\beta} w^\beta$$

$(h_{\alpha\beta})$ 是 W 变换在 $\{r_u, r_v\}$ 下的矩阵, 满足 $w_3^\alpha = -h_{\alpha\beta} w^\beta$, 所以

$$\tilde{w}^1 \wedge \tilde{w}^2 = (1 - \lambda h_{11} - \lambda h_{22} + \lambda(h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}))w^1 \wedge w^2 = (1 - 2\lambda H + \lambda^2 K)w^1 \wedge w^2$$

注意正交标架没变化, 所以 $\tilde{w}_\alpha^\beta = w_\alpha^\beta$,

$$\tilde{K} = -\frac{d\tilde{w}_1^2}{\tilde{w}^1 \wedge \tilde{w}^2} = -\frac{1}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K} \frac{dw_1^2}{w^1 \wedge w^2} = \frac{K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= \frac{\tilde{w}^2 \wedge \tilde{w}_2^3 - \tilde{w}^2 \wedge \tilde{w}_1^3}{2\tilde{w}^1 \wedge \tilde{w}^2} \\ &= \frac{1}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K} \frac{(w^1 + \lambda w_3^1) \wedge w_2^3 - (w^2 + \lambda w_3^2) \wedge w_1^3}{2w^1 \wedge w^2} \\ &= \frac{H - \lambda K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}\end{aligned}$$

题目 27.chap4.18 设曲面 S 的参数表示为 $r(u, v)$, $e_1 = r_u, e_2 = r_v$ 是其正交标架, 求 S 的 Gauss 曲率。

解答: [Show answer](#)

直接计算, $w^1 = du, w^2 = dv$, $w^1 \wedge w^2 = du \wedge dv$, 所以

$$w_1^2 = \langle r_{uu}du + r_{uv}dv, r_v \rangle = 0$$

这里是利用了

$$\begin{aligned}\langle r_u, r_u \rangle &= \langle r_v, r_v \rangle = 1 \Rightarrow \langle r_u, r_{uv} \rangle = \langle r_v, r_{uv} \rangle = 0 \\ \langle r_u, r_v \rangle &= 0 \Rightarrow \langle r_{uu}, r_v \rangle + \langle r_u, r_{uv} \rangle = \langle r_{uu}, r_v \rangle = 0\end{aligned}$$

所以 $K = -\frac{dw_1^2}{w^1 \wedge w^2} = 0$.

题目 28.chap4.14 证明:

$$\frac{dw_1^2}{w^1 \wedge w^2}$$

和正交标架 $\{e_1, e_2\}$ 的选取无关。

解答: [Show answer](#)

选取一个新的正交标架 $\{e'_1, e'_2\}$, 与原标架只相差一个正交变换, 所以存在 $\theta = \theta(u, v)$ 使得

$$\begin{aligned}e'_1 &= e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta \\ e'_2 &= -e_1 \sin \theta + e_2 \cos \theta \\ e'_3 &= e_3 \\ w^{1'} &= \langle dr, e'_1 \rangle = w^1 \cos \theta + w^2 \sin \theta \\ w^{2'} &= \langle dr, e'_2 \rangle = -w^1 \sin \theta + w^2 \cos \theta \\ w^{1'} \wedge w^{2'} &= w^1 \wedge w^2\end{aligned}$$

而且

$$de'_1 = de_1 \cos \theta + de_2 \sin \theta + (-e_1 \sin \theta + e_2 \cos \theta)d\theta$$

所以

$$w_1^{2'} = \langle de'_1, e'_2 \rangle = w_1^2 + d\theta$$

由于 $d^2 = 0$, 所以 $dw_1^{2'} = dw_1^2$, 得证。

题目 29.chap4.19 设 (u, v) 是曲面 S 的正交参数, 取正交标架

$$e_1 = \frac{r_u}{\sqrt{E}}, e_2 = \frac{r_v}{\sqrt{G}}$$

证明: 正交参数下的 Codazzi 方程等价于

$$dw_1^3 = w_1^2 \wedge w_2^3, dw_2^3 = w_2^1 \wedge w_1^3$$

注. 一些特殊量的推导:

$$\begin{aligned}\langle r_{uv}, r_u \rangle &= \frac{1}{2} \partial_v \langle r_u, r_u \rangle = \frac{1}{2} E_v \\ \langle r_{uv}, r_v \rangle &= \frac{1}{2} \partial_u \langle r_v, r_v \rangle = \frac{1}{2} G_u \\ \langle r_{uu}, r_v \rangle &= \partial_u \langle r_u, r_v \rangle - \langle r_u, r_{uv} \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v \\ \langle r_{vv}, r_u \rangle &= \partial_v \langle r_u, r_v \rangle - \langle r_v, r_{uv} \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u\end{aligned}$$

解答: [Show answer](#)

先计算该正交标架下的诸微分形式:

$$\begin{aligned}w^1 &= du \\ w^2 &= dv \\ de_1 &= \frac{r_{uu}\sqrt{E} - (\sqrt{E})_u r_u}{E} du + \frac{r_{uv}\sqrt{E} - (\sqrt{E})_v r_u}{E} dv \\ de_2 &= \frac{r_{vu}\sqrt{G} - (\sqrt{G})_u r_v}{G} du + \frac{r_{vv}\sqrt{G} - (\sqrt{G})_v r_v}{G} dv \\ w_1^2 &= \langle de_1, e_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{EG}} (\langle r_{uu}, r_v \rangle du + \langle r_{uv}, r_v \rangle dv) = \frac{1}{2\sqrt{EG}} (-E_v du + G_u dv) = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} du + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} dv \\ w_1^3 &= \langle de_1, n \rangle = \frac{L}{\sqrt{E}} du + \frac{M}{\sqrt{E}} dv \\ w_2^3 &= \langle de_2, n \rangle = \frac{M}{\sqrt{G}} du + \frac{N}{\sqrt{G}} dv\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}dw_1^3 &= \left(\left(\frac{L}{\sqrt{E}} \right)_v - \left(\frac{M}{\sqrt{E}} \right)_u \right) du \wedge dv \\ w_1^2 \wedge w_2^3 &= - \left(N \frac{(\sqrt{E})_v}{G} + M \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}} \right) du \wedge dv \\ dw_2^3 &= \left(\left(\frac{M}{\sqrt{G}} \right)_v - \left(\frac{N}{\sqrt{G}} \right)_u \right) du \wedge dv \\ w_2^1 \wedge w_1^3 &= - \left(L \frac{(\sqrt{G})_u}{E} + M \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} \right) du \wedge dv\end{aligned}$$

到这里就得证了。

题目 30.chap4.20 设 e_1, e_2 是曲面的主方向, k_1, k_2 是相应的主曲率, 证明: Codazzi 方程等价于

$$dk_1 \wedge w_1 = (k_2 - k_1) w_{12} \wedge w_2, \quad dk_2 \wedge w_2 = (k_1 - k_2) w_{21} \wedge w_1$$

注. 我们可以选取和上一题一样的参数, 然后直接验证上题结论和本题方程等价即可, 实际上就是两个不同的正交标架 (一个是正交化 r_u, r_v , 一个选主方向) 下 Codazzi 方程的不同形式。

解答: [Show answer](#)

首先有

$$w_1^3 = \langle de_1, n \rangle = \langle e_1, -dn \rangle = \langle e_1, \mathcal{W}(dr) \rangle = \langle e_1, \mathcal{W}(w^1 e_1 + w^2 e_2) \rangle = k_1 w^1$$

同理可知 $w_2^3 = k_2 w^2$, 所以

$$\begin{aligned} dw_1^3 &= dk_1 \wedge w^1 + k_1 dw^1 = dk_1 \wedge w^1 + k_1 w_1^2 \wedge w^2 \\ w_1^2 \wedge w_2^3 &= w_1^2 \wedge k_1 w^2 = k_2 w_1^2 \wedge w^2 \\ dw_2^3 &= dk_2 \wedge w^2 + k_2 dw^2 = dk_2 \wedge w^2 + k_2 w_2^1 \wedge w^1 \\ w_2^1 \wedge w_1^3 &= k_1 w_2^1 \wedge w^1 \end{aligned}$$

因此得证。

3 第五章

题目 31.(chap5.3) 两个曲面:

$$S: r(u, v) = (au, bv, \frac{au^2 + bv^2}{2}), \tilde{S}: \tilde{r}(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{a}\tilde{u}, \tilde{b}\tilde{v}, \frac{\tilde{a}\tilde{u}^2 + \tilde{b}\tilde{v}^2}{2})$$

证明当 $ab = \tilde{a}\tilde{b}$ 时, 在对应 $(u, v) = (\tilde{u}, \tilde{v})$ 下两个曲面的 Gauss 曲率相等。

问 (a, b) 和 $(\tilde{a}, \tilde{b})$ 满足什么关系时, 两个曲面之间有等距变换?

解答: [Show answer](#)

直接计算

$$K = \frac{1}{ab} \cdot \frac{1}{(1 + u^2 + v^2)^2}$$

所以 $ab = \tilde{a}\tilde{b}$, $(u, v) = (\tilde{u}, \tilde{v})$ 时高斯曲率相等。

假设存在等距变换 $\sigma: (\tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{u}(u, v), \tilde{v}(u, v))$, 等距变换保第一形式 $\Rightarrow$ 保 Gauss 曲率不变, 所以

$$\frac{1}{ab} \cdot \frac{1}{(1 + u^2 + v^2)^2} = \frac{1}{\tilde{a}\tilde{b}} \cdot \frac{1}{(1 + \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)^2}$$

所以

$$\frac{(1 + \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)^2}{(1 + u^2 + v^2)^2} = \frac{ab}{\tilde{a}\tilde{b}} = C$$

因此, 记左式为 $h(u, v)$, 那么 $h_u = h_v = 0$, 得到:

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} - Cu = \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} - Cv = 0$$

上式代入 $(u, v) = 0$, 就得到

$$\tilde{u}(0, 0) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u}(0, 0) + \tilde{v}(0, 0) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u}(0, 0) = \tilde{u}(0, 0) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}(0, 0) + \tilde{v}(0, 0) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v}(0, 0) = 0 \quad (*)$$

写成矩阵形式, 就是

$$J_\sigma \begin{pmatrix} \tilde{u}(0, 0) \\ \tilde{v}(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

J_σ 作为 Jacobbi 矩阵, 一定是满秩的, 这是因为 σ 是光滑双射。因此一定有

$$\tilde{u}(0, 0) = \tilde{v}(0, 0) = 0$$

因此, 取 $h(0, 0) = 1 + \tilde{u}(0, 0)^2 + \tilde{v}(0, 0)^2 = C \Rightarrow C = 1$, 从而可知 $\sigma(0) = 0$ 以及 $ab = \tilde{a}\tilde{b}$.

然后我们再对 (*) 式求一次导,

$$\begin{aligned}\tilde{u} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} \right)^2 + \tilde{v} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \right)^2 &= 1 \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} + \tilde{u} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} + \tilde{u} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial u \partial v} &= 0 \\ \tilde{u} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} \right)^2 + \tilde{v} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \right)^2 &= 1\end{aligned}$$

代入 $(u, v) = (0, 0)$ 得到 J_σ 是正交阵, 因此不妨设

$$J_\sigma = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\delta \sin \theta & \delta \cos \theta \end{pmatrix}$$

然后利用两个第一形式通过 J_σ 合同得到结论: $(\tilde{a}^2, \tilde{b}^2) = (a^2, b^2)$ 或者 (b^2, a^2) , 在此条件下存在等距变换:

$$(u, v) \mapsto (\tilde{u}, \tilde{v}) = (\pm u, \pm v) \text{ or } (\pm v, \pm u)$$

题目 32.(chap5.1) 已知曲面的第一基本形式, 求其 Gauss 曲率。

1. $I = du^2 + \sin^2 u dv^2$.

注. 第一基本形式 $I = w^1 w^1 + w^2 w^2$ 不受等距变换影响, 因此任取一组合理的正交标架, 利用

$$K = -\frac{dw_1^2}{w^1 \wedge w^2}$$

即可。比如第一问可以取 $w^1 = du, w^2 = \sin u dv$.

或者利用正交参数系 ($F = 0$) 下的 Gauss 方程:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right)_u \right\}$$

解答: [Show answer](#)

题目 33.(chap5.2) 设两个曲面 $S, \tilde{S}$ 的第一基本形式满足 $I = \lambda \tilde{I}$, $\lambda > 0$ 为常数, 证明: $\lambda K = \tilde{K}$.

解答: [Show answer](#)

直接考虑 $w^\alpha = \sqrt{\lambda} \tilde{w}^\alpha$, 那么

$$d\tilde{w}^1 = \tilde{w}_1^2 \wedge \tilde{w}^2 \Rightarrow dw^1 = \tilde{w}_1^2 \wedge w^2 \Rightarrow \tilde{w}_1^2 = w_1^2$$

于是

$$K = -\frac{dw_1^2}{w^1 \wedge w^2} = -\frac{1}{\lambda} \tilde{K}$$

题目 34.(chap2.5) 设 $v = f^1 r_1 + f^2 r_2$ 是曲面 S 的切向量场, 证明其协变微分:

$$Dv = (df^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha f^\beta du^\gamma) r_\alpha$$

注. 协变微分就是先求微分再投影到切平面, 实际上在第三章我们曾经设:

$$r_{\alpha\beta} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma} r_{\gamma} + C_{\alpha\beta} n$$

这里已经将 $r_{\alpha\beta}$ 分离为切平面和 n 上的分量, 因此

$$Dr_{\alpha} = P(dr_{\alpha}) = P(r_{\alpha\beta} du^{\beta}) = \Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma} r_{\gamma} du^{\beta}$$

解答: [Show answer](#)

直接计算

$$\begin{aligned} Dv &= D(f^{\alpha} r_{\alpha}) = P(df^{\alpha} r_{\alpha} + f^{\alpha} r_{\alpha\beta} du^{\beta}) \\ &= df^{\alpha} r_{\alpha} + f^{\alpha} \Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma} r_{\gamma} du^{\beta} \\ &= df^{\alpha} r_{\alpha} + f^{\gamma} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} r_{\alpha} du^{\beta} \\ &= (df^{\alpha} + f^{\gamma} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} du^{\beta}) r_{\alpha} \end{aligned}$$

再把 γ, β 交换一下即可。

题目 35.(chap5.6) 曲面 $S: r(u^1, u^2)$ 的一个正交标架为

$$e_1 = \frac{r_1}{\sqrt{E}}, \quad e_2 = \frac{r_2 - \langle r_2, e_1 \rangle e_1}{|r_2 - \langle r_2, e_1 \rangle e_1|}$$

求 w^1, w^2, w_1^2 与 $\{du^{\alpha}, \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}\}$ 的关系。

注. 注意

$$e_2 = \sqrt{\frac{E}{EG - F^2}} (r_2 - \frac{F}{E} r_1)$$

以及

$$\langle r_{\alpha\beta}, r_{\gamma} \rangle = \Gamma_{\alpha\beta}^{\xi} g_{\xi\gamma}$$

解答: [Show answer](#)

纯计算, 算完 de_1 算 w_1^2 , 最后结论是:

$$w_1^2 = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{E} \Gamma_{1\alpha}^2 du^{\alpha}$$

题目 36.(chap5.8) 求切向量沿着球面的赤道的平行移动。

注. 就是求和赤道平行的切向量场。

解答: [Show answer](#)

设球面 $r(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$, 球面上的正交标架取 r_u, r_v 的标准化

$$e_1 = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u), \quad e_2 = (-\sin v, \cos v, 0)$$

计算可得 $w_1^2 = 0$. 赤道: $u(t) = 0, v(t) = t$,

$$\gamma: \gamma(t) = r(0, t)$$

设赤道上向量场 $l(t) = f^1 e_1 + f^2 e_2$, 由

$$\frac{Dl}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{df_1}{dt} = \frac{df_2}{dt} = 0$$

所以 f_1, f_2 取常数就可, $l(t) = \lambda e^1 + \mu w^2$.

几何意义上讲, 就是和赤道夹角为固定值的向量场。

题目 37.(chap5.9) 曲面 S 的参数表示为 $r = r(u^1, u^2)$, 证明: 切向量场 $v = r_1/\sqrt{E}$ 沿曲线 $C : (u^1(t), u^2(t))$ 是平行线的充要条件是: 沿着 C 有:

$$\Gamma_{1\alpha}^2 \frac{du^\alpha}{dt} = 0$$

注. 可以利用 chap5.6 的结论直接证明。

解答: [Show answer](#)

取 $f_1 = 1, f_2 = 0$, $v = f_1 e_1 + f_2 e_2$,

$$\frac{Dv}{dt} = 0 \Leftrightarrow \Gamma_{1\alpha}^2 \frac{du^\alpha}{dt} = 0$$

题目 38.(chap5.10) 在球面 $r = (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, a \sin u)$ 上, 证明弧长参数曲线 $\gamma(s) = r(u(s), v(s))$ 的测地曲率可以表示为

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} - \sin u \frac{dv}{ds}$$

其中 θ 是曲线和经线 (u 线) 的夹角。并求球面纬圆的测地曲率。

注. 球面的这个参数就是正交参数, 直接代入 Liouville 公式算就行了。第二问代入 $\theta = \frac{2}{\pi}$ 就可。

解答: [Show answer](#)

题目 39.(chap5.12) 沿曲面 S 上的弧长参数曲线 $C : r = r(s)$ 有正交标架场

$$e_1 = \frac{dr}{ds}, e_3 = n, e_2 = e_3 \wedge e_1$$

设

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_1 & 0 & \lambda_3 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

证明: $\lambda_1 = k_g, \lambda_2 = k_n$.

定义 $\tau_g = \lambda_3$, 称为曲线的测地挠率, 证明:

$$\tau_g = (e_3, \dot{e}_3, e_1) = (n, \dot{n}, \dot{r})$$

解答: [Show answer](#)

直接由定义:

$$k_g = \left\langle \frac{de_1}{ds}, e_2 \right\rangle = \lambda_1$$

$$k_n = \left\langle \frac{de_1}{ds}, e_3 \right\rangle = \lambda_2$$

而

$$\tau_g = \left\langle \frac{de_2}{ds}, e_3 \right\rangle = -\left\langle \frac{de_3}{ds}, e_2 \right\rangle = -\langle \dot{n}, n \wedge \dot{r} \rangle = (n, \dot{n}, \dot{r})$$

题目 40.(chap5.13) $r(t)$ 是曲面 S 上的正则曲线, 若 $v = v(t), w = w(t)$ 是沿曲线 $r(t)$ 的曲面的单位切向量场, θ 是 v, w 的夹角, 证明:

$$\left\langle \frac{Dw}{dt}, n \wedge w \right\rangle - \left\langle \frac{Dv}{dt}, n \wedge v \right\rangle = \frac{d\theta}{dt}$$

注. 这个题和测地什么的没一点关系, 证明方法和 Liouville 公式的证明很相似, 所以出了这个题。

解答: [Show answer](#)

不妨假设 v, w, n 勾成右手坐标系, 那么考虑 v, w 互相正交分解:

$$v = w \cos \theta - n \wedge w \sin \theta$$

$$w = v \cos \theta + n \wedge v \sin \theta$$

那么 $\langle v, w \rangle = \cos \theta$ 两边对 t 求导可得

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dv}{dt}, w \right\rangle + \left\langle v, \frac{dw}{dt} \right\rangle &= -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} \\ \left\langle \frac{dv}{dt}, v \cos \theta + n \wedge v \sin \theta \right\rangle + \left\langle w \cos \theta - n \wedge w \sin \theta, \frac{dw}{dt} \right\rangle &= -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

再利用

$$\left\langle \frac{dv}{dt}, v \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle v, v \rangle = 0$$

题目 41.(chap5.14) 设曲线 C 是旋转面 $r(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$ 上的一条测地线, θ 是 C 与经线的夹角, 证明: 沿 C 有 $f(u) \sin \theta$ 等于常数。

注. 注意到

$$\cos \theta = \sqrt{E} \frac{du}{ds}$$

套用 Liouville 公式即可得证。

解答: [Show answer](#)

题目 42.(chap5.16) 曲面的第一基本形式 $I = du^2 + G(u, v)dv^2$, 且 $G(0, v) = 1$, $G_u(0, v) = 0$, 证明:

$$G(u, v) = 1 - u^2 K(0, v) + o(u^2)$$

注. 本题关键在于利用

$$dw^2 = d(\langle dr, e_2 \rangle) = w_2^1 \wedge w^1$$

和麦克劳伦展开:

$$G(u, v) = G(0, v) + G_u(0, v)u + \frac{G_{uu}(0, v)}{2}u^2 + o(u^2)$$

第一个结论要是忘了, 就从 $d^2r = d(w^\alpha e_\alpha) = dw^\alpha r_\alpha - w^\alpha \wedge de_\alpha = 0$ 开始推。

解答: [Show answer](#)

直接计算:

$$\begin{aligned}
 w^1 &= du \\
 w^2 &= \sqrt{G}dv \\
 w^1 \wedge w^2 &= \sqrt{G}du \wedge dv \\
 dw^2 &= (\sqrt{G})_u du \wedge dv = \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{G}} w^1 \wedge w^2 \\
 &= w_2^1 \wedge w^1 \\
 \Rightarrow w_2^1 &= -(\sqrt{G})_u dv \\
 dw_2^1 &= -(\sqrt{G})_{uu} du \wedge dv \\
 K &= \frac{dw_2^1}{w^1 \wedge w^2} = -\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}} = \frac{G_u^2 - 2G_{uu}G}{4G^2} \\
 K(0, v) &= -\frac{1}{2}G_{uu}(0, v) \\
 G(u, v) &= G(0, v) + G_u(0, v)u + \frac{G_{uu}(0, v)}{2}u^2 + o(u^2) \\
 &= 1 - K(0, v)u^2 + o(u^2)
 \end{aligned}$$

题目 43.(chap5.17) 在测地平行坐标系下求常 Gauss 曲率曲面的第一基本形式。

注. 那一大堆定义的东西都用不着, 这道题只需要知道测地平行坐标系下第一形式

$$E = 1, F = 0, G(0, v) = 1, G_u(0, v) = 0$$

就行了, 和上一道题的题设一样。

解答: [Show answer](#)

由上一题结论可知

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}$$

所以也就是常微分方程初值问题:

$$(\sqrt{G})_{uu} + KG = 0, \sqrt{G}(0, v) = 1, (\sqrt{G})_u(0, v) = \frac{G_u(0, v)}{2\sqrt{G}} = 0$$

$K > 0 \Rightarrow$ 通解为 $\sqrt{G} = A \cos \sqrt{K}u + B \sin \sqrt{K}u$, 代入初值得 $G = \cos^2(\sqrt{K}u)$, 此时

$$I = du^2 + \cos^2(\sqrt{K}u)dv^2$$

$K = 0 \Rightarrow \sqrt{G} = A + Bu$, 代入初值得 $G = 1$, 此时

$$I = du^2 + dv^2$$

$K < 0 \Rightarrow$ 通解为 $A \cosh \sqrt{-K}u + B \sinh \sqrt{-K}u$, 代入初值得 $\sqrt{G} = \cosh \sqrt{-K}u$, 第一基本形式为

$$I = du^2 + \cosh^2(\sqrt{-K}u)dv^2$$

题目 44.(chap5.24) 设 ds^2 是参数曲面 $D = \{(u, v)\}$ 的一个 Riemann 度量,

解答: [Show answer](#)

题目 45.(chap5.25) 在区域 D 上给定 Riemann 度量, 求其测地线。

1. $D = \{(u, v) : v > 0\}, ds^2 = v(du^2 + dv^2)$.
2. $D = \mathbb{R}^2, ds^2 = \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2}(du^2 + dv^2)$.

注. 什么 Riemann 度量, 就是第一形式换了个说法...

可以直接求解测地线方程组, 然后代入 Christoffel 符号。本题的曲面都是正交参数, 可以简化计算: 考虑 r_u, r_v 标准化得到的正交标架, 任取一弧长参数曲线 $r(s) = r(u(s), v(s))$, 其是测地线当且仅当

$$\frac{D\dot{r}(s)}{ds} = \left(\frac{d(\sqrt{E}\dot{u})}{ds} + \sqrt{G}\dot{v} \frac{w_2^1}{ds} \right) e_1 + \left(\frac{d(\sqrt{G}\dot{v})}{ds} + \sqrt{E}\dot{u} \frac{w_1^2}{ds} \right) e_2 = 0$$

解答: [Show answer](#)

题目 46.(chap5.18) 设曲面 S 上以点 P 为中心、 r 为半径的测地圆周长为 $L(r)$, 所围区域的面积为 $A(r)$, 证明: P 点处 Gauss 曲率为

$$K = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{\pi} \frac{2\pi r - L(r)}{r^3} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{12}{\pi} \frac{\pi r^2 - A(r)}{r^4}$$

注. 这道题的关键在于利用: 测地极坐标系下曲面的第一基本形式为

$$I = d\rho d\rho + G(r, \theta) d\theta d\theta$$

满足

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0, \lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_\rho = 1$$

测地极坐标系 (ρ, θ) 下固定 $\rho = r$ 得到的曲线 $\gamma(\theta)$, 叫“测地圆”。测地圆的周长为

$$L(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{G(r, \theta)} d\theta$$

面上的面积元为 $dA = w^1 \wedge w^2 = \sqrt{G(\rho, \theta)} d\rho \wedge d\theta$, 所以测地圆盘的面积:

$$A(r) = \iint_{(0, r) \times (0, 2\pi)} \sqrt{G(\rho, \theta)} d\rho d\theta$$

解答: [Show answer](#)

类似 chap5.16, 仍然可得

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}}$$

一直洛就完了:

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{\pi} \frac{2\pi r - L(r)}{r^3} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{\pi} \frac{\int_0^{2\pi} (r - \sqrt{G(r, \theta)}) d\theta}{r^3} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\int_0^{2\pi} (1 - (\sqrt{G})_\rho(r, \theta)) d\theta}{r^2} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-1}{2\pi} \frac{\int_0^{2\pi} (\sqrt{G})_{\rho\rho}(r, \theta) d\theta}{r} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \frac{\int_0^{2\pi} K(r, \theta) \sqrt{G(r, \theta)} d\theta}{r} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (K_\rho(r, \theta) \sqrt{G(r, \theta)} + K(r, \theta) (\sqrt{G})_\rho(r, \theta)) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(P) d\theta = K(P)
 \end{aligned}$$

实际上最右式也是洛一下就完了:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{12}{\pi} \frac{\pi r^2 - A(r)}{r^4} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{12}{\pi} \frac{\int_0^r \int_0^{2\pi} (\frac{r^2}{2} - \sqrt{G(\rho, \theta)}) d\theta d\rho}{r^4} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{\pi} \frac{\int_0^{2\pi} (r - \sqrt{G(r, \theta)}) d\theta}{r^3}$$

题目 47.(chap5.19) 证明: 在常 Gauss 曲率曲面上, 测地圆具有常测地曲率。

注. 这道题利用书上 127 页的结论, 得分情况硬讨论, 没有什么直接的办法。

解答: [Show answer](#)

题目 48.(chap5.23) 求两个曲面间的等距变换:

1. $D = \{(u, v) : v > 0\}, ds^2 = \frac{a^2}{v^2} (du^2 + dv^2)$.
2. $\Omega = \mathbb{R}^2, ds^2 = dx^2 + e^{\frac{2x}{a}} dy^2$.

注. 把参数曲面 $r(u, v)$ 视为而且区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 到 E^3 的映射, ds^2 就是第一形式。

解答: [Show answer](#)

等距变换保证第一形式不变, 也就是 Jocabbi 的那个结论, 用一下就行了。这儿不算了。

题目 49.(chap5.21) 设 $r : D \rightarrow E^3$ 是一个曲面片, r 的 Gauss 曲率恒负, 证明: 从 D 内一点出发的两条测地线不会相交于 D 内另一点。

解答: [Show answer](#)

简单来说, 就是测地线不能围成一小片区域, 否则由 GB 公式

$$\iint_D K dA + \int_{\partial D} k_g ds = 2\pi - \alpha_1 - \alpha_2$$

因为是测地线, 所以 $k_g = 0$, $K < 0$, 所以左边恒负, α_i 两个相交处的外角 $\in [0, \pi]$, 所以右侧非负, 这就矛盾。

题目 50.(chap5.22) 设 A 是曲面 S 上的一个四边形, P_i 是顶点, α_i 是相应的内角, 证明:

$$\int_A K d\sigma + \int_{\partial A} k_g ds = \sum_{i=1}^4 \alpha_i - 2\pi$$

注. 外角 + 内角 = π , 直接套 GB 公式就完了。

解答: [Show answer](#)