复分析复习

Fir1247

2023 年 06 月

前言

妈的，跟 Cauthy，Riemann，Taylor，Laurent，Schwarz，Liouville，Rouche，Hurwitz，Weierstrass，Arzela-Ascoli，Montel，Jordan 拼了！

足控大爆发！考前抱佛脚！考前抱佛脚！考前抱佛脚！考前抱佛脚！考前抱佛脚！考前抱佛脚！考前抱佛脚！考前抱佛脚！考前抱佛脚！考前抱佛脚！考前抱佛脚！

S 属性大爆发！Schwarz！Schwarz！Schwarz！Schwarz！Schwarz！Schwarz！Schwarz！Schwarz！Schwarz！

1 第三、四章核心定理

定理 1. 柯西积分公式：简单闭曲线 γ 围成的区域为 D，且 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$，则

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} \mathrm{d}z$$

定理 2. 导数估计：$D = B(a,R)$，$f \in H(D) \cap C(\overline{D})$，且 $|f(z)| < M$ on D，则

$$|f^{(n)}(z)| \leqslant \frac{n!M}{R^n}$$

证明 (1 ⇒ 2)

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z)| &= \left| \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} \mathrm{d}z \right| \\ &\leqslant \frac{n!}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \\ &= \frac{n!M}{r^n} \to \frac{n!M}{R^n} \text{ as } r \to R \end{aligned}$$

定理 3. Liouville：整函数有界则必为常数。

证明 (2 ⇒ 3)

$$|f'(z)| \leqslant \frac{M}{r} \to 0 \text{ as } r \to \infty \Rightarrow f'(z) = 0 \Rightarrow f(z) = C$$

定理 4. 零点的孤立性：f 在域 D 上全纯且不恒为零，则 f 在 D 上的零点是孤立的。

证明 如果 f 不恒等于零，假设 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点，于是 $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$ 且 $g(z)$ 全纯，$g(z_0) \neq 0$，由连续性可知存在邻域 $B(z_0, r)$，使得 $g(z_0) \neq 0$，于是 $f(z) \neq 0$ on $B(z_0, r) \backslash \{z_0\}$.

定理 5. 唯一性定理：如果 f_1，f_2 都在域 D 上全纯，如果存在 D 上的收敛点列 $\{z_n\}$，且 $z_n \to z \in D$，使得

$$f_1(z_n) = f_2(z_n), \forall n$$

则 $f_1 = f_2$.

证明 (5 ⇒ 6) 显然 $f_1(z) - f_2(z) = 0$，且 z 是零点的聚点，因此 $f_1(z) - f_2(z)$ 恒为零。

定理 6. $f \in H(D)$，γ 是 D 中可求长简单闭曲线，γ 内部位于 D 中。如果 f 在 γ 上无零点，在 γ 内部有零点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，阶数分别为 $m_1, \cdots, m_k$，于是

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = \sum_{k=1}^n m_k$$

证明 (1 ⇒ 6) 取 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的互不相交的邻域

$$B(a_1, \varepsilon), \cdots, B(a_n, \varepsilon)$$

设 $f(z) = (z-a_k)^{m_k} g_k(z)$ on $B(a_k, \varepsilon)$，则

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{k=1}^n \int_{\partial B(a_k,\varepsilon)} \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{k=1}^n \int_{\partial B(a_k,\varepsilon)} \frac{m_k (z-a_k)^{m_k - 1} g_k(z) + (z-a_k)^{m_k} g_k'(z)}{(z-a_k)^{m_k} g_k(z)} \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{k=1}^n \int_{\partial B(a_k,\varepsilon)} \frac{m_k}{z-a_k} + \frac{g_k'(z)}{g_k(z)} \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{k=1}^n m_k \int_{\partial B(a_k,\varepsilon)} \frac{1}{z-a_k} \mathrm{d}z \\
&= \sum_{k=1}^n m_k
\end{aligned}$$

定理 7. 辐角原理：$f \in H(D)$，γ 是 D 中可求长简单闭曲线，γ 内部位于 D 中。如果 f 在 γ 上无零点，闭曲线 $f(\gamma)$ 绕远点转的圈数等于 f 在 γ 内部的零点个数。

证明 (6 ⇒ 7) 实际上是自然推论。因为

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z$$

有着明确的几何意义：对于不经过原点的连续曲线 $\gamma : z = z(t), a \leqslant t \leqslant b$，我们定义它关于原点的辐角变化值为

$$\Delta_\gamma \mathrm{Arg} z = \mathrm{Arg}(z(b)) - \mathrm{Arg}(z(a))$$

因此，如果 γ 是一条简单闭曲线（逆时针方向），那么如果原点在 γ 内部，则 $\Delta_\gamma \mathrm{Arg} z = 2\pi$，否则为 0.

一般情况下，如果 γ 绕着原点转了 n 圈，自然就会有

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\mathrm{d}z = 2n\pi\mathrm{i}$$

所以我们得到

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\mathrm{d}z = \mathrm{i}\Delta_\gamma \mathrm{Arg} z$$

现在考虑一条简单闭曲线 $\gamma : z = z(t)$，闭曲线 $f(\gamma) : w = f \circ z(t)$，

$$\int_{f(\gamma)} \frac{1}{w}\mathrm{d}w = \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = \mathrm{i}\Delta_\gamma \mathrm{Arg} f(z)$$

因此

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \mathrm{Arg} f(z)$$

即闭曲线 $f(\gamma) : z = f(w(t))$ 围绕原点转的圈数，由定理 6 可知这也是 $f(z)$ 在 γ 内部的零点个数。

定理 8. Rouche：$f, g \in H(D)$，γ 是 D 中可求长简单闭曲线，γ 内部位于 D 中。如果当 $z \in \gamma$ 时，

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|$$

则 f 和 g 在 γ 内部的零点个数一样。

证明 (6 ⇒ 8) 令 $F_t(z) = f(z) + t(g(z) - f(z))$，$0 \leqslant t \leqslant 1$，因此 $|F_t(z)| \geqslant ||f(z)| - t|f(z) - g(z)|| \geqslant ||f(z)| - |f(z) - g(z)|| > 0$，故 $F_z(t)$ 在 γ 上无零点，于是

$$N(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{F_t'(z)}{F_t(z)}\mathrm{d}z$$

由于 $\frac{F_t'(z)}{F_t(z)}$ 关于 t 连续,因此 $N(t)$ 关于 t 连续,由于 $N(t)$ 只能取整数,所以只能是常数,进而 $N(0) = N(1)$，这也就证明了 $F_0(z) = f(z)$ 和 $F_1(z) = g(z)$ 零点个数相同。

证明 (7 ⇒ 8) 注意到

$$|1 - \frac{g(z)}{f(z)}| < 1$$

所以无论 z 在什么连续闭曲线上，点 $w = \frac{g(z)}{f(z)}$ 的轨迹永远落在 $B(1, 1)$ 内，不经过原点也不会绕过原点，因此

$$\Delta_\gamma \mathrm{Arg} w = 0$$

于是 $\Delta_\gamma \mathrm{Arg} f = \Delta_\gamma \mathrm{Arg} g$，二者零点个数一样。

定理 9. 设 $f \in H(D)$，$z_0 \in D$，$w_0 = f(z_0)$，如果 z_0 时 $f(z) - w_0$ 的 m 阶零点，则存在 $\rho_0 > 0$，对于任意的 $0 < \rho < \rho_0$，存在 $\delta = \delta(\rho) > 0$，使得对于任意的 $a \in B(w_0, \delta)$，$a \neq w_0$，$f(z) - a$ 在 $B(z_0, \rho)$ 中恰有 m 个零点。

证明 (5, 8 ⇒ 9) 由零点的孤立性，存在 $\rho_0 > 0$ 使得 $f(z) - w_0$ 在 $\overline{B(z_0, \rho_0)}$ 之内只有 z_0 是零点，设 $0 < \rho < \rho_0$，记

$$\delta = \inf\{|f(z) - w_0| : z \in \partial B(z_0, \rho_0)\}$$

对于 $a \in B(w_0, \delta)$，$a \neq w_0$，记 $F(z) = f(z) - w_0$，$G(z) = f(z) - a$，于是当 $z \in \partial B(z_0, \rho_0)$ 时有

$$|F(z) - G(z)| = |a - w_0| < \delta \leqslant |F(z)|$$

最后一个不等号由 δ 的下确界性得到。因此 $F(z)$ 和 $G(z)$ 在 $B(z_0, \rho_0)$ 上的零点个数相同，即 m 个。

定理 10. 开映射定理：f 是域 D 上非常数的全纯函数，则 $f(D)$ 也是域。

证明 (9 ⇒ 10) 实际上定理 9 证明了：$f \in H(D)$，$z_0 \in D$，$w_0 = f(z_0)$，则对于充分小的 $\rho > 0$，一定存在 $\delta > 0$，使得

$$f(B(z_0, \rho)) \supset B(w_0, \delta)$$

任取 $w_0 \in f(D)$，于是存在 $\delta > 0$ 使得 $B(w_0, \delta) \subset f(D)$，从而 $f(D)$ 是开集。D 是道路连通的，所以 $f(D)$ 也是道路连通的，进而是连通开集。

定理 11. Hurwitz：$\{f_n\}$ 是域 D 上的一列全纯函数且内闭一致收敛到不恒为 0 的函数 f. 设 γ 是 D 中一条可求长简单闭曲线，γ 内部位于 D 中，且不经过 f 的零点。那么必存在正整数 N，当 $n \geqslant N$ 时，f_n 和 f 在 γ 内部零点个数相同。

证明 (8 ⇒ 11) 全纯函数列 f_n 紧一致收敛到 f，可知 f 也全纯，γ 不经过 f 的零点，所以

$$\min\{|f(z)| : z \in \gamma\} = \varepsilon > 0$$

存在 N，使得 $n > N$ 时有

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \leqslant |f(z)|, z \in \gamma$$

于是 $f_n(z)$ 和 $f(z)$ 在 γ 内部零点个数相同。

定理 12. 单叶全纯收敛性：$\{f_n\}$ 是域 D 上的一列单叶全纯函数且内闭一致收敛到不恒为 0 的函数 f，则 f 也是单叶全纯函数。

证明 (11 ⇒ 12) 若 f 不是常数，且不单叶，则存在 $f(z_1) = f(z_2) = w_0, z_1 \neq z_2$. 记 $F(z) = f(z) - w_0$，于是 z_1, z_2 是 F 的零点，取不相交的邻域 $B(z_1, \varepsilon)$ 和 $B(z_2, \varepsilon)$，令 $F_n(z) = f_n(z) - w_0$，

$$F_n \overset{\text{dense}}{\rightrightarrows} F \text{ on } D$$

存在足够大的 N 使得 $n > N$ 时 F_n 在 $B(z_1, \varepsilon)$ 和 $B(z_2, \varepsilon)$ 各有一个零点，记作 z_n' 和 z_n''，$f_n(z_n') = f(z_n'')$，但 $z_n' \neq z_n''$，与 f_n 单叶矛盾.

定理 13. 最大模原理：D 是有界区域，$f \in H(D) \cap C(\overline{D})$，且 f 在 D 上不是常数，则 $|f(z)|$ 的最大值在 ∂D 且只能在 ∂D 上取到。

证明 (10 ⇒ 13) 显然 $f(D)$ 是开集，如果 $z = z_0 \in D$ 使得 $|f(z)|$ 取到最大值，存在 $B(f(z_0), \delta) \subset f(D)$，那么就一定有 $f(z_1) \in B(f(z_0), \delta)$ 满足 $|f(z_1)| > |f(z_0)|$，矛盾。

由于 $\overline{D}$ 是紧集，那么 $|f(z)|$ 在 $\overline{D}$ 上一定有最大值，由于最大值不在 D 内取到，所以一定在 ∂D 上取到。

定理 14. Schwarz 引理：设 $f \in H(B(0,1))$，且满足条件：
(1) $z \in B(0,1)$ 时有 $|f(z)| \leqslant 1$.
(2) $f(0) = 0$.
则下列结论成立：
(1) $\forall z \in B(0,1)$ 有 $|f(z)| \leqslant |z|$.
(2) $|f'(0)| \leqslant 1$.
(3) 如果存在非原点的 $z_0 \in B(0,1)$ 使得 $|f(z_0)| = |z_0|$，或者 $|f'(0)| = 1$ 成立，则存在某个实数 θ 使得

$$f(z) = e^{i\theta} z, z \in B(0,1)$$

证明 (13 ⇒ 14) $f(0)=0$，所以 $f(z)=zg(z)$，$g(z)\in H(B(0,1))$，任取 $0<r<1$，则 $|z|=r$ 时

$$|g(z)|=\frac{|f(z)|}{r}\leqslant\frac{1}{r}$$

由最大模原理可知

$$\max_{z\in\overline{B(0,r)}}|g(z)|\leqslant\frac{1}{r}$$

令 $r\to1$ 可得

$$|g(z)|\leqslant 1 \text{ on } B(0,1)$$

即 $|f(z)|\leqslant|z|$ on $B(0,1)$，$|f'(0)|=|g(0)|\leqslant 1$.

如果存在非原点的 $z_0\in B(0,1)$ 使得 $|f(z_0)|=|z_0|$，则 $|g(z_0)|=1$；或者 $|f'(0)|=1$ 成立，则 $|g(0)|=1$，但由最大模原理可知 $g(z)$ 如果不是常数则 $|g(z)|$ 不可能在 $B(0,1)$ 上取到最大值 1，因此 $|g(z)|=1$，$g(z)=e^{\mathrm{i}\theta}$，$f(z)=e^{\mathrm{i}\theta}z$.

定理 15. 代数学基本定理：多项式 $P(z)=a_nz^n+\cdots+a_0$ 在整个复平面上必有零点。

证明 (3 ⇒ 15) 假设 $P(z)$ 无零点，则 $f(z)=\frac{1}{P(z)}$ 是整函数，

$$f(z)=\frac{\frac{1}{z^n}}{a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}}$$

$|z|$ 充分大时

$$|f(z)|\leqslant\frac{\frac{1}{|z|^n}}{||a_n|-|\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}||}\leqslant M$$

故 $f(z)$ 有界，因此是常数，从而 $P(z)$ 是常数，矛盾。

证明 (8 ⇒ 15) 设 $Q(z)=a_nz^n$，取充分大的 r 使得在 $\partial B(0,r)$ 上 $P(z),Q(z)$ 无零点，且 $|P(z)-Q(z)|<|Q(z)|$，故 $P(z)$ 在 $B(0,r)$ 中零点个数与 $Q(z)$ 一致，因为 $Q(z)$ 有一个 n 阶零点，即原点，所以 $P(z)$ 在 $B(0,r)$ 也有零点。

证明 (12 ⇒ 15) 假设 $P(z)$ 无零点，令 $f(z)=\frac{1}{P(z)}$，由于

$$\lim_{z\to\infty}|f(z)|=0$$

所以 $\forall\varepsilon>0$，存在 $R>0$，使得 $|z|=R$ 时，

$$|f(z)|<\varepsilon$$

取 $\varepsilon<|f(0)|=|a_0|^{-1}$，于是 $|f(z)|<|f(0)|$，$\forall z\in\partial B(0,R)$，边界上没有取到最大值，所以 $f(z)$ 是常函数，$P(z)$ 也是常函数，故矛盾。

2 第五章概念辨析和重要结论

定义 (孤立奇点的定义) 如果 f 在无心圆盘 $\{z:0<|z-z_0|<R\}$ 中全纯，就称 z_0 是 f 的孤立奇点。有三种可能的情形：

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=a$，可去奇点。

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$，极点。

(3) $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ 不存在，本性奇点。

如果 f 在 $\{z : 0 \leqslant R < |z - z_0| < \infty\}$ 中全纯，就称 ∞ 是 f 的孤立奇点，在这种情况下，记

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

则 g 在 $\{0 < |z| < \frac{1}{R}\}$ 上全纯，如果 0 是 g 的可去奇点、m 阶极点、本性奇点，相应地称 ∞ 是 f 的可去奇点、m 阶极点、本性奇点。

注. 研究无穷远点取函数 $f(1/z)$，研究极点阶数取 $1/f(z)$.

定理 16. 直接计算洛朗系数：圆环 $D = \{z : r < |z - z_0| < R\}$，$f \in H(D)$，那么 f 在 D 上可以展开为 Laurent 级数：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z$$

$\gamma_\rho = \{z : |z - z_0| = \rho\}(r < \rho < R)$. 且此展开唯一。

R 可以是无穷，r 也可以是 0. 一般常用的情况就是有限点或者无穷远点邻域：

$$B(z_0, R) = \{z : 0 < |z - z_0| < R\}$$

$$B(\infty, r) = \{z : r < |z| < \infty\}$$

注. 注意和柯西积分公式的区分：柯西积分有个系数 $n!$.

定理 17. 奇点与洛朗系数的关系：z_0 是 f 的 m 阶极点，等价于 f 在 $B(z_0, r)$ 的 Laurent 展开式为

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, a_{-m} \neq 0$$

z_0 是 f 的可去奇点，相当于 0 阶极点，也可以认为因为全纯所以 Laurent 展开只有全纯部分：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, a_{-m} \neq 0$$

无穷远点是 f 的 m 阶极点，等价于 f 的 Laurent 展开式为

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{m} a_n z^n, a_{-m} \neq 0$$

无穷远点是 f 的可去奇点，相当于 0 阶极点，也可以认为因为 $f(1/z)$ 全纯所以 Laurent 展开只有全纯部分：

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} a_n (z - z_0)^n, a_{-m} \neq 0$$

重要推论：无穷远点为可去奇点的整函数为常数，为极点的整函数是多项式，亚纯函数无穷远点为可去奇点或极点 $\Leftrightarrow$ 有理函数，必要性证明思路：无穷远点孤立奇点 $\Rightarrow$ 极点个数有限 $\Rightarrow$ $f(z)$ 减掉各极点以及无穷远点 Laurent 展开主要部分（分式的有限和）全纯，故为常数 $\Rightarrow$ $f(z)$ 是分式有限和，即有理函数。

定理 18. Weierstrass：本性奇点的性质：z_0 是 f 的 m 阶本性奇点，则对于任意复值 A，可以是无穷，都存在点列 $z_n \to z$ 使得 $f(z_n) \to A$.

定理 19. $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ 由所有一次多项式组成，$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$ 由所有分式线性变换组成。

证明 如果 $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$，则 f 是单叶整函数，考虑无穷远点：不能是可去奇点，也不能在无穷远点处全纯，否则 f 为常数；不能是本性奇点，否则任取一个复值 A，因为存在点列 $z_n \to \infty$ 使得 $f(z_n) \to A$，所以

$$\infty = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} f^{-1}(f(z_n)) = f^{-1}(A)$$

这说明所有的复值都是 f^{-1} 的极点，然而 f^{-1} 是整函数。因此无穷远点只能是极点，$f(z)$ 是多项式，再由单叶性可知只能是一次多项式。

如果 $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$，则 f 是单叶亚纯函数，类似可证无穷远点只能是 f 的极点，f 只能是有理函数，由单叶性可知分子分母只能是一次多项式，即分式线性变换。

3 第六章概念辨析和重要结论

定理 20. Schwarz 对称原理：设区域 D 关于实轴对称，如果 f 满足：
(1) f 在 $D \cap \{z|\mathrm{Im}z > 0\}$ 中全纯；
(2) f 在 $D \cap \{z|\mathrm{Im}z \geqslant 0\}$ 中连续；
(3) $f(D \cap \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
那么

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & ,z \in D \cap \{z|\mathrm{Im}z \geqslant 0\} \\ \overline{f(\overline{z})} & ,z \in D \cap \{z|\mathrm{Im}z < 0\} \end{cases}$$

便是 f 在 D 上的全纯开拓。

定理 21. Schwarz 对称原理推广：设 $\mathbb{C}_\infty$ 中的区域 D 关于圆周 $\gamma = \{|z - z_0| = r\}$ 对称，于是 $\mathbb{C}_\infty$ 被 γ 分成两个单连通域，设为 $\mathbb{C}_\infty^+(\gamma)$ 和 $\mathbb{C}_\infty^-(\gamma)$，如果 f 满足：
(1) f 在 $D \cap \mathbb{C}_\infty^+(\gamma)$ 上全纯，且连续到 γ 上；
(2) $f(D \cap \gamma) \subset \Gamma$，$\Gamma$ 为圆周，设其以 w_0 为圆心；
(3) $\forall z \in D \cap \mathbb{C}_\infty^+(\gamma)$，$f(z) \neq w_0$.
那么 f 能全纯开拓到 D 上，称为 D 上的全纯函数 F，F 将 D 中关于 γ 对称的两点映为 $F(D)$ 中关于 Γ 对称的两点。

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & ,z \in D \cap \mathbb{C}_\infty^+(\gamma) \cup \gamma \\ f(z^{*(\gamma)})^{*(\Gamma)} & ,z \in D \cap \mathbb{C}_\infty^-(\gamma) \end{cases}$$

两点关于圆周对称的定义是：两点、圆心共线，与圆心的距离之积为半径的平方。

定义 (幂级数的正则点和奇点) 设级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

的收敛半径为 $R > 0$，去 $\zeta \in \partial B(0, R)$，在线段 0ζ 上取点 $z_0 \neq 0$，则 f 在 z_0 处的 Taylor 级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

其收敛半径 $\rho \geqslant R - |z_0|$.

如果 $\rho > R - |z_0|$，说明 f 可以全纯开拓到更大的区域中，ζ 称为正则点。

如果对于线段 0ζ 上的每个点 z_0，都有 $\rho = R - |z_0|$，则称 ζ 为奇点。（区别于之前的孤立奇点）

例

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

收敛半径为 $R = 1$，且 $f(z) = \frac{1}{1-z}$ on $\{|z| < 1\}$. 对于 $z_0 \in B(0,1)$，其收敛半径为 $\rho = |1 - z_0| \geqslant 1 - |z_0|$，故 $\zeta = 1$ 是唯一的奇点。

定理 22. 幂级数的收敛圆周上必有奇点。

例

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

收敛半径 $R = 1$，在 $\partial B(0,1)$ 上处处收敛，但有奇点 $z = 1$。

例

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$$

收敛半径 $R = 1$，$\partial B(0,1)$ 上处处是奇点。

假设存在 $\zeta_0 \in \partial B(0,1)$ 为正则点，则存在 $z_0 \in 0\zeta$，且 f 在 z_0 处的 Taylor 级数 $g(z)$ 的收敛半径 $\rho > 1 - |z_0|$. 由于形如

$$\{e^{2\pi \mathrm{i}\frac{p}{q}} | p, q \text{为整数且互素}\}$$

在 $\partial B(0,1)$ 上稠密，故存在 $\zeta_1 = e^{2\pi \mathrm{i}\frac{p}{q}} \in \partial B(0,1)$，

$$g(\zeta_1) = \lim_{r \to 1^-} g(r\zeta_1) = \lim_{r \to 1^-} f(r\zeta_1)$$

$$f(r\zeta_1) = \sum_{n=0}^{q-1} r^{n!}\zeta_1^{n!} + \sum_{n=q}^{\infty} r^{n!}$$

对于 $N > q$，

$$\sum_{n=q}^{\infty} r^{n!} > \sum_{n=q}^{N} r^{n!} > (N-q)r^{N!}$$

当 $r \to 1^-$，上式可以大于任何正整数，矛盾，

4 第七章概念辨析和重要结论

定义 设 $\mathcal{F}$ 是域 D 上的一个函数族。

如果它的任意序列，一定有子列在 D 上的内闭一致收敛，称 $\mathcal{F}$ 为正规族。

如果存在 $M > 0$ 使得对于任意的 $f \in \mathcal{F}$，任意的 $z \in D$，都有 $|f(z)| \leqslant M$，则称 $\mathcal{F}$ 一致有界。

对于任意的紧集 $K \subset D$，存在 $M = M(K) > 0$，对于 $\forall f \in \mathcal{F}, \forall k \in K, |f(z)| \leqslant M$，则称 $\mathcal{F}$ 内闭一致有界。

若对于 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $z_1, z_2 \in D$ 且 $|z_1 - z_2| < \delta$ 时，对于 $\forall f \in \mathcal{F}$ 都有

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$$

则称 $\mathcal{F}$ 是等度连续的。

注. 全纯函数内闭有界则等度连续。

定理 23. Arzela-Ascoli：设 $K\subset\mathbb{C}$ 为紧集，$\{f_n\}$ 在 K 上一致有界且等度连续，则 $\{f_n\}$ 必有子列在 K 上一致收敛。

定理 24. Montel：设 $\mathcal{F}$ 是域 D 上的全纯函数族，则 $\mathcal{F}$ 为正规族当且仅当 $\mathcal{F}$ 在 D 上内闭一致有界。

定理 25. Riemann 映射定理：设 $G\subsetneqq\mathbb{C}$ 为单连通区域，对于 $a\in G$，存在唯一的单叶全纯函数 $f:G\to B(0,1)$，满足 $f(a)=0$，$f'(a)>0$.

例 推广的 Liouville 定理：单连通域 $D\subsetneqq\mathbb{C}$，且整函数 $f:D\to\mathbb{C}$，则 f 为常数。

证明 由 Riemann 映射定理可知存在单叶全纯函数 $g:D\to B(0,1)$，于是 $g\circ f:\mathbb{C}\to B(0,1)$，进而是常数，所以 $f=g^{-1}(C)$ 也是常数。

定理 26. 边界对应原理：设 G 是由一条简单闭曲线 Γ 所围成的区域，如果 $w=f(z)$ 把 G 共形地映为 $B(0,1)$，则 f 可以扩充到 Γ 上，使得 $f\in C(\overline{G})$ 且把 Γ 一一映为 $|w|=1$.

逆定理也成立：设 G 和 D 分别是由可求长简单闭曲线 γ 和 Γ 为成都区域，如果 $f\in H(G)\cap C(\overline{G})$ 且把 γ 一一映满 Γ，则 $f:G\to D$ 是共形映射。

例 证明：不存在双叶全纯映射把 $D=\{0<|z|<1\}$ 映到 $G=\{1<|z|<2\}$.

证明 假设双叶全纯映射 f 满足条件，考虑到 $f(D)=G$ 有界，所以 0 是 f 的可去奇点，故可以延拓成 $B(0,1)$ 上的全纯函数 F，且

$$F(B(0,1))\subset\overline{G}=\{1\leqslant|z|\leqslant 2\}$$

由于 0 是内点，由开映射定理可知 $F(0)$ 是内点，因此 $F(0)$ 不在 ∂G 上，从而可知 $F(B(0,1))=G$，故设 $F(0)=z_0=f(w_0)$，$w_0\in D$，于是存在 $B(0,r)\cap B(w_0,r)=\varnothing$，再由开映射定理可知

$$F(B(0,r))\cap F(B(w_0,r))=F(B(0,r))\cap f(B(w_0,r))$$

是包含了 z_0 的开集，那么存在 $z\in B(z_0,\varepsilon)\backslash\{z_0\}$ 将满足

$$z=f(w_1)=F(w_2)=f(w_2),w_1\in B(w_0,r),w_2\in B(0,r)\backslash\{0\}$$

与 f 的单叶性矛盾。

5 关于应用留数定理计算定积分

5.1 核心公式

定理 27. 极点处留数的计算：a 是 f 的 m 阶极点，则

$$\mathrm{Res}(f,a)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]$$

定理 28. 留数定理：f 在简单闭曲线 γ 的内部亚纯，连续到 γ，极点记作 $a_1,\cdots,a_n$，于是

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,a_k)$$

定理 29. $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数的所有极点和无穷远点，这些点的留数之和为零。

5.2 积分的计算

定理 30. $A=\{a_1,\cdots,a_n\}$，如果 f 在上半平面除去 A 之外全纯，在上半平面和实轴上除去 A 之外连续，且

$$\lim_{z\to\infty} zf(z)=0$$

则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,a_k)$$

定理 31. Jordan：f 在 $D=\{z:R_0\leqslant|z|<\infty,\mathrm{Im}z\geqslant 0\}$ 上连续，且

$$\lim_{z\to\infty,\mathrm{Im}z\geqslant 0} f(z)=0$$

则对于 $\forall\alpha>0$，有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} e^{\mathrm{i}\alpha z}f(z)\mathrm{d}z=0$$

这里 $\gamma_R=\{z:z=Re^{\mathrm{i}\theta},0\leqslant\theta\leqslant\pi,R\geqslant R_0\}$

证明 设 $M(R)=\max\limits_{z\in\gamma_R}|f(z)|$，则由题设可知 $R\to\infty$ 时 $M(R)\to 0$，而

$$\int_{\gamma_R} e^{\mathrm{i}\alpha z}f(z)\mathrm{d}z=\int_0^{\pi} e^{\mathrm{i}\alpha R\cos\theta-\alpha R\sin\theta}f(Re^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{i}Re^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$$

所以

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_R} e^{\mathrm{i}\alpha z}f(z)\mathrm{d}z\right| &\leqslant \int_0^{\pi}|e^{\mathrm{i}\alpha R\cos\theta-\alpha R\sin\theta}f(Re^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{i}Re^{\mathrm{i}\theta}|\mathrm{d}\theta\\ &\leqslant RM(R)\int_0^{\pi}e^{-\alpha R\sin\theta}\mathrm{d}\theta\\ &\leqslant RM(R)\int_0^{\pi}e^{-\alpha R\frac{2\theta}{\pi}}\mathrm{d}\theta\\ &=\frac{\pi}{2}M(R)(1-e^{-\alpha R})\to 0 \text{ as } R\to\infty\end{aligned}$$

定理 32. $A=\{a_1,\cdots,a_n\}$，如果 f 在上半平面除去 A 之外全纯，在上半平面和实轴上除去 A 之外连续，且

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=0$$

则对于 $\forall\alpha>0$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mathrm{i}\alpha x}f(x)\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(e^{\mathrm{i}\alpha z}f(z),ak)$$

定理 33. f 在去心半圆域

$$G=\{z=a+\rho e^{\mathrm{i}\theta}:0<\rho\leqslant r,\theta_0\leqslant\theta\leqslant\theta_0+\alpha\}$$

上连续，且

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=A$$

那么

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\gamma_\rho}f(z)\mathrm{d}z=\mathrm{i}A\alpha$$

这里 $\gamma_\rho=\{z=a+\rho e^{\mathrm{i}\theta}:\theta_0\leqslant\theta\leqslant\theta_0+\alpha\}$，沿辐角增加的方向。

定理 34.

$$I=\int_0^{2\pi}R(\sin\theta,\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

其中 R 是二元有理函数，这种类型的积分可以化成无穷型积分：实际上，

$$I=\int_0^{2\pi}R(\sin\theta,\cos\theta)\mathrm{d}\theta=\int_{-\pi}^{\pi}R(\sin\theta,\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

于是作变换 $t=\tan\frac{\theta}{2}$，则

$$I=2\int_{-\infty}^{\infty}R(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

或者转化成单位圆上的积分，设 $z=e^{\mathrm{i}\theta}$，于是

$$I=\int_{|z|=1}R\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z-\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z$$

用残数定理来处理单位圆周内的极点即可。

定理 35. $A=\{a_1,\cdots,a_n\}$，f 在整个复平面上除去 A 之外全纯，$A\cap[a,b]=\varnothing$，设 $-1<r,s<1,s\neq 0$ 且 $r+s$ 是整数，如果

$$\lim_{r\to\infty}z^{r+s+1}f(z)=A\neq\infty$$

则

$$\int_a^b(x-a)^r(b-x)^sf(x)\mathrm{d}x=-\frac{A\pi}{\sin s\pi}+\frac{\pi}{e^{-s\pi\mathrm{i}}\sin s\pi}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(F,a_k)$$

这里 $F(z)=(z-a)^r(b-z)^sf(z)$.

注. 无穷型积分选半圆形围道，先尝试定理 30，再尝试 32，带三角函数的大概率是 32，注意定理 31（实际上是 32 的引理）的证明要掌握；半无穷型积分选“吃豆人”形围道，记得选全纯分支；有限型积分只有两类，三角函数型用万能公式 34 换元，贝塔函数型直接套用定理 35；此外还有两个特殊积分，简要思路：Fresnel 积分选的是 $e^{\mathrm{i}z^2}$，围道是 45° 扇形，Poisson 积分选的是 e^{-az^2}，围道是矩形。关于围道要注意：围道上碰到的奇点，都是用定理 33 修正的。

6 关于共形映射

考前一天开悟！注意一下定义：共形映射是导数不为零，单叶全纯需要可逆，而这不是一个东西！单叶推共形，导数不为零推局部单叶！

圆上一点取倒数，把圆弧变成直线，按序选三个点判断方向；

偏心圆环考虑公共对称点；

上半平面到单位圆盘是 $e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\overline{a}}$；

上半平面作 z^2 得到的是 $\mathbb{C}\backslash[0,+\infty)$，反过来要取 $\sqrt{z}$ 主支，即 $\sqrt{-1}=\mathrm{i}$ 的主支。

暂时就想到这些了，那就十级上吧，你可以的！